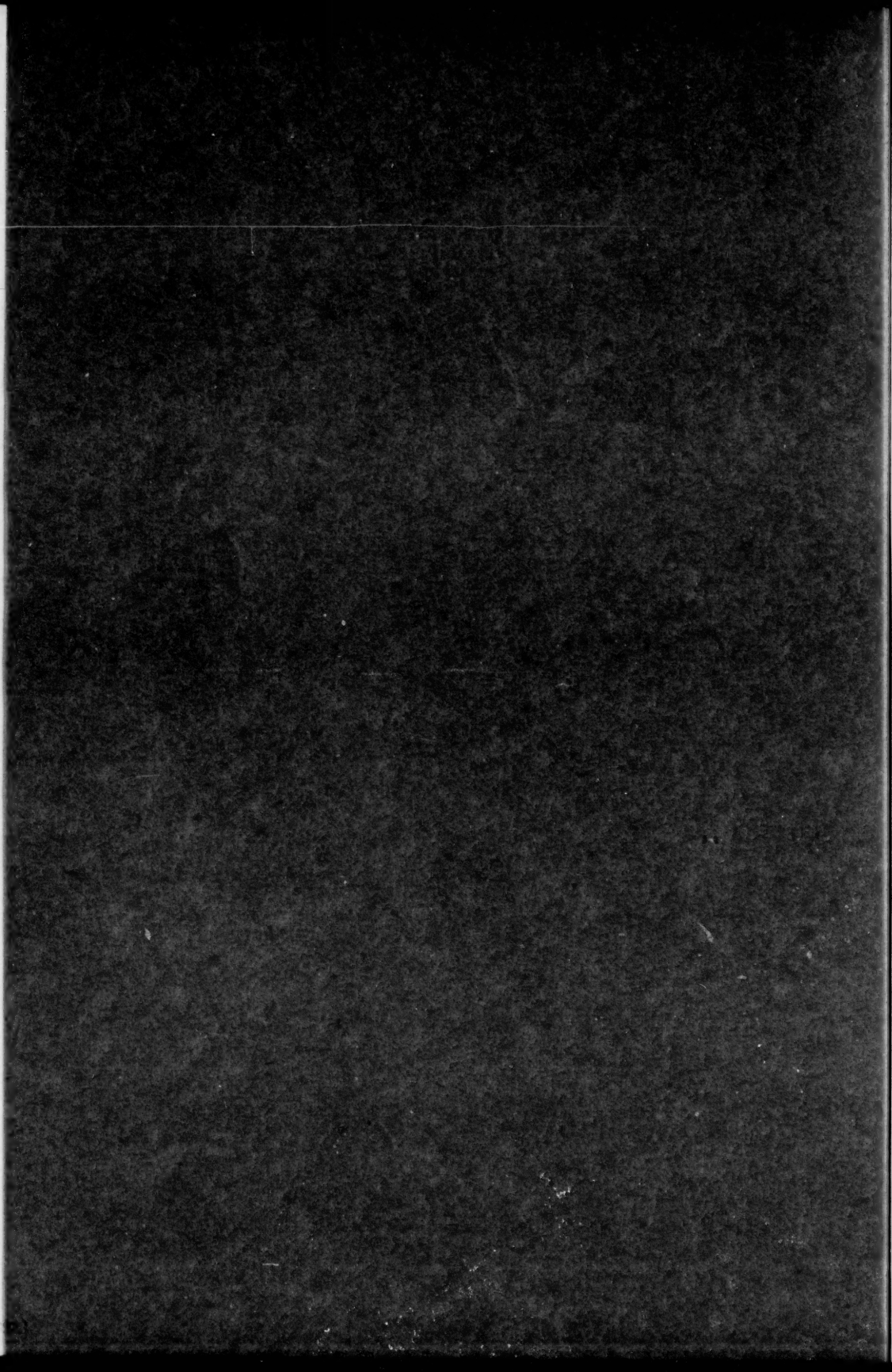
MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

61. BAND



MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

61. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954/55

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Alle Rechte vorbehalten.
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages
ist es auch nicht gestattet, einzelne Beiträge oder Teile daraus
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.
Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Printed in Germany.

Gesamtherstellung: fotokop wilhelm weihert, Darmstadt

Inhalt des 61. Bandes.

Seite

BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL, Some boundary properties of analytic functions . . 186

EPHESER, H., Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 435

GAIER, D., Über Interpolation in regelmäßig verteilten Punkten mit Nebenbedingungen 119

GUPTA, H. C., An operational relation 70

HELLWIG, G., Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus 26

HUPPERT, B., und N. ITÔ, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II . . . 94

JACOBS, K., Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertschen Raum 408

KANOLD, H.-J., Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen 180

KLINGENBERG, W., Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen 1

KNESER, M., Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen 429

KOECHER, M., Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. II 455

KRICKEBERG, K., Charakterisierung oberer und unterer Integrale durch Additivitäts- und Mittelwerteigenschaften 374

KÜNZI, H. P., Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet 200

LAUGWITZ, D., Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I 100

LAUGWITZ, D., Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. II 134

LAUGWITZ, D., Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume 235

LORCH, E. R., On the Volume of Smooth Convex Bodies in Hilbert Space 391

MEINARDUS, G., Über Partitionen mit Differenzenbedingungen 289

NEUMER, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. IV 47

NITSCHE, J., Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems 336

PATI, T., A Tauberian theorem for absolute summability 75

PETRESCO, J., Sur les commutateurs 348

Seite

PUPPE, D., Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders 303

RAGAB, F. M., New integrals involving Bessel-functions 386

ROSENBERG, A., Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linear transformations 150

SALZMANN, H., Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen . . . 489

SCHÖNEBORN, H., Über eine Klasse von topologischen Gruppen 357

SCHUBERT, H., Über eine numerische Knoteninvariante 245

SCHÜTTE, K., Ein widerspruchsloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage 160

SIDDIQI, J. A., On a theorem of Fejér 79

STOLL, W., Über meromorphe Modifikationen. I 206

STOLL, W., Über meromorphe Modifikationen. II 467

VERBLUNSKY, S., On the roots of a transcendental equation, occuring in the theory of trigonometric series 324

WEIER, J., Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl 82

KLINGENBERG, W.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 1—25 (1954)

Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen.

Von
WILHELM KLINGENBERG.

J. HJELMSLEV[1]) hat in einer Reihe von Abhandlungen ein Axiomensystem für eine Ebene von euklidischem Typus untersucht, in dem nicht die Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte und, was damit gleichbedeutend ist, nicht die Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier verschiedener Geraden gefordert wird. Auf eine solche Fragestellung wurde er durch den Versuch geführt, eine „natürliche" Geometrie zu begründen — „natürlich" in dem Sinne, daß sich in der Geometrie die Eigenschaften einer Zeichenebene wiederfinden sollen, zu denen insbesondere das Auftreten von „schleifenden Schnitten" und von Schnittpunkten außerhalb der Zeichenebene gehören[2]).

J. HJELMSLEV formuliert sein Axiomensystem für eine Ebene ohne die in Rede stehenden Eindeutigkeitsforderungen im Rahmen der von ihm begründeten Spiegelungsgeometrie; wir gehen auf diesen Begriff noch genauer ein. Er untersucht die mannigfachen interessanten Folgerungen aus seinen Annahmen. Wenn man jedoch als das Hauptproblem der axiomatischen Methode in der Geometrie die Frage nach dem kennzeichnenden Koordinatenbereich ansieht, das ist der Koordinatenbereich, mit dessen Hilfe man jede durch das Axiomensystem definierte Ebene beschreiben kann, dann bleiben bei den Untersuchungen von J. HJELMSLEV einige Fragen offen. HJELMSLEV zeigt zwar, daß die analytische Geometrie über gewissen Ringen, die Verallgemeinerungen der dualen Zahlen sind, seinen Axiomen genügt; er untersucht aber nicht, ob sich jede seiner axiomatisch definierten Ebenen so beschreiben läßt, und dieses ist auch nicht richtig, wie aus unseren Untersuchungen hervorgehen wird.

In der vorliegenden Arbeit wird nun ein im Rahmen der Spiegelungsgeometrie formuliertes Axiomensystem zugrunde gelegt, das jedenfalls in der von HJELMSLEV definierten Ebene gültig ist. Gleichfalls umfaßt unser Axiomensystem eines, das F. BACHMANN[3]) zur Begründung der euklidischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff angegeben hat. Die von F. BACHMANN axiomatisch charakterisierten euklidischen Ebenen lassen sich folgendermaßen

[1]) HJELMSLEV, J.: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. 1. Mitt. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **8** (1929); 2. Mitt. **10** (1929); 3. Mitt. **19** (1942); 4. u. 5. Mitt. **22** (1945); 6. Mitt. **25** (1949).

[2]) Siehe HJELMSLEV, J.: Die natürliche Geometrie. Leipzig 1923.

[3]) BACHMANN, F.: Grundlagen der Geometrie, Vorlesungsausarbeitung, Kiel 1951. Siehe auch: F. BACHMANN, Geometrien mit euklidischer Metrik, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt, Teil I und II in Math. Z. **51**, 752 u. 769 (1949), Teil III in Math. Nachr. **1**, 258 (1949).

beschreiben: Der Koordinatenbereich ist ein Körper $\boldsymbol{K}$, Char $(\boldsymbol{K}) \neq 2$, in dem eine binäre quadratische Form ausgezeichnet ist, die nicht die Null darstellt; wir sprechen dann von einer definiten Form. Bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems läßt dann die euklidische Ebene als affine Ebene beschreiben, in der die Orthogonalität zweier Geraden mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ durch $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ gekennzeichnet ist, wobei $v^2 + k\,u^2$ die definite Form ist.

Unser Axiomensystem entsteht nun aus dem BACHMANNschen, in dem wir die Eindeutigkeit des Schnittpunkts nicht mehr für verschiedene Geraden allgemein, sondern nur noch für orthogonale Geraden fordern. Hinzu kommen bei uns einige Axiome über Schmieggeraden (das sind Geraden mit mehr als einem gemeinsamen Punkt), die im eindeutigen Fall, wo jede Gerade nur sich selber als Schmieggerade besitzt, trivial werden.

Über den Begriff der Spiegelungsgeometrie ist zu sagen, daß hierbei die Eigenschaften der Ebene mit den Eigenschaften der zugehörigen Bewegungsgruppe in Zusammenhang gebracht werden. Die Möglichkeit hierzu ergibt sich aus der Bemerkung, daß den Punkten und Geraden einer euklidischen Ebene eineindeutig die Spiegelungen an ihnen zugeordnet sind, das sind die involutorischen[4]) Elemente der Bewegungsgruppe, welche die Punkte und Geraden als Fixgebilde besitzen. Wir sprechen daher von Geraden- und Punktspiegelungen. Überdies lassen sich auch die geometrischen Grundrelationen „inzident", „orthogonal" und „im Büschel liegen" in der Bewegungsgruppe einfach dadurch kennzeichnen, daß die Produkte der zugehörigen Spiegelungen involutorisch sind. Schließlich ist ja wohlbekannt, daß die Bewegungsgruppe von den Geradenspiegelungen erzeugt wird.

Unser Axiomensystem bezieht sich demgemäß auf eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem vorgegebenen System von involutorischen Erzeugenden, genannt Geradenspiegelungen. Die Punktspiegelungen werden als Produkte zweier orthogonaler (d.h. kommutierender) Geradenspiegelungen definiert. Gleichzeitig interpretieren wir die Geraden- und Punktspiegelungen in $\mathfrak{G}$ als Geraden und Punkte einer Ebene, deren Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ ist. Wir stellen dann eine Reihe von Eigenschaften als Axiome auf, in denen sich diese doppelte Interpretation widerspiegelt. Das Hauptproblem ist dann, das durch unsere Axiome definierte Gebilde $\mathfrak{G}$, sei es als Gruppe oder sei es als Ebene, koordinatenmäßig darzustellen und nachzuweisen, daß die gefundene Darstellung charakteristisch ist für $\mathfrak{G}$.

Die Erreichung dieses Ziels erfordert eine längere Untersuchung, der diese Note gewidmet ist. Bei den Folgerungen, die wir aus unserem Axiomensystem ziehen, verwenden wir zunächst nur die erste Axiomgruppe und dann nehmen wir sukzessive die weiteren Axiome (oder zunächst auch nur Folgerungen aus ihnen) hinzu. Insbesondere werden die letzten beiden Axiome, durch die unsere Ebene als euklidische Ebene gegenüber Ebenen von nichteuklidischem Typ abgegrenzt wird, erst ganz zum Schluß voll herangezogen. Auf diese

[4]) Ein Gruppenelement heißt involutorisch, wenn es die Ordnung 2 hat.

Weise lassen sich die bis dahin gewonnenen Resultate eventuell auch für Ebenen von nichteuklidischem Typus verwenden. Auch J. HJELMSLEV betrachtet die euklidischen Ebenen mit Nachbarelementen nicht isoliert von den nichteuklidischen Ebenen, sondern er hat eine gemeinsame Behandlung aller ebenen metrischen Geometrien mit Nachbarelementen im Auge. Eine solche Möglichkeit zur weitgehend simultanen Behandlung der hyperbolischen, euklidischen und elliptischen Ebenen ist ja gerade eine der Stärken des Spiegelungskalküls. So erscheint es als eine in diesem Zusammenhang wichtige Aufgabe, die bei HJELMSLEV befindlichen Ansätze für die Behandlung der nichteuklidischen Ebenen mit Nachbarelementen weiter voranzutreiben und womöglich zu ähnlich abschließenden Ergebnissen zu gelangen, wie wir sie hier für die euklidische Ebene mit Nachbarelementen erhalten.

Wir interpretieren die Geraden- und Punktspiegelungen als Geraden und Punkte einer Ebene. Zwei Punkte nennen wir benachbart, wenn sie mehr als eine Verbindungsgerade haben. Zwei Geraden heißen benachbart, wenn es zu jedem Punkt auf der einen Geraden einen Nachbarpunkt auf der anderen gibt. Insbesondere erweisen sich zwei Schmieggeraden als Nachbargeraden. Weiter läßt sich zeigen, daß die Punkte und Geraden eine affine Ebene mit Nachbarelementen bilden; diesen Begriff hatten wir früher eingeführt[5]). Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Begriffs affine Ebene dahingehend, daß nicht die Eindeutigkeit von Schnittpunkt und Verbindungsgerade gefordert wird. Es gibt zu einer Geraden durch einen Punkt genau eine Parallele und die Eigenschaft „parallel" ist transitiv. Jedoch wird es im allgemeinen zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt außer der Parallelen noch weitere Nichtschneidende geben, was man in Beziehung setzen mag zu dem Auftreten von Schnittpunkten außerhalb einer begrenzten Zeichenebene.

In unserer Ebene gilt der kleine affine Satz von DESARGUES und der affine Satz von PAPPOS-PASCAL. Wir hatten gezeigt[5]), daß unter diesen Voraussetzungen die Ebene sich als affine Ebene über einem H-Ring beschreiben läßt. Dabei ist ein H-Ring ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und von je zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt.

Ferner folgt aus unseren Axiomen, daß 2 nicht Nullteiler ist. Endlich läßt sich die Relation „orthogonal" für zwei Geraden mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ durch $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ beschreiben, sobald wir ein orthogonales Bezugssystem wählen. Dabei ist $v^2 + k\,u^2$ eine definite Form in dem Sinne, daß sie dann und nur dann einen Nullteiler darstellt, wenn u und v Nullteiler sind. $\mathfrak{G}$ gestattet damit als Bewegungsgruppe der Ebene eine treue Darstellung durch 3-reihige Matrizen über $\boldsymbol{R}_H$.

Diese Eigenschaften sind nun umgekehrt auch für den Koordinatenbereich unserer euklidischen Ebenen mit Nachbarelementen charakteristisch. Sei nämlich $\boldsymbol{R}_H$ ein H-Ring, für den 2 nicht Nullteiler ist, und sei $v^2 + k\,v^2$ eine definite Form in $\boldsymbol{R}_H$. Betrachten wir dann die affine Ebene über $\boldsymbol{R}_H$ und erklären

[5]) KLINGENBERG, W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. Bd. **60**.

die Orthogonalität zweier Geraden wie oben mit Hilfe der definiten Form, so bildet diese Ebene eine euklidische Ebene mit Nachbarelementen im Sinne unseres Axiomensystems. Damit wissen wir also, wie sich jede durch unser Axiomensystem definierte Ebene oder Gruppe analytisch beschreiben läßt.

Wir erhalten als Spezialfall auch die Charakterisierung der eindeutigen euklidischen Ebenen von F. BACHMANN[3]): Bei diesen Ebenen ist der H-Ring ein Körper, außer der Null gibt es keine Nullteiler.

Wir bemerken noch, daß die Nachbarrelation in einer affinen Ebene mit Nachbarelementen klassenbildend ist: Die Klassen benachbarter Punkte und benachbarter Geraden bezeichnen wir als Großpunkte und Großgeraden. In der so definierten Großgeometrie gelten die Eindeutigkeitsaxiome; in unserem Falle ist die zur euklidischen Geometrie mit Nachbarelementen gehörende Großgeometrie also eine eindeutige euklidische Geometrie im Sinne von F. BACHMANN. Der Koordinatenbereich der Großgeometrie ist der Restklassenkörper $\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ des H-Rings $\boldsymbol{R}_H$ nach dem teilerlosen Ideal $\boldsymbol{N}$ der Nullteiler. In $\mathfrak{G}$ gibt es die invariante Untergruppe $\mathfrak{N}$ der Nachbarbewegungen, durch welche jeder Punkt in einen Nachbarpunkt transformiert wird. $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist dann die Bewegungsgruppe der Großgeometrie.

Es ist nun leicht, den Anschluß an das Axiomensystem von J. HJELMSLEV zu gewinnen und die bei ihm auftretenden Axiome durch bestimmte Eigenschaften des H-Rings zu charakterisieren. Gilt z. B. für die euklidische Ebene mit Nachbarelementen das Axiom der freien Beweglichkeit, so bedeutet dies, daß im zugehörigen Koordinaten-H-Ring die Summe von zwei Quadraten wiederum Quadrat ist. Auch angeordnete H-Ringe treten als Koordinatenbereich auf. Ist die Anordnung insbesondere vom archimedischen Typ, so muß der H-Ring notwendig ein Körper sein, vgl. [5]).

1. Das Axiomensystem.

1.1. Das Axiomensystem. Es sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem System involutorischer Erzeugender $g, h, j, \ldots$ gegeben, die Geradenspiegelungen oder auch Geraden heißen. Die allgemeinen Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ heißen Bewegungen. $e \in \mathfrak{G}$ sei das neutrale Element. Wir definieren:

D1. Die Relation „*g senkrecht h*", $g \perp h$, gilt, wenn $gh = hg$; $g \neq h$ ist. Die Negation bezeichnen wir mit $g \not\perp h$.

D2. Für $g \perp h$ heißt das Produkt gh *Punkt*. Punkte werden mit $P, Q, \ldots$ bezeichnet.

D3. Die Relation „*g inzident P*", $g \mathrel{I} P$ oder $P \mathrel{I} g$, gilt, wenn $gP = Pg$; $g \neq P$ ist. Die Negation wird mit $g \not I P$ oder $P \not I g$ bezeichnet.

D4. Die Relation „*P benachbart Q*", $P \bigcirc Q$, gilt, wenn es $g; h$ gibt mit $g, h \mathrel{I} P, Q$; $g \neq h$. Die Negation wird mit $P \oslash Q$ bezeichnet.

D5. Die Relation „*g und h sind Schmieggeraden*", $g \curvearrowright h$, gilt, wenn es $P; Q$ gibt mit $P, Q \mathrel{I} g, h$; $P \neq Q$. Die Negation wird mit $g \not\curvearrowright h$ bezeichnet.

In $\mathfrak{G}$ sollen die Axiome gelten:

A 1. Zu $P; Q$ gibt es g mit $g \mathrel{I} P, Q$. g heißt *Verbindungsgerade* von P und Q.

A 2. Aus $g \perp h$; $P, Q \mathrel{I} g, h$ folgt $P = Q$, oder: Aus $g \perp h$ folgt $g \not\frown h$.

A 3. Zu $P; g$ gibt es h mit $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$. h heißt *Lot* von P auf g.

A 4. Zu $g; h; j$ mit $g, h, j \mathrel{I} P$ gibt es k mit $g\,h\,j = k$.

A 5. Zu $g; h; j$ mit $g, h, j \perp g'$ gibt es k mit $g\,h\,j = k$.

A 6. Zu $P = g\,h$ gibt es j mit $j \mathrel{I} P$; $j \not\frown g, h$.

A 7. Aus $g, h, g', h' \mathrel{I} P$; $g \perp h$; $g' \perp h'$; $g \frown g'$ folgt $h \frown h'$.

A 8. Aus $P = g\,h$; $j \mathrel{I} P$; $j \frown g$ folgt $j \not\frown h$.

A 9. Aus $P = g\,h$; $j \mathrel{I} P$; $j \frown j' = g\,j\,g$ folgt $j \frown g$ oder $j \frown h$.

A 10. Es gibt $g; h; g'; h'$ mit $g, h \perp g', h'$; $P = g\,g' \oslash Q = g\,h'$; $P \oslash P' = g'\,h$.

A 11. Zu $g, h \perp g'$; $j \mathrel{I} P = g\,g'$; $j \not\frown g$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} j, h$.

1.2. Bemerkungen. Inhaltlich besagen die vorstehenden Axiome folgendes: *A 1.* Zwei Punkte haben eine Verbindungsgerade. *A 2.* Zwei orthogonale Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt. *A 3.* Zu $P; g$ gibt es ein Lot h von P auf g. *A 4, A 5.* Wenn drei Geraden mit einem Punkt inzidieren oder auf einer Geraden senkrecht stehen, so ist ihr Produkt wieder eine Gerade. *A 6.* Zu zwei orthogonalen Geraden $g; h$ mit dem Schnittpunkt P gibt es eine Gerade j durch P, die weder zu g noch zu h Schmieggerade ist. *A 7.* Sind zwei mit P inzidierende Geraden $g; g'$ Schmieggeraden, dann auch ihre Lote $h; h'$ in P. *A 8.* Inzidiert j mit dem Schnittpunkt P der orthogonalen Geraden g und h, dann ist j nicht gleichzeitig Schmieggerade an g und h. *A 9.* Die Geraden g und j mögen den Punkt P gemeinsam haben. Ist dann das Spiegelbild $j' = g\,j\,g$ von j an g Schmieggerade von j, dann ist j entweder zu g oder zum Lot h von g in P Schmieggerade. *A 10.* Es gibt ein ordinäres Rechteck, d. h. vier Punkte mit paarweise orthogonalen Verbindungsgeraden, von denen einer nicht zu den beiden anliegenden Eckpunkten benachbart ist. *A 11.* Haben zwei Geraden $g; h$ eine gemeinsame Orthogonale g' und schneidet eine dritte Gerade j die Gerade g im Schnittpunkt P von g und g', dann schneidet j auch die Gerade h.

A 10 und *A 11* stellen eine Zerlegung des üblichen euklidischen Parallelenaxioms in zwei Teilaussagen dar.

Im allgemeinen fordert man an Stelle von *A 2* das Axiom

A 12. Aus $g \neq h$; $P, Q \mathrel{I} g, h$ folgt $P = Q$.

S 1. *A 2* ist ein Spezialfall von *A 12*. Gilt *A 12*, dann folgt aus $P \bigcirc Q$: $P = Q$ und aus $g \frown h$: $g = h$. Die Axiome *A 1*, *A 12*, *A 3*, *A 4*, *A 5*, *A 10*, *A 11* bilden das Axiomensystem von F. Bachmann[3]) für die euklidische Geometrie, die übrigen folgen aus diesen, darunter *A 7*, *A 8*, *A 9* trivialerweise.

Die Beweise liegen auf der Hand, wenn wir noch andeuten, wie *A 6* aus den genannten Axiomen folgt: Man fälle dazu von dem Punkt P in *A 6* die Lote auf die Seiten und Diagonalen des nach *A 10* existierenden Rechtecks. Damit gibt es vier verschiedene Geraden durch P, woraus *A 6* folgt.

Wir bemerken noch, daß die Axiome *A 1*, *A 12*, *A 3*, *A 4*, *A 5*, und das Axiom

A 13. Es gibt $g; h; j$ mit $g \perp h$ und $j \nmid P = g\,h$; $j \not\perp g, h$.

das Axiomensystem der absoluten Geometrie von F. BACHMANN[6]) bilden; dieses ist äquivalent zu einem von ARNOLD SCHMIDT[7]) angegebenen Axiomensystem und es wird hierdurch ein der elliptischen, euklidischen und hyperbolischen ebenen Geometrie gemeinsamer Bereich definiert.

A 13 ist eine Folge von *A 10*.

2. Folgerungen in der absoluten Geometrie.

2.1. Folgerungen aus A1 bis A5[8]).

S 2. Aus $P = g\,h$ folgt $g \perp h$; $P \mathrel{I} g, h$.

Denn jedenfalls ist $g \neq h$; $g\,h = h\,g$, also $g \perp h$. Ferner ist $g\,P = P\,g$; $h\,P = P\,h$. Wäre etwa $P = g$, so würde $h = e$ folgen. Also gilt $g \mathrel{I} P$ und ebenso $h \mathrel{I} P$.

S 3. Aus $g \perp h$; $P \mathrel{I} g, h$ folgt $P = g\,h$. (Ein Punkt P kann als Produkt $g\,h$ irgend zweier orthogonaler Geraden $g; h$ mit $g, h \mathrel{I} P$ geschrieben werden.)

S 4. Aus $g, h, j \mathrel{I} P$; $g\,h\,j = k$ folgt $k \mathrel{I} P$. (Ergänzung zu *A 4*.)

Es ist $k\,P = P\,k$. Wäre $k = P$, so würde $h\,j = g\,P$ folgen. Aus $g \mathrel{I} P$ folgt $h \perp j$ und nach *S 3* $P = h\,j$, also $g = e$ — ein Widerspruch.

S 5. Aus $g, h, j \perp g'$; $g\,h\,j = k$ folgt $k \perp g'$. (Ergänzung zu *A 5*.)

Es ist $k\,g' = g'\,k$. Wäre $g' = k$, so würde $j\,h = g\,g'$ folgen und mit $g \perp g'$ hieraus $j \perp h$, also für $P = j\,h = g\,g'$: $P \mathrel{I} g, h, j, g'$. Aus $P = j\,g' = h\,g'$, also $j = h$ würde ein Widerspruch folgen zu $j \perp h$.

S 6. Zu $P; g$ mit $P \mathrel{I} g$ gibt es h mit $h = P\,g$. Aus $h = P\,g$ folgt $P \mathrel{I} g$.

Falls $P \mathrel{I} g$ gilt, gibt es nach *A 3* h mit $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$. Nach *S 3* ist $P = g\,h$, also $h = P\,g$. Gilt umgekehrt $h = P\,g$, so folgt $P\,g = g\,P$; $g \neq P$ also $P \mathrel{I} g$.

S 7. Zu $\alpha; P$ gibt es $P^* = \alpha^{-1}\,P\,\alpha$.

Da sich α als Produkt endlich vieler Erzeugender $g, h, \ldots$ darstellen läßt, genügt es, die Behauptung für $\alpha = g$ zu beweisen (Fig. 1). Nach *A 3* gibt es h mit $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$. Nach *S 6* gibt es $j = P\,h$; $j \perp h$. Nach *A 5* gibt es $j' = g\,j\,g$. Nach *S 5* gilt $j' \perp h$. Dann gilt für $P^* = j'\,h$: $g\,P\,g = g\,j\,h\,g = g\,j\,g\,j = j'\,h = P^*$.

---

[6]) BACHMANN, F.: Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Ann. **123**, 341—344 (1951).

[7]) SCHMIDT, ARNOLD: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609—625 (1943).

[8]) Vgl. die Darstellung bei F. BACHMANN[6]) u. ARNOLD SCHMIDT[7]).

Es würden sich im folgenden manche Vereinfachungen ergeben, wenn wir von vorneherein auf Grund von *A 10* und *A 11* die elliptische und quasielliptische Ebene (s. **3.**) ausschließen würden. Das von uns eingeschlagene Verfahren, zunächst nur einen Teil der Axiome heranzuziehen und sukzessive weitere hinzuzunehmen, gibt dagegen einen Einblick in die Auswirkungen der einzelnen Axiome.

2.2. Weitere Folgerungen aus der Existenz eines Punktes, A14.

A 14. Es gibt $g; h$ mit $g \perp h$; es gibt also einen Punkt $P = g\,h$.

S 8. *A 14* folgt aus *A 10.*

S 9. Zu g gibt es Q mit $Q \mathrel{I} g$.

Denn nach *A 14* gibt es P, nach *A 3* das Lot $h \mathrel{I} P$; $h \perp g$, also $Q = h\,g \mathrel{I} g$.

S 10. Aus $P \mathrel{I} g$; $h\,P\,h = P'$; $h\,g\,h = g'$ folgt $P' \mathrel{I} g'$.

Zunächst gilt $P'\,g' = g'\,P'$. Mit $P \neq g$ gilt dann auch $P' \neq g'$, also $P' \mathrel{I} g'$.

S 11. Zu $\alpha; g$ gibt es $g^* = \alpha^{-1}\,g\,\alpha$.

Es genügt wiederum, dies für eine Erzeugende $\alpha = h$ zu zeigen (Fig. 2). Nach *S 9* gibt es Q mit $Q \mathrel{I} h$. Nach *A 3* gibt es j mit $j \mathrel{I} Q$; $j \perp g$. Sei $P = g\,j$. Nach *S 7* gibt es $P^* = h\,P\,h$. Nach *A 4* gibt es $j^* = h\,j\,h$. Aus *S 10* folgt $P^* \mathrel{I} j^*$. Nach *S 6* ist damit $j^*\,P^* = h\,j\,h\,h\,P\,h = h\,j\,P\,h = h\,g\,h$ eine Gerade g^*.

Fig. 1. *S 7.*

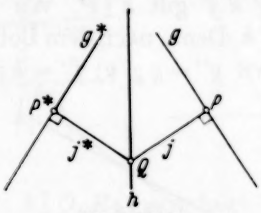


Fig. 2. *S 11.*

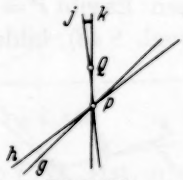


Fig. 3. *S 13.*

S 12. Aus $P \mathrel{I} g$ folgt $\alpha^{-1}\,P\,\alpha \mathrel{I} \alpha^{-1}\,g\,\alpha$. (Erhaltung der Inzidenz bei Bewegungen.)

Eine Folge von *S 10.*

D 6. P heißt *Fixpunkt der Bewegung* α, wenn $P = \alpha^{-1}\,P\,\alpha$. Die Menge der Fixpunkte von α bezeichnen wir mit $F(\alpha)$ [9]).

S 13. Zu $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\perp h$ gibt es $j; k$ mit $j, k \mathrel{I} P, Q$; $j\,k = g\,h$ (Fig. 3).

Für $P = Q$ ist der Satz mit $j = g$; $k = h$ richtig. Für $P \neq Q$ bestimmen wir j durch $j \mathrel{I} P, Q$. Nach *A 4* gibt es k mit $k = j\,g\,h$. Nach *S 4* gilt $k \mathrel{I} P$. Ferner gilt wegen $Q \in F(g\,h)$: $k\,Q\,k = j\,g\,h\,Q\,h\,g\,j = j\,Q\,j = Q$ mit $k \neq Q$. Denn für $k = j$ ist dies jedenfalls richtig. Für $k \neq j$ und damit $g \neq h$ würde aus $k = Q$ oder $j\,g\,h = Q$ folgen: $g \perp h$, entgegen der Voraussetzung.

S 14. Aus $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\perp h$; $g \neq h$ folgt $Q \circ P$. (Ein Fixpunkt Q der Bewegung $g\,h$ ist zu einem gemeinsamen Punkt P von g und h, falls $g \not\perp h$ und $g \neq h$ gilt, benachbart.)

Dies folgt unmittelbar aus *S 13.*

S 15. Aus $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\perp h$; $j \mathrel{I} Q$; $j \perp g$ folgt $R = j\,g \mathrel{I} h$. (Q sei Fixpunkt von $g\,h$, wo $g; h$ einen gemeinsamen Punkt P haben, aber $g \not\perp h$. Der Lotfußpunkt R des Lotes j von Q auf g inzidiert dann auch mit h (Fig. 4).)

Für $g = h$ ist dies richtig. Für $g \neq h$ wählen wir $j'; k'$ gemäß *S 13.* Nach *A 4* ist wegen $j, j', k' \mathrel{I} Q$ $j\,j'\,k'$ eine Gerade: $j\,j'\,k' = (j\,g)\,h = h\,(g\,j)$ oder $R\,h = h\,R$ Wäre $R = j\,g = h$, so würde $g \not\perp h$ folgen. Also gilt $R \mathrel{I} h$.

[9]) Der Begriff Fixpunkt findet sich bei J. HJELMSLEV[1]) 1. Mitt. S. 31.

S 16. Zu $g\,h\,j = k$; $g, h \mathrel{I} P$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} j$; $Q \in F(g\,h)$. (Zur Umkehrung von *A 4*.)

Nach *A 3* gibt es (Fig. 5) h' mit $h' \mathrel{I} P$; $h' \perp j$. Sei $Q = j\,h'$. Es gibt nach *A 4* g' mit $g' = g\,h\,h'$. Es gilt $g' \mathrel{I} P$. Es gilt auch $g' \mathrel{I} Q$. Denn $g'\,Q\,g' = g\,h\,h'\,h'\,j\,g\,h\,h' = g\,h\,j\,g\,h\,h' = j\,h\,g\,g\,h\,h' = j\,h' = Q$ und $Q \neq g'$ (aus $Q = j\,h' = g'$ würde $j\,h = g$ oder $g\,h\,j = e$ folgen). Mit $h', g' \mathrel{I} Q$; $g\,h = g'\,h'$ folgt dann $Q \in F(g\,h)$.

S 17. Zu P mit $P \in F(g\,h)$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} g, h$ und umgekehrt. (Hat $g\,h$ einen Fixpunkt, dann haben g und h einen Punkt gemeinsam und umgekehrt.)

Die Umkehrung ist trivial: Aus $Q \mathrel{I} g, h$ folgt $Q \in F(g\,h)$. — Die erste Aussage ist für $g = h$ richtig. Wir nehmen $g \neq h$ an. Falls $g \perp h$, so gilt für $Q = g\,h$: $Q \mathrel{I} g, h$. Sei jetzt $g \not\perp h$. Es gibt $g'; j'$ mit $g', j' \mathrel{I} P$; $g' \perp g$; $j' \perp h$. Ferner gibt es $v; k'$ mit $v \mathrel{I} g\,g', h\,j'$; $k' \mathrel{I} P$; $k' \perp v$. Für $h' = g'\,k'\,j'$ gilt $h' \mathrel{I} P$. Wir behaupten: Es gibt $r' = g\,h'\,h$. Denn, nach dem Lotensatz (vgl. *S 48*), bilden wir $g'' = g\,g'\,v$; $j'' = h\,j'\,v$.

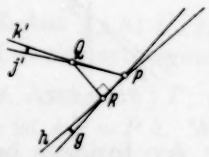


Fig. 4. *S 15.*

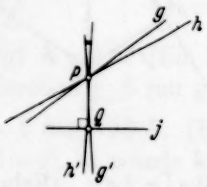


Fig. 5. *S 16.*

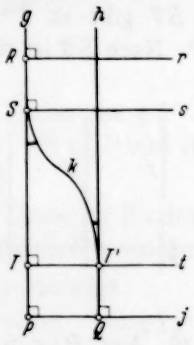


Fig. 6. *S 18.*

Damit wird $g\,h'\,h = g''\,v\,g'\,g'\,k'\,j'\,j'\,v\,j'' = g''\,v\,k'\,v\,j'' = g''\,k'\,j''$. Wegen $g'', k', j'' \perp v$ ist dies nach *A 5* eine Gerade r'.

Nach *S 11* gibt es dann auch $r = g\,r'\,g = g\,g\,h'\,h\,g = h'\,h\,g$. Aus $P \in F(g\,h)$ folgt dann mit $P \mathrel{I} h'$: $r\,P\,r = h'\,h\,g\,P\,g\,h\,h' = P$. $r = P$ würde auf $g \perp h$ führen, was wir ausgeschlossen haben. Also gilt $r \mathrel{I} P$. Aus $h'\,r\,g = h$; $h', r \mathrel{I} P$ folgt nach *S 16* die Existenz von Q mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \in F(h'\,r) = F(g\,h)$. Damit gilt auch $h\,Q\,h = Q$. Aus $Q = h$ würde $h' \perp r$ und damit auch $g \perp h$ folgen. Also gilt $Q \mathrel{I} g, h$.

S 18. Aus $g, h \perp j$; $k \mathrel{I} Q = h\,j$; $k \frown g$ folgt $k \frown h$ (Fig. 6)[10].

Wegen $g \frown k$ gibt es $R; S$ mit $R \neq S$; $R, S \mathrel{I} g, k$. Es sei $r = R\,g$; $s = S\,g$. Wegen $r, s, j \perp g$ gibt es $t = r\,s\,j$; $t \perp g$. Sei $T = g\,t$. Dann ist also $R\,S = T\,P$ mit $P = g\,j$. Auf dieselbe Weise erschließt man wegen $R, S, Q \mathrel{I} k$ ein T' mit $T' \mathrel{I} k$; $R\,S = T'\,Q$. Aus $T\,P = T'\,Q$ oder $T' = T\,P\,Q = t\,g\,g\,j\,j\,h = t\,h$ folgt nach *S 2*: $T' \mathrel{I} t, h$. Da mit $R \neq S$ auch $T' \neq Q$ gilt, bedeutet $Q, T' \mathrel{I} h, k$: $h \frown k$.

2.3. Weitere Folgerungen unter Verwendung von A 7.

S 19. Aus $Q \in F(g\,h)$; $P \mathrel{I} g, h$; $g \not\frown h$; $g \not\perp h$ folgt $Q = P$. (Haben zwei nichtorthogonale Geraden $g; h$ nur einen Schnittpunkt, dann ist dies der einzige Fixpunkt von $g\,h$.)

[10]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 1. Mitt. S. 18.

Nach *S 15* gilt für $R = g\,j$ mit $j \mathrel{I} Q$; $j \perp g$: $R \mathrel{I} h$. Wegen $g \not\asymp h$ ist $R = P$. Ebenso folgt für $S = k\,h$ mit $k \mathrel{I} Q$; $k \perp h$: $S = P$. Aus $g\,j = h\,k = P$ und $g \not\asymp h$ folgt mit *A 7*: $j \not\asymp k$. Also ist $Q = P$.

S 20. Aus $g\,h\,j = k$; $g, h \mathrel{I} P$; $g \not\asymp h$ folgt $j \mathrel{I} P$. (Zur Umkehrung von *A 4*.)

Ist $g \perp h$, also $P = g\,h$, so folgt mit *S 6* aus $P\,j = k$: $j \mathrel{I} P$. — Ist $g \not\perp h$, so folgt mit *S 16* die Existenz von Q mit $Q \mathrel{I} j$; $Q \in F(g\,h)$. Aus *S 19* folgt damit wegen $g \not\asymp h$: $Q = P$, also $j \mathrel{I} P$.

S 21. Aus $P, Q \mathrel{I} g, h$; $j \mathrel{I} P, R$; $k \mathrel{I} Q, R$; $j \not\asymp k$ folgt $R \in F(g\,h)$.

Nach *A 4* gibt es $l; m$ so, daß $g\,h = j\,l = k\,m$ gilt. Aus *S 20* folgt für $j\,k\,m = l$ aus $j \not\asymp k$: $m \mathrel{I} R$, also $g\,h\,R\,h\,g = k\,m\,R\,m\,k = R$.

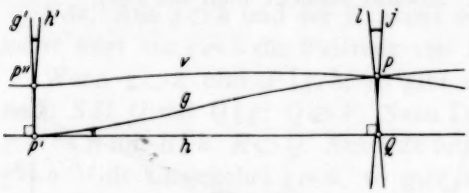


Fig. 7. *S 23.*

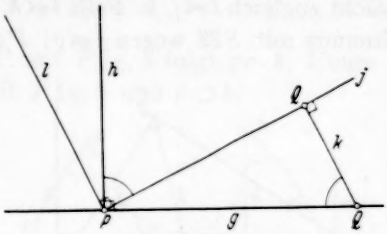


Fig. 8. *S 25.*

S 22. Aus $P \bigcirc Q$; $j \mathrel{I} P, R$; $k \mathrel{I} Q, R$; $j \not\asymp k$ folgt $R \bigcirc P, Q$. (Ist in einem Dreieck $P; Q; R$: $P \bigcirc Q$, und schneiden sich die Dreiecksseiten in R eindeutig, so ist $R \bigcirc P, Q$.)

Falls $P = Q$, folgt aus $j \not\asymp k$: $P = Q = R$. Falls $P \neq Q$, gibt es $g; h$ mit $g \neq h$; $g, h \mathrel{I} P, Q$. Aus *S 21* folgt $R \in F(g\,h)$. Wegen *A 2* ist $g \not\perp h$. Damit folgt aus *S 14*: $R \bigcirc P, Q$.

S 23. Aus $g \frown h$; $P \mathrel{I} g, j$; $j \perp h$; $Q = j\,h$ folgt $P \bigcirc Q$ [11]).

Wir können $g \neq h$ annehmen (Fig. 7). Es gibt P' mit $P' \mathrel{I} g, h$. Es gibt $g' = P'\,g$; $h' = P'\,h$. Nach *A 7* gilt mit $g \frown h$ auch $g' \frown h'$. Damit gibt es P'' mit $P'' \neq P'$; $P'' \mathrel{I} g', h'$. Nach *A 1* gibt es v mit $v \mathrel{I} P, P''$. Nach *A 4* ist $g'\,h'\,v = g\,P'\,P'\,h\,v = g\,h\,v$ eine Gerade. Ferner gibt es nach *A 4* $l = g\,v\,j$.

Wir behaupten: $l \mathrel{I} P, Q$; $l \neq j$, woraus dann $P \bigcirc Q$ folgt. Zunächst ist $l\,Q\,l = g\,v\,j\,j\,h\,g\,v\,j = g\,v\,h\,g\,v\,j = g\,g\,h\,v\,v\,j = h\,j = Q$ und $l \neq Q$, da aus $l = Q$ oder $g\,v\,j = Q = h\,j$ folgt: $g \perp h$. Also ist $Q \mathrel{I} l$. Aus $l = j$ oder $g\,v\,j = j$; $g = v$ folgt $g \mathrel{I} P''$. $P, P'' \mathrel{I} g, g'$; $P \neq P''$ widerspricht aber nach *A 2* der Voraussetzung $g \perp g'$.

S 24. Aus $g \frown h$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} h, j$; $h \frown j$ folgt $P \bigcirc Q$. (Werden zwei Schmieggeraden $g; h$ von einer Geraden j in P und Q geschnitten, dabei in Q eindeutig, so sind P und Q Nachbarpunkte.)

Denn es gibt j' mit $j' \mathrel{I} P$; $j' \perp h$. Für $Q' = j'\,h$ gilt nach *S 23* $Q' \bigcirc P$. Wenn man $P; Q'; Q$ mit den Punkten $P; Q; R$ in *S 22* identifiziert, folgt $P \bigcirc Q$.

S 25. Aus $P = g\,h$; $Q \mathrel{I} g$; $j \mathrel{I} P$; $j \not\asymp h$; $k \mathrel{I} Q$; $k \perp j$ folgt $k \not\asymp g$ (Fig. 8; man bezeichne hier den Punkt k_j mit R statt mit Q).

[11]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 5. Mitt. S. 8.

Es gibt $l = Pj$; $l \perp j$. Wäre $k \curvearrowright g$, so würde nach *S18* folgen $l \curvearrowright g$. Aus $P = g\,h = j\,l$; $l \curvearrowright g$ folgt nach *A7* $j \curvearrowright h$, entgegen der Voraussetzung.

2.4. Weitere Folgerungen aus A6, A8 und der Existenz zweier nichtbenachbarter Punkte, A15.

S26. Aus $P, Q, R \mathrel{I} g$; $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. (Die Relation „benachbart" ist für Punkte auf einer Geraden g transitiv[12].)

Wir können $P \neq Q$ und $Q \neq R$ annehmen (Fig. 9). Es gibt $h = Rg$; $h \perp g$. Nach *A6* gibt es j mit $j \mathrel{I} R$; $j \not\curvearrowright g, h$. Nach *A3* gibt es k mit $k \mathrel{I} P$; $k \perp j$. Sei $S = kj$. Es ist $k \not\curvearrowright g$ nach *S25*. Es gibt l mit $l \mathrel{I} Q, S$. Wegen *A8* gilt nicht zugleich $l \curvearrowright j, k$. Falls $l \not\curvearrowright k$, so folgt aus *S22* wegen $P \bigcirc Q$: $P \bigcirc S$ und hieraus mit *S22* wegen $j \not\curvearrowright g$: $P \bigcirc R$. Ebenso schließt man bei $l \not\curvearrowright j$.

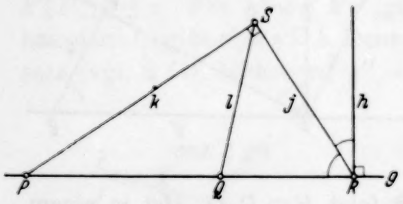


Fig. 9. *S26.*

Fig. 10. *S27.*

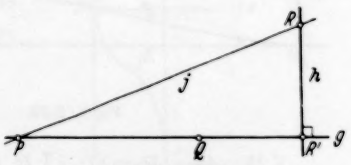


Fig. 11. *S28.*

S27. Aus $g \perp h$; $P \mathrel{I} j, g$; $j \curvearrowright h$ folgt $j \not\curvearrowright g$ (Fig. 10).

Es gibt $k = Pg$; $k \perp g$. Nach *S18* folgt wegen $j \curvearrowright h$: $k \curvearrowright j$. Aus *A8* folgt $j \not\curvearrowright g$.

S28. Aus $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. (Die Relation „benachbart" für Punkte ist transitiv[12].)

Wir nehmen $P \neq Q$; $Q \neq R$ an (Fig. 11). Es gibt $g; h$ mit $g \mathrel{I} P, Q$; $h \mathrel{I} R$; $h \perp g$. Sei $g\,h = R'$. Wegen $Q \bigcirc R$ folgt aus *S22* $Q, R \bigcirc R'$. Aus *S26* folgt $P \bigcirc R'$. Es gibt j mit $j \mathrel{I} P, R$. Nach *S27* ist nicht zugleich $j \curvearrowright g, h$. Aus $j \not\curvearrowright g$ folgt nach *S22* mit $R \bigcirc R'$: $P \bigcirc R$. Aus $j \not\curvearrowright h$ folgt mit $P \bigcirc R'$: $P \bigcirc R$.

S29. Die Relation „benachbart" für Punkte ist eine Äquivalenzrelation. Denn aus *D4* folgt Symmetrie und Reflexivität, aus *S28* Transivität.

A15. Es gibt $P; Q$ mit $P \oslash Q$.

S30. A15 ist eine Folge von A10.

S31. Zu $P; g$ mit $P \mathrel{I} g$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \oslash P$.

Nach *A15* gibt es $P'; Q'$ mit $P' \oslash Q'$. Wegen *S27* können wir $P \oslash Q'$ annehmen. Es gibt h mit $h \mathrel{I} P, Q'$ und k mit $k = Pg$; $k \perp g$. Nach *A8* ist $h \not\curvearrowright k$ oder $h \not\curvearrowright g$. (I) $h \not\curvearrowright k$. Es gibt l mit $l \mathrel{I} Q'$; $l \perp g$. Für $Q = lg$ gilt dann $Q \mathrel{I} g$; $Q \oslash P$. Denn zunächst ist nach *S18* mit $h \not\curvearrowright k$ auch $h \not\curvearrowright l$. Wäre nun $P \bigcirc Q$, so würde nach *S22* folgen: $P \bigcirc Q'$. — (II) $h \not\curvearrowright g$. Dann folgt ebenso wie unter (I) die Existenz von R mit $R \mathrel{I} k$; $R \oslash P$. Hieraus folgt aber die Existenz von Q mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \oslash P$: Denn nach *A6* gibt es m mit $m \mathrel{I} P$; $m \not\curvearrowright g, k$.

[12]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 3. Mitt. S. 14.

Für n mit $n \mathrel{I} R$; $n \perp m$ gilt nach *S25* $n \not\asymp k$. Für $S = n\,m$ gilt damit nach *S22* $S \not\circ P$. Es gibt t mit $t \mathrel{I} S$; $t \perp g$. Wegen $m \not\asymp k$ gilt nach *S18* auch $t \not\asymp m$. Für $Q = t\,g$ gilt damit nach *S22* $Q \not\circ P$.

S32. Zu g gibt es $P; Q$ mit $P, Q \mathrel{I} g$; $P \not\circ Q$. (Auf jeder Geraden gibt es zwei Punkte, die nicht benachbart sind.)

Dies folgt aus *S9*; *S31.*

D7. Die Relation „*g benachbart h*", $g \circ h$, gilt, wenn es zu P mit $P \mathrel{I} g$ ein Q gibt mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \circ P$ und zu Q mit $Q \mathrel{I} h$ ein P gibt mit $P \mathrel{I} g$; $P \circ Q$. Die Negation wird mit $g \not\circ h$ bezeichnet[13]).

S33. Die Relation „benachbart" für Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

Das folgt aus *D7* und *S29.*

S34. Aus $g \circ h$ und der Existenz von P mit $P \mathrel{I} g, h$ folgt $g \frown h$. Umgekehrt folgt aus $g \frown h$ die Existenz von P mit $P \mathrel{I} g, h$ und $g \circ h$.

Wenn $g \circ h$ und $P \mathrel{I} g, h$, so gibt es nach *S31* Q mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \not\circ P$. Nach D7 gibt es R mit $R \mathrel{I} h$; $R \circ Q$. Aus *S22* folgt $g \frown h$. Gilt umgekehrt $g \frown h$, so gibt es nach *D5* P mit $P \mathrel{I} g, h$. Damit folgt $g \circ h$ aus *S23.*

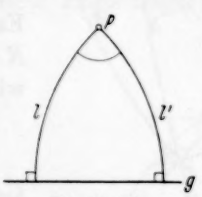


Fig. 12. *D9.*

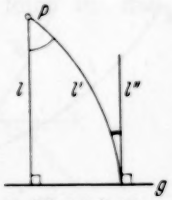


Fig. 13. *D10.*

S35. Aus $P \mathrel{I} h, j$; $Q \mathrel{I} j, g$; $R \mathrel{I} g, h$; $h \not\asymp j$ folgt $j \not\asymp g$ oder $g \not\asymp h$. (Schneidet sich von den drei Seitenpaaren eines Dreiecks wenigstens eines eindeutig, so auch noch ein zweites.)

Denn aus $j \frown g$ und $g \frown h$, oder wegen *S34*, aus $j \circ g$ und $g \circ h$ folgt $j \circ h$ und hieraus nach *S34* $j \frown h$, entgegen der Voraussetzung.

D8. Eine Bewegung $\alpha \in \mathfrak{G}$ heißt *Nachbarbewegung*, wenn für jedes P gilt $\alpha^{-1} P \alpha \circ P$. Die Menge der Nachbarbewegungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$.

S36. $\mathfrak{N}$ ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Denn mit $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$ gilt auch $\alpha\beta \in \mathfrak{N}$ gemäß *S28.* Mit $\alpha \in \mathfrak{N}$ gilt auch $\alpha^{-1} \in \mathfrak{N}$; denn nach *S12* folgt aus $P \circ Q = \alpha^{-1} P \alpha$: $\alpha P \alpha^{-1} \circ \alpha Q \alpha^{-1} = P$. Ebenso ergibt sich, daß aus $\alpha \in \mathfrak{N}$ folgt $\gamma^{-1} \alpha \gamma \in \mathfrak{N}$.

3. Die elliptische und quasielliptische Ebene.

In der elliptischen Ebene sind die Spiegelung an einer Geraden und dem Pol der Geraden dieselbe Bewegung. Wenn es daher in $\mathfrak{G}$ ein Paar $P; g$ gibt mit $P = g$, so nennen wir $\mathfrak{G}$ elliptisch. Eine elliptische Ebene ist auch dadurch gekennzeichnet, daß es einen Punkt P und eine Gerade g so gibt, daß es von P auf g zwei nichtbenachbarte Lote gibt (Fig. 12). Es ist dann $P = g$. Es könnte aber auch vorkommen, daß es einen Punkt P und eine Gerade g gibt, für die außer dem Lot l von P auf g noch eine nichtbenachbarte Gerade l' durch P existiert, die Schmieggerade an ein Lot l'' auf g ist (Fig. 13). Wir nennen $\mathfrak{G}$ in diesem Fall quasielliptisch.

[13]) Der Begriff „Nachbargerade" findet sich bei J. Hjelmslev[1]) 3. Mitt. S. 15.

Ist $\mathfrak{G}$ elliptisch, so auch quasielliptisch. Wir zeigen, daß die quasielliptischen und a fortiori die elliptischen Ebenen im Widerspruch stehen zu *A 10* und *A 11*.

3.1. Folgerungen aus der Existenz von $P; g$ mit $P = g$[14]).

D 9. $\mathfrak{G}$ heißt *elliptisch*, wenn es $P; g$ gibt mit $P = g$.

S 37. Ist $\mathfrak{G}$ elliptisch, so gibt es zu Q ein h mit $h = Q$ und zu h ein Q mit $Q = h$.

Es sei $P = g$ und $Q \neq P$ (Fig. 14). Es gibt j mit $j \mathrel{I} P, Q$ und $j \perp g$. Es gibt $k = j P$; $k \perp g$. Es ist $j\,k\,g = P\,g = e$, also $R = g\,k = j$. Es gibt l mit $l \mathrel{I} Q, R$; $l \perp j$. Wegen $j \mathrel{I} Q$ ist also $Q = j\,l$. Für $h = R\,l$ gilt dann $h = R\,l = j\,l = Q$.

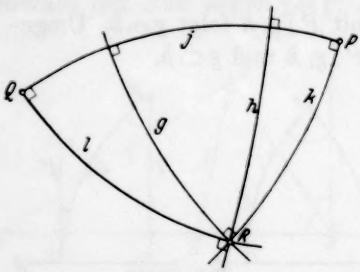


Fig. 14. *S 37.*

Ferner sei h gegeben mit $h \neq g$ (Fig. 14). Es gibt j mit $j \mathrel{I} P$; $j \perp h, g$. Es gibt k mit $k = j P$; $k \perp g$. Es ist $j\,k\,g = P\,g = e$, also $R = g\,k = j$. Es gibt l mit $l \mathrel{I} R$; $l \perp h$; $l \perp j$. Weil mit $R = j$; $j \perp h$ auch $h \mathrel{I} R$ ist, wird $R = h\,l$. Damit wird $Q = j\,l = R\,l = h$.

S 38. Wenn *A 10* gilt, ist $\mathfrak{G}$ nicht elliptisch.

Wir betrachten die nach *A 10* existierenden Geraden $g; h; g'; h'$ mit $g, h \perp g', h'$. Wäre $\mathfrak{G}$ elliptisch, so würde für $P = g\,g'$; $P' = h\,g'$ folgen: $P \circ P'$, im Gegensatz zu *A 10*. — Zum Beweis betrachten wir die nach *S 37* existierenden Punkte $Q; R$ mit $Q = g'$; $R = h'$. Es gilt $g, h \mathrel{I} Q, R$, woraus wegen $g' \neq h'$ oder $Q \neq R$ folgt: $g \frown h$. Hieraus folgt wegen $g' \not\frown g, h$ nach *S 24*: $g\,g' \circ h\,g'$.

S 39. $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann elliptisch, wenn es $P; g; l; l'$ gibt mit $P \mathrel{I} l, l'$; $l, l' \perp g$; $l \not\frown l'$ (Fig. 12).

Wenn $\mathfrak{G}$ elliptisch ist, betrachten wir zu $P; g$ mit $P = g$ ein l mit $l \mathrel{I} P$; $l \perp g$ und $l' = l P$. Diese Elemente genügen den angegebenen Forderungen. Umgekehrt folgt aus $P \mathrel{I} l, l'$; $l, l' \perp g$; $l \not\frown l'$: Für $P' = g P g$ gilt $P' \mathrel{I} l, l'$, also $P' = g P g = P$. Aus $P \mathrel{I} g$ folgt $P = g\,l = g\,l'$, also $l = l'$, ein Widerspruch. Also gilt $P = g$.

3.2. Der quasielliptische Fall. A 16.

D 10. $\mathfrak{G}$ heißt *quasielliptisch*, wenn es $P; g; l; l'; l''$ gibt mit $P \mathrel{I} l, l'$; $l, l'' \perp g$; $l \not\frown l'$; $l' \mathrel{I} g\,l''$; $l' \frown l''$ (Fig. 13).

S 40. Wenn $\mathfrak{G}$ elliptisch ist, dann auch quasielliptisch.

Dies folgt aus *S 39* und *D 10* für $l' = l''$.

A 16. Zu $g, h \perp g'$; $P = g\,g' \circ P' = h\,g'$; $j \mathrel{I} P$; $j \not\frown g$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} j, h$.

S 41. *A 16* folgt aus *A 11*. *A 16* folgt aus *A 12*.

Denn offenbar ist *A 16* ein Spezialfall von *A 11*. Gilt *A 12*, so wird $P = P'$, also $g = h$, so daß man $Q = P$ setzen kann.

[14]) Vgl. F. BACHMANN[3]) und ARNOLD SCHMIDT[7]).

S 42. Wenn $\mathfrak{G}$ quasielliptisch ist und *A 16* gilt, dann ist $\mathfrak{G}$ elliptisch.

Wir betrachten die nach *D 10* existierenden Elemente (Fig. 15). Es gibt k mit $k \mathrel{I} P$; $k \perp l''$. Für $h = kP$; $h \perp k$ folgt nach *S 18* wegen $l' \frown l''$: $h \frown l'$. Also $h \not\frown l$. Aus *A 16* folgt damit die Existenz von Q mit $Q \mathrel{I} l, l''$. Es gilt $l \not\frown l''$; denn aus $l \frown l''$; $l'' \frown l'$ folgt $l \frown l'$. Also genügen $Q; g; l; l''$ den Bedingungen von *S 39*.

S 43. Gelten in $\mathfrak{G}$ die Axiome *A 1* bis *A 11*, dann ist $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch und also auch nicht elliptisch.

Dies ist eine Folgerung aus den vorstehenden Sätzen.

4. Folgerungen mit A 9 und der Eindeutigkeit der Orthogonalen.

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus *A 9*, betreffend Nachbarbewegungen und die Umkehrung von *A 5*. Sodann setzen wir die Eindeutigkeit des nach *A 3* bestimmten Lotes voraus; diese Eindeutigkeit folgt aus den bisher verwendeten Axiomen, wenn wir den quasielliptischen Fall ausschließen. Wir können dann den Begriff der Halbdrehung einführen und hiermit den affinen Satz von Pappos-Pascal beweisen.

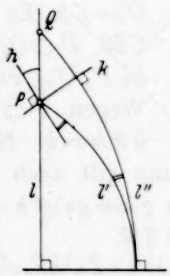


Fig. 15. *S 42.*

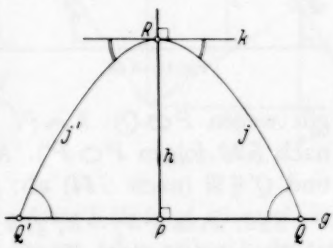


Fig. 16. *S 44.*

4.1. Folgerungen mit A 9.

S 44. Es ist $P \notin \mathfrak{R}$. (Die Punktspiegelung ist keine Nachbarbewegung.)

Sei $P = gh$. Nach *S 31* gibt es Q mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$. Ist $Q' = PQP \varnothing Q$, so sind wir fertig. Ist dagegen $Q' = PQP \bigcirc Q$ (Fig. 16), dann bestimmen wir R mit $R \mathrel{I} h$; $R \varnothing P$. Es gibt j mit $j \mathrel{I} Q, R$. Wegen $P \varnothing Q, R$ folgt aus *S 23* $j \not\frown g, h$. Für $j' = hjh$ und $Q' = PQP = hQh$ gilt $j' \mathrel{I} R, Q'$. Aus $Q \bigcirc Q'$; $Q \varnothing R$ (dies folgt aus *S 22* wegen $g \perp h$) folgt nach *S 22*: $j' = hjh \frown j$. Nach *A 9* folgt wegen $j \not\frown h$: $j \frown k = Rh$; $k \perp h$. Wir sind also für das Paar $Q; h$ im quasielliptischen Fall.

Nach *A 6* gibt es l mit $l \mathrel{I} R$; $l \not\frown h, k$ und damit auch $l \not\frown j$. Für m mit $m \perp l$; $m \mathrel{I} P$ folgt aus *S 25* $m \not\frown h$. Damit gilt für $S = lm$ wegen $R \varnothing P$: $S \varnothing R, P$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: (I) $m \frown g$. Es gibt n mit $n \mathrel{I} S$; $n \perp g$ und $T = ng$. Wegen *S 23* gilt $S \bigcirc T$, also $T \varnothing P$. Für p mit $p \mathrel{I} R, T$ gilt damit $p \frown l$, also $p \not\frown h, j$. Damit ist dann $T' = PTP \varnothing T$. Aus $T' \bigcirc T$ würde nämlich wie oben für Q folgen: $p \frown k \frown j$. (II) $m \not\frown g$. Es gibt n' mit $n' \perp h$; $n' \mathrel{I} S$. Wegen *S 18* folgt aus $l \not\frown k$; $m \not\frown g$: $n' \not\frown l, m$. Wegen $S \varnothing P, R$ folgt damit aus *S 22* $T' = n'h \varnothing R, P$. Es kann nun nicht zugleich $PRP \bigcirc R$ und $PT'P \bigcirc T'$ gelten; denn hieraus würde, wie aus dem Beweisgang hervorgeht, für p' mit $p' \mathrel{I} Q, T'$ folgen: $p' \not\frown h$, $p' \frown j$. Dies steht aber im Widerspruch zu $T' \varnothing R$.

S 45. Aus $g \bigcirc h$ folgt $gh \in \mathfrak{R}$ und umgekehrt.

(I) Aus $g \frown h$ folgt $gh \in \mathfrak{R}$. Denn zu einem Punkt P und zu einem Q mit $Q \mathrel{I} g, h$ gibt es j mit $j \mathrel{I} P, Q$. Nach *A 4* gibt es k mit $k = jgh$. Es gilt $j \frown k$. (Wäre nämlich $j \not\frown k$, so wäre nach *S 19*, da wir $j \perp k$ ausschließen können, Q der einzige Fixpunkt von $jk = gh$, was wegen $g \frown h$ offenbar falsch ist.) Hiermit folgt für $hgPgh = kjPjk = kPk$: $kPk \circ P$. Denn es gibt l mit $l \mathrel{I} P$; $l \perp k$ und $R = kl$. Wegen *S 23* ist $R \circ P$. Dann gilt auch $R \circ RPR = klPlk = kPk$, also $kPk \circ P$.

(II) Aus $g \circ h$ folgt $gh \in \mathfrak{R}$. Es gibt nämlich nach *S 28*; *S 31* P; Q mit $P \mathrel{I} g$; $Q \mathrel{I} h$; $P \varnothing Q$. Für j mit $j \mathrel{I} P, Q$ gilt nach *S 22* $j \frown g, h$. Wegen (I) ist $gj, jh \in \mathfrak{R}$, also auch $gh \in \mathfrak{R}$.

(III) Aus $g \varnothing h$ folgt $gh \notin \mathfrak{R}$. Denn nach Voraussetzung gibt es P mit $P \mathrel{I} g$ und j mit $j \mathrel{I} P$; $j \perp h$ und $Q = jh$ so, daß $P \varnothing Q$. Ist $hgPgh = hPh \varnothing P$, so sind wir fertig. Sei jetzt $hPh \circ P$. Nach *S 31* gibt es P' mit $P' \mathrel{I} g$; $P' \varnothing P$. Es gibt j' mit $j' \mathrel{I} P'$; $j' \perp h$ und $Q' = j'h$. Es ist $P \varnothing Q'$, da aus $P \circ Q'$ nach *S 22* $P \circ Q$ folgen würde. Es gibt k mit $k \mathrel{I} P, Q'$. Für $k' = hkh$ gilt $k' \mathrel{I} Q', hPh$. Wegen $P \circ h\,Ph$; $Q' \varnothing P$ folgt aus *S 22* $hkh \frown k$. Nach *A 9* folgt aus $k \not\frown h$ (dies gilt wegen $P \varnothing Q$): $k \frown j'$. Dann gilt auch $g \frown j'$ (aus $g \not\frown j'$; $k \frown j'$ würde nach *S 23* folgen $P \circ P'$). Aus $gh = gj'j'h = gj'Q'$ lesen wir wegen $gj' \in \mathfrak{R}$ und $Q' \notin \mathfrak{R}$ (nach *S 44*) ab: $gh \notin \mathfrak{R}$.

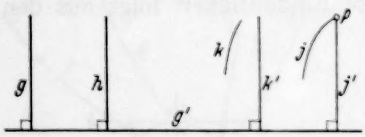


Fig. 17. *S 46.*

S 46. Aus $ghj = k$; $g, h \perp g'$; $g \varnothing h$ folgt $j \perp g'$. (Umkehrung von *A 5* [6].)

Es gibt (Fig. 17) P mit $P \mathrel{I} j$ und j' mit $j' \mathrel{I} P$; $j' \perp g'$. Nach *A 5* gibt es k' mit $k' = ghj'$; $k' \perp g'$. Wir unterscheiden drei Fälle:

(I) $j \not\frown j'$. Wegen *S 20* folgt dann aus $jj' = kk'$: $j, j', k, k' \mathrel{I} P$, und wegen $j \not\frown k$ (dies folgt aus $g \not\frown h$; *S 45*) folgt auch $g, h \mathrel{I} P$. Damit sind wir nach *S 39* im elliptischen Fall: $P = g'$, also $j \perp g'$.

(II) $j \frown j'$, aber $j \neq j'$. Zu $j'jk = k'$; $P \mathrel{I} j, j'$ gibt es nach *S 16* Q mit $Q \mathrel{I} k, k'$; $Q \in F(jj')$. Aus *S 14* folgt $Q \circ P$. Nach *S 31* gibt es P' mit $P' \mathrel{I} j$; $P' \varnothing P$. Es gibt j'' mit $j'' \perp g'$, $j'' \mathrel{I} P'$. Hiermit nach *A 5* $k'' = j''ghj''jk$. Entweder ist $j'' \not\frown j$, dann schließen wir wie unter (I). Oder es ist $j'' = j$, das ist die Behauptung. Oder es ist $j'' \frown j$; $j'' \neq j$. Dann gibt es wie oben ein Q' mit $Q' \mathrel{I} k, k''$; $Q' \circ P'$. Aus $j \mathrel{I} P, P''$; $k \mathrel{I} Q, Q'$; $P \varnothing P'$; $P \circ Q$; $P' \circ Q'$ folgt $j \circ k$; dies widerspricht aber nach *S 45* der Voraussetzung $g \varnothing h$.

(III) $j = j'$. Dies ist wegen $j' \perp g'$ die Behauptung.

4.2. Die Eindeutigkeit des Lotes. Halbdrehungen. A 17.

A 17. Aus $g, h \mathrel{I} P$; $g, h \perp j$ folgt $g = h$. (Eindeutigkeit des Lotes.)

S 47. Wenn $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch ist, dann folgt *A 17* aus den bisher benutzten Axiomen *A 1* bis *A 9*, *A 14* und *A 16*. Damit ist *A 17* insbesondere eine Folge von *A 1* bis *A 11*.

(I) Zu $Q = gl$; $P \mathrel{I} l$; $P \circ Q$ gibt es j; S mit $S \mathrel{I} g$; $j \mathrel{I} P, S$; $j \not\frown l, g$. — Wir wählen zum Beweis $k = Pl$; $k \perp l$. Nach *A 6* gibt es j mit $j \mathrel{I} P$; $j \not\frown l, k$.

Nach *A 16* gibt es S mit $S \mathrel{I} j, g$. Wegen *S 18* folgt aus $j \not\asymp k$: $j \not\asymp g$. *S 18* ist dabei eine Folge von *A 1* bis *A 5* und *A 14*.

(II) Es sei $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch. Die Annahme, es gibt $P; g; l; m$ mit $P \mathrel{I} l, m$; $l, m \perp g$; $l \neq m$ führt folgendermaßen auf einen Widerspruch (Fig. 18): Falls $P \mathrel{I} g$, dann folgt $l = m$ aus *S 3*. Sei also $P \nmid g$. Für $P' = g P g$ gilt $P' \mathrel{I} l, m$. Wegen $l \neq m$ ist $P \bigcirc P'$. Sei $Q = g l$. Es gibt R mit $R \mathrel{I} g$; $R \oslash Q$. Wegen *S 22* gilt auch $R \oslash P$. Es gibt h mit $h \mathrel{I} P, R$. Es ist $h' = g h g \mathrel{I} R, P'$. Wegen $P \bigcirc P'$; $R \oslash P$ folgt aus *S 22* $h' = g h g \bigcirc h$. Aus *A 9* folgt, da der fastelliptische Fall ausgeschlossen ist: $g \bigcirc h$, also $P \bigcirc Q$. Nach (I) gibt es j; S mit $S \mathrel{I} g, j$; $j \mathrel{I} P$; $j \not\asymp l, g$. Für $j' = g j g$ ist $j' \mathrel{I} S, P'$. Es ist $j \not\asymp j'$; denn aus $j \frown j'$ würde nach *A 9* folgen, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen

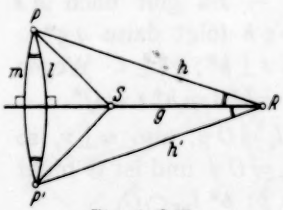


Fig. 18. *S 47.*

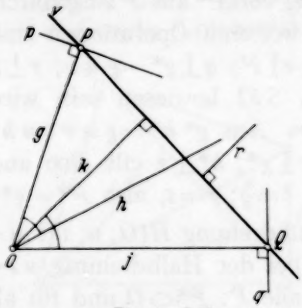


Fig. 19. *S 48.*

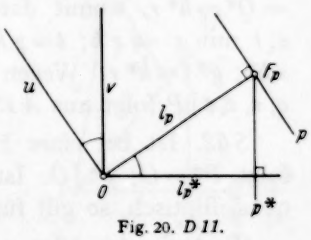


Fig. 20. *D 11.*

ist, $j \frown g$. Aus $j \not\asymp j'$ folgt nach *S 21* $S \in F(l\,m)$. Aus *S 15* folgt $Q = g\,l \mathrel{I} m$, oder $g\,l\,m = m\,g\,l = g\,m\,l$; $l\,m = m\,l$ und wegen $l \neq m$: $l \perp m$. Das bedeutet aber den elliptischen Fall, den wir ausgeschlossen hatten.

(III) *A 14* und *A 16* und die Forderung: $\mathfrak{G}$ ist nicht quasielliptisch folgen aus *A 1* bis *A 11*. Dies besagen *S 8*, *S 41* und *S 43*.

S 48. Es gelte: $g, h, j \mathrel{I} O$; $p \perp g$; $q \perp j$; $v \mathrel{I} P = p\,g$; $v \perp k = g\,h\,j$. Aus $v \mathrel{I} Q = q\,j$ folgt, daß es r mit $r = p\,h\,q$ gibt und umgekehrt. (Lotensatz.) (Fig. 19.)

(I) Es gelte unter den angegebenen Voraussetzungen $v \mathrel{I} Q = q\,j$. Es gibt $g'; j'$ mit $g' = P\,v = g\,p\,v$; $j' = Q\,v = j\,q\,v$; $g', j' \perp v$. Damit wird $p\,h\,q = v\,g'\,g\,h\,j\,j'\,v = v\,g'\,k\,j'\,v = g'\,k\,j'$ wegen $g', k, j' \perp v$ eine Gerade r.

(II) Sei umgekehrt $p\,h\,q = r$. Es gibt $g'; j'; v'$ mit $g' = P\,v = g\,p\,v$; $j' \perp v$; $j' \mathrel{I} Q = j\,q$; $v' = j'\,j\,q = j'\,Q$; $v' \perp j'$. Nach *A 5* und *S 5* gibt es zu $g', k, j' \perp v$ ein l mit $l = g'(g\,h\,j)\,j'$; $l \perp v$. Sei $l\,v = R$. Damit ist $r = p\,h\,q = v\,g'\,g\,h\,j\,j'\,v' = v\,l\,v' = R\,v'$. Es gilt also $v' \mathrel{I} R$. Aus $R \mathrel{I} v, v'$; $v, v' \perp j'$ folgt nach *A 17* $v = v'$, also $Q \mathrel{I} v$.

D 11. Es seien $O; u; v$ mit $u, v \mathrel{I} O$ gegeben. Unter einer durch $O; u; v$ bestimmten *Halbdrehung* $H \equiv H(O; u; v)$ verstehen wir die folgende Abbildung der Punkte und Geraden von $\mathfrak{G}$ auf sich (Fig. 20): Zu p gibt es l_p mit $l_p \mathrel{I} O$; $l_p \perp p$ und hiermit $F_p = p\,l_p$. Dann ordnen wir der Geraden p das Bild p^* zu durch $p^* \mathrel{I} F_p$; $p \perp l_p^*$; $l_p^* = l_p\,u\,v$. Dem Punkt P ordnen wir das Bild P^* zu durch $P^* = q\,g^*$, wo $g \mathrel{I} O, P$; $q \mathrel{I} P$; $q \perp g^* = g\,u\,v$ ist[14]).

Die Abbildung der Bildelemente bei H auf die Urbilder bezeichnen wir als *inverse Halbdrehung* H^{-1}.

S49. Aus $p \mathrel{I} O$ folgt $p^* = p\,u\,v$.

Denn aus $p \mathrel{I} O$ folgt $l_p = p\,O$; $F_p = O$. Damit wird $p^* = O\,l_p^* = O\,l_p\,u\,v = p\,u\,v$.

S50. Es ist $l_p^* = l_{p^*}$.

Nach *D11* ist $l_p^* \perp p^*$; $l_p^* \mathrel{I} O$. l_{p^*} bedeutet $l_{p^*} \perp p^*$; $l_{p^*} \mathrel{I} O$. Aus *A17* folgt die Behauptung.

S51. Aus $p = q$ folgt $p^* = q^*$; aus $P = Q$ folgt $P^* = Q^*$.

(I) Die erste Behauptung ergibt sich aus *D11*, da bei der Bestimmung von p^* aus p nur eindeutige Operationen angewandt werden.

(II) Bei der Bestimmung von P^* aus P ist g durch $g \mathrel{I} O$, P nicht notwendig eindeutig festgelegt. Die weiteren Operationen sind wieder eindeutig. Wir zeigen: Aus $g, h \mathrel{I} O, P$; $q, r \mathrel{I} P$; $q \perp g^* = g\,u\,v$; $r \perp h^* = h\,u\,v$ folgt $P^* = g^*\,q = Q^* = h^*\,r$, womit dann *S51* bewiesen sein wird. — Es gibt nach *A4* $s; t$ mit $s = q\,g\,h$; $t = g\,h\,r$. Aus $g^*\,h^* = g\,u\,v\,v\,u\,h = g\,h$ folgt dann $q\,g^* = s\,h^*$; $g^*\,t = h^*\,r$. Wegen $q \perp g^*$; $h^* \perp r$ gilt also auch $s \perp h^*$; $g^* \perp t$. Wegen $q, r, s, t \mathrel{I} P$ folgt aus *A17*: $t = q$; $r = s$, also $P^* = g^*\,q = h^*\,s = h^*\,r = Q^*$.

S52. Ist bei einer Halbdrehung $H(O; u; v)$: $u = l_v = O\,v$, also $u \perp v$, so folgt $P^* = O$; $p^* \mathrel{I} O$. Ist bei der Halbdrehung $u \curvearrowright l_v = O\,v$ und ist $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch, so gilt für alle P: $P^* \bigcirc O$ und für alle p: $p^*\,l_{p^*} \bigcirc O$.

(I) Aus $u \perp v$ oder $u\,v = O$ folgt gemäß *D11* $l_p^* = l_p\,O$ oder $l_p^* \perp l_p$. Aus $p^*, l_p \mathrel{I} F_p$; $p^*, l_p \perp l_{p^*}$ folgt nach *A17* $p^* = l_p$, also $p^* \mathrel{I} O$. Ebenso folgt $P^* = O$.

(II) Aus $u \curvearrowright O\,v$; $l_p\,l_p^* = u\,v$ folgt nach *S45* $l_p^*\,O \curvearrowright l_p$. Damit ist auch $p^* \curvearrowright l_p$; denn andernfalls würde das Paar F_p; l_p^* einer quasielliptischen Ebene angehören, was wir ausgeschlossen haben. Mit $p^* \curvearrowright l_p$ folgt nach *S23* $O \bigcirc l_p^*\,p^*$. Da wir jedes P als ein F_p mit einem geeigneten p auffassen können, folgt durch dieselben Überlegungen auch $P^* \bigcirc O$.

D12. Eine Halbdrehung $H(O; u; v)$ heißt *singulär*, wenn $u \curvearrowright l_p = O\,v$ ist. Eine nichtsinguläre Halbdrehung heißt auch *regulär*.

S53. Wenn $H(O; u; v)$ regulär ist, folgt aus $p \neq q$ auch $p^* \neq q^*$ und aus $P \neq Q$ auch $P^* \neq Q^*$.

(I) Aus $p \neq q$ folgt $p^* \neq q^*$. (a) Es sei $l_p \neq l_q$. Dann ist auch $l_p^* \neq l_q^*$ oder nach *S50* $l_{p^*} \neq l_{q^*}$. Aus *A17* folgt dann $p^* \neq q^*$. (b) Es sei $l_p = l_q = l$ (Fig. 21). Mit $p \neq q$ ist auch $l\,p = F_p \neq l\,q = F_q$. $p^* = q^*$ führt auf einen Widerspruch: Es würde $p^* = q^* \mathrel{I} F_p, F_q$ folgen, also $p^* = q^* \curvearrowright l$. Nach *S18* würde damit $l \curvearrowright O\,l^* = O\,v\,u\,l$ oder $O\,v\,u \subset \mathfrak{N}$ gelten, während $O\,v\,u \notin \mathfrak{N}$ vorausgesetzt war.

(II) Aus $P \neq Q$ folgt $P^* \neq Q^*$. (a) Aus $P \neq O$ folgt $P^* \neq O^* = O$. Wäre nämlich $P^* = O$, so würde $g \curvearrowright q$ folgen und wegen $O = P^* = q\,g^* = q\,g\,u\,v$: $O\,v \curvearrowright u$. (b) Aus $P \neq Q$; $P, Q \neq O$ folgt $P^* \neq Q^*$. Wir unterscheiden zwei Fälle: (b a) Es gibt $g; h$ mit $g \mathrel{I} O, P$; $h \mathrel{I} O, Q$; $h \nmid P$. Aus $P^* = Q^*$ folgt dann $h \mathrel{I} P$, also ein Widerspruch. Denn nach *D11* sei $P^* = q\,g^*$; $Q^* = r\,h^*$; $q \mathrel{I} P$; $r \mathrel{I} Q$. Wegen $q, g^*, h^* \mathrel{I} P^* = Q^*$ ist $q\,g^*\,h^* = q\,g\,h$ eine Gerade. Wegen $u \not\curvearrowright O\,v$ ist $q \not\curvearrowright g$ und damit nach *S20* mit $q, g \mathrel{I} P$: $h \mathrel{I} P$. (b b) Es gibt g mit $g \mathrel{I} O, P, Q$.

Die Annahme $P^* = Q^*$ führt auf einen Widerspruch: Denn mit der oben eingeführten Bezeichnung folgt aus $P^* = Q^*$: $q\,g^* = r\,g^*$, also $q = r$; $q \mathrel{I} P, Q$. Wegen $P \neq Q$ heißt dies $q \curvearrowright g$. Dies führt aber wegen *S 18* auf $u \curvearrowright O\,v$.

S 54. Aus $g \mathrel{I} O$; $p \perp g$ folgt $g^* \mathrel{I} O$; $p^* \perp g^*$ und umgekehrt.

Aus $g \mathrel{I} O$; $p \perp g$ folgt $g^* = g\,u\,v \mathrel{I} O$ gemäß *S 4*; nach *A 17* ist $g = l_p$, also $g^* = l_p^* = l_{p^*} \perp p^*$. Gilt umgekehrt $g^* \mathrel{I} O$; $p^* \perp g^*$, so folgt $g = g^*\,v\,u \mathrel{I} O$ aus *S 4*. Damit ist $l_p^* = g^*$; $l_p = g$, also $g \perp p$.

S 55. Aus $P \mathrel{I} p$ folgt $P^* \mathrel{I} p^*$. Ist die Halbdrehung regulär, so folgt aus $P^* \mathrel{I} p^*$: $P \mathrel{I} p$.

Wir wenden den Lotensatz *S 48* an (Fig. 22): Es gilt $l_p, g, g^* \mathrel{I} O$; $p \perp l_p$; $q \perp g^*$; $p^* \mathrel{I} F_p = l_p\,p$; $p^* \perp l_p\,g\,g^*$; $l_p\,u\,v = l_p^* = l_{p^*}$. Dann ist $p^* \mathrel{I} P^* = g^*\,q$ äquivalent mit: $p\,g\,q$ ist eine Gerade (Lotensatz). Es gilt noch $P \mathrel{I} g, q$. —

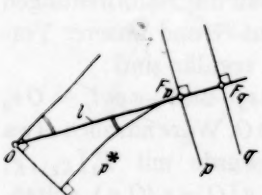


Fig. 21. *S 53.*

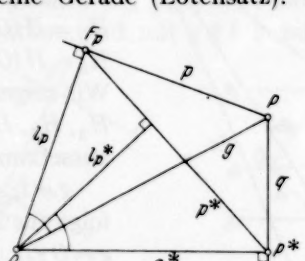


Fig. 22. *S 55.*

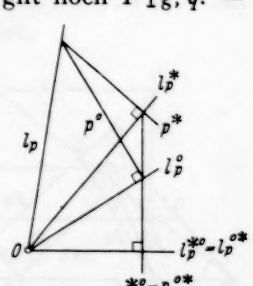


Fig. 23. *S 56.*

Wenn nun $P \mathrel{I} p$, dann ist wegen $p, g, q \mathrel{I} P$ nach *A 4* $p\,g\,q$ eine Gerade, es gilt also $P^* \mathrel{I} p^*$. Wenn umgekehrt $p^* \mathrel{I} P^*$, also $p\,g\,q$ eine Gerade ist, so folgt bei regulärer Halbdrehung, d.h. $g \curvearrowright q$: $p \mathrel{I} P$ nach *S 20*.

S 56. Wir betrachten die Menge der Halbdrehungen und der regulären inversen Halbdrehungen. Je zwei dieser Abbildungen sind vertauschbar.

(I) Es seien beide Halbdrehungen direkt (Fig. 23). Wir bezeichnen die Bilder von $P; p$ bei diesen Abbildungen mit $P^*; p^*$ und $P^\circ; p^\circ$. Wir zeigen: $P^{*\circ} = P^{\circ *}$; $p^{*\circ} = p^{\circ *}$. Dies folgt mit *S 48*: Es ist $l_p^*, l_p, l_p^\circ \mathrel{I} O$; $l_p^* \perp p^*$; $l_p^\circ \perp p^\circ$; $p^{*\circ} \mathrel{I} F_p^* = l_p^*\,p^*$; $p^{*\circ} \perp l_p^{*\circ} = (l_p\,u\,v)\,u^\circ\,v^\circ = l_p^*\,l_p\,l_p^\circ$. Wegen l_p, p^*, $p^\circ \mathrel{I} F_p = l_p\,p$ folgt aus *S 48* $p^{*\circ} \mathrel{I} F_p^\circ = l_p^\circ\,p^\circ$. Es gilt $l_p^{*\circ} = l_p^*\,l_p\,l_p^\circ = l_p^{\circ *}$. Aus $p^{*\circ}, p^{\circ *} \perp l_p^{*\circ} = l_p^{\circ *}$; $p^{*\circ}, p^{\circ *} \mathrel{I} F_p^\circ$ folgt nach *A 17* $p^{*\circ} = p^{\circ *}$. Damit ist auch $F_p^{*\circ} = F_p^{\circ *}$. Da sich jedes P in der Form $P = F_p = p\,l_p$ schreiben läßt mit $l_p \mathrel{I} O$, P, gilt damit auch $P^{*\circ} = P^{\circ *}$.

(II)[15]. Wir betrachten eine direkte und eine inverse reguläre Halbdrehung H_1 und H_2^{-1}. Nach *S 51*, *S 53* handelt es sich um eineindeutige Abbildungen. Damit gilt, wegen (I): $H_1 H_2^{-1} = H_2^{-1} H_2 H_1 H_2^{-1} = H_2^{-1} H_1 H_2 H_2^{-1} = H_2^{-1} H_1$.

(III)[15]. Wir betrachten zwei inverse reguläre Halbdrehungen H_1^{-1}, H_2^{-1}. Es gilt, ähnlich wie unter (II): $H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} H_1 H_2 H_2^{-1} H_1^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} H_2 H_1 H_2^{-1} H_1^{-1} = H_2^{-1} H_1^{-1}$.

[15]) Beweis nach einer Mitteilung von R. Guse.

S 57. Es sei $\mathfrak{G}$ nicht quasielliptisch und es mögen *A 1* bis *A 9*; *A 14*; *A 17* gelten. Diese Voraussetzungen sind insbesondere erfüllt, wenn für $\mathfrak{G}$ die Axiome *A 1* bis *A 11* gelten. Dann gilt der Satz von PAPPOS-PASCAL in folgender Formulierung (Fig. 24):

Aus $g, g', r_i \mathrel{I} O$; $g \nparallel g'$; $P_i \mathrel{I} g$; $P_i' \mathrel{I} g'$; $r_l \perp g_{ik}, g_{ki}$ (i, k, l eine Permutation von 1, 2, 3); $g_{13} \mathrel{I} P_1, P_3'$; $g_{31} \mathrel{I} P_3, P_1'$; $g_{23} \mathrel{I} P_2, P_3'$; $g_{32} \mathrel{I} P_3, P_2'$; $g_{21} \mathrel{I} P_2, P_1'$; $g_{12} \mathrel{I} P_2'$; $P_1' \not\mathrel{I} O$; $g_{23} \nparallel g'$ folgt $g_{12} \mathrel{I} P_1$.

Beweis[16]). Daß die genannten Voraussetzungen eine Folge von *A 1* bis *A 11* sind, folgt aus *S 8*, *S 41*, *S 43*, *S 47*. Den Beweis des Satzes von PAPPOS-PASCAL führen wir unter Verwendung von Halbdrehungen: Es seien $H_1 = H(O; g'; r_3)$; $H_2 = H(O; g; r_3)$; $H_3 = H(O; g; r_1)$; $H_4 = H(O; g'; r_1)$; $H_5 = H(O; g'; r_2)$; $H_6 = H(O; g; r_2)$. Wir zeigen, daß die Halbdrehungen H_2, H_4, H_6 auf Grund unserer Voraussetzungen regulär sind:

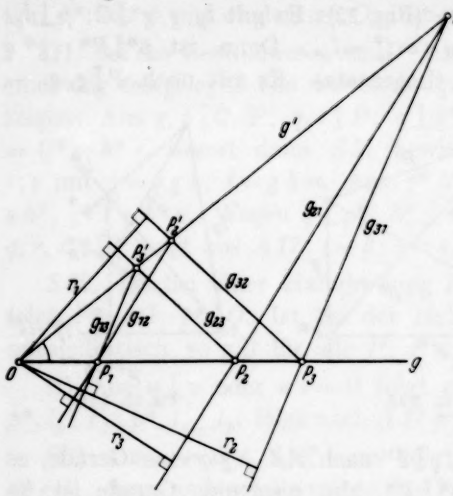


Fig. 24. *S 57.*

$g \nparallel l_{r_3} = O r_3$ und $g \nparallel l_{r_2} = O r_2$ folgt aus $P_1' \not\mathrel{I} O$. Wäre nämlich etwa $g \frown O r_3$, so würde mit $P_2 \mathrel{I} g_{21}, g$; $r_3 \perp g_{21}, O r_3$; $g \mathrel{I} O = r_3 (O r_3)$ gelten, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen ist: $g_{21} \frown g$. Hiermit und mit $g \nparallel g'$ würde nach *S 24* folgen: $O \circ P_1'$, entgegen der Voraussetzung. Also ist $g \nparallel O r_3$. Ebenso folgt $g \nparallel O r_2$.

$g' \frown O r_1$ endlich würde, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen ist, $g' \frown g_{23}$ zur Folge haben, entgegen der Voraussetzung.

Durch die Folge der Halbdrehungen $H^* = H_1 H_2^{-1} H_3 H_4^{-1} H_5 H_6^{-1}$ wird P_1' in P_1 übergeführt. Dasselbe wird, da wir *S 56* anwenden können, durch die Folge $H^{**} = H_5 H_6^{-1} H_3 H_4^{-1} H_1 H_2^{-1}$ geleistet. Durch H^{**} wird P_1' nacheinander in P_3, P_2' und P_1 übergeführt. Dies bedeutet, daß P_1 mit der wegen *A 17* durch $g_{12} \mathrel{I} P_2'$; $g_{12} \perp r_3$ eindeutig bestimmten Geraden g_{12} inzidiert, w. z. b. w.

5. Die euklidische Ebene mit Nachbarelementen. Folgerungen mit A 10 und A 11.

Wir erklären die Relation „parallel" für zwei Geraden durch die Eigenschaft, daß die Geraden zwei nichtbenachbarte Lote gemeinsam haben sollen. Zwei parallele Geraden haben dann alle Lote gemeinsam, die Relation „parallel" wird transitiv. Es gilt der affine kleine Satz von DESARGUES. *A 10* hat zur Folge, daß für ein Viereck, in dem die Seiten in drei Ecken orthogonal sind, auch im vierten Eckpunkt die Seiten orthogonal werden.

[16]) Vgl. J. HJELMSLEV[1]) 5. Mitt. S. 30.

Damit gibt es dann durch einen Punkt zu einer Geraden genau eine Parallele. Auf Grund von *A 11* hat eine Gerade, die eine von zwei Parallelen eindeutig schneidet, auch mit der anderen einen Schnittpunkt. Hiermit bilden dann unsere Punkte und Geraden eine affine Ebene mit Nachbarelementen, wie wir sie an anderer Stelle eingeführt haben. Wegen der Gültigkeit des Satzes von PAPPOS-PASCAL und des kleinen Satzes von DESARGUES können wir unsere Ebene als affine Ebene über einem H-Ring beschreiben. Für diesen Ring gilt auf Grund der Eigenschaften der Orthogonalitätsrelation, daß 2 nicht Nullteiler ist und eine Form $u^2 + k\,v^2$ existiert, die nur für den Fall, daß u und v beide Nullteiler sind, einen Nullteiler darstellt.

5.1. Eigenschaften der Relation „parallel".

D 13. Die Relation „*g parallel h*", $g \parallel h$, ist erfüllt, wenn es $j; k$ gibt mit $j, k \perp g, h$; $j \varnothing k$. Die Negation wird mit $g \nparallel h$ bezeichnet.

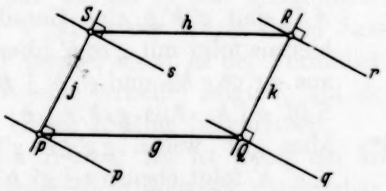


Fig. 25. *S 61.*

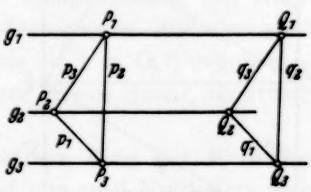


Fig. 26. *S 63.*

S 58. Aus $g \parallel h$; $l \perp g$ folgt $l \perp h$.

Es gibt $j; k$ mit $j, k \perp g, h$; $j \varnothing k$. Nach *A 5* ist $j\,k\,l$ eine Gerade. Nach *S 46* folgt wegen $j, k \perp h$; $j \varnothing k$: $l \perp h$.

S 59. Aus $g \parallel h$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} h, j$; $g \not\frown j$ folgt $h \not\frown j$.

Nach *S 58* gilt für $l = P\,g$: $l \perp g, h$. Wäre $h \frown j$, so würde nach *S 18* folgen $g \frown j$.

S 60. Aus $g \parallel h$; $h \parallel j$ folgt $g \parallel j$.

Es gibt j', k' mit $j', k' \perp g, h$; $j' \varnothing k'$. Nach *S 58* gilt auch $j', k' \perp j$, also $g \parallel j$.

S 61. Aus $P\,Q\,R = S$; $g \mathrel{I} P, Q$; $k \mathrel{I} Q, R$; $j \mathrel{I} P$; $j \parallel k$; $h \mathrel{I} R$; $h \parallel g$ folgt $j, h \mathrel{I} S$ (Fig. 25).

Wir bestimmen $p; q; r$ durch $p = j\,P$; $q = Q\,k$; $r = k\,R$ mit $p, q, r \perp j, k$. Damit wird nach *A 5* $p\,q\,r$ eine Gerade s mit $s \perp j, k$. Hiermit ist $P\,Q\,R = j\,p\,q\,k\,k\,r = j\,p\,q\,r = j\,s = S$, also $S \mathrel{I} j$. Ebenso folgt $S \mathrel{I} h$.

S 62. Aus $g \parallel h$; $j \parallel k$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} k, g$; $R \mathrel{I} h, k$; $S \mathrel{I} j, h$; $g \not\frown j$ folgt $P\,Q\,R = S$.

Wir setzen $P\,j = p$; $Q\,k = q$; $R\,k = r$ mit $p, q, r \perp j, k$. Damit gibt es s mit $s = p\,q\,r$; $s \perp j, k$. Damit wird $P\,Q\,R = j\,p\,q\,r = j\,s = S'$; $S' \mathrel{I} j$. Ebenso erschließt man mit $P\,g = p'$; $Q\,g = q'$; $R\,h = r'$ und $p'\,q'\,r' = s'$; $s' \perp g, h$: $P\,Q\,R = s'\,h = S'$, also $S' \mathrel{I} h$. Mit $g \not\frown j$ gilt nach *S 59* auch $h \not\frown j$, also $S' = S$.

S 63. Es gilt der affine kleine Satz von DESARGUES in der Form (Fig. 26): Aus $P_i, Q_i \mathrel{I} g_i$; $p_i \parallel q_i$; $P_i, P_k \mathrel{I} p_l$ (i, k, l eine Permutation von $1, 2, 3$); $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$; $q_1 \mathrel{I} Q_2, Q_3$; $q_3 \mathrel{I} Q_1, Q_2$; $q_2 \mathrel{I} Q_1$; $p_1, p_3 \not\frown g_2$; $P_1 \varnothing P_3$ folgt $q_2 \mathrel{I} Q_3$.

Denn wegen *S 62* ist $P_1 Q_1 = P_2 Q_2$; $P_2 Q_2 = P_3 Q_3$, als $P_1 Q_1 = P_3 Q_3$, woraus nach *S 61* die Behauptung folgt.

5.2. Der Satz vom Rechteck. Folgerungen aus A10.

S64. Aus $P\,Q\,R = S$; $g \mathrel{I} P, Q$; $h \mathrel{I} R, S$; $P \varnothing Q$ folgt $g \parallel h$.

Es gibt $p; q$ und $r; s$ mit $p = P\,g$; $q = Q\,g$; $p, q \perp g$ und $r = R\,h$; $s = S\,h$; $r, s \perp h$. Hiermit wird aus $P\,Q\,R = S$: $p\,q\,r = s$. Mit $P \varnothing Q$ ist auch $p \varnothing q$, und damit folgt aus *S46* $r, s \perp g$. Wegen $p \varnothing q$ ist auch $r \varnothing s$, also $g \parallel h$.

S65. Aus *A10* folgt: Aus $r \perp p, q$; $s \perp p$ folgt $s \perp q$, also $p \parallel q$. (Satz vom Rechteck: In einem Viereck mit drei „rechten Winkeln" ist auch der vierte ein „rechter").

(I) Wir sagen, daß die Elemente $g; h; g'; h'$ ein ordinäres Rechteck bilden, wenn sie die in *A10* angegebenen Eigenschaften haben. Wir zeigen: *S65* ist richtig, wenn es ein ordinäres Rechteck $g; h; g'; h'$ gibt mit $g \perp p$. Beweis: Aus $g', h', p \perp g$ folgt nach *A5*, daß $g'\,h'\,p$ eine Gerade ist; hieraus folgt mit $g' \varnothing h'$ (dies folgt aus $g\,g' \varnothing g\,h'$) und $g', h' \perp h$ nach *S46* $p \perp h$. Aus $g, h, r \perp p$; $g \varnothing h$ (dies gilt wegen $g\,g' \varnothing h\,g'$); $g, h \perp g', h'$ folgt ebenso $r \perp g', h'$. Aus $g, h, s \perp p$; $g \varnothing h$; $g, h \perp g', h'$ folgt ebenso $s \perp g', h'$. Aus $g', h', q \perp r$; $g' \varnothing h'$; $g', h' \perp s$ folgt endlich $s \perp q$.

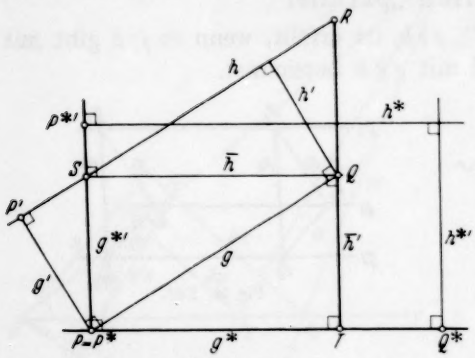


Fig. 27. *S65.*

(II) Wir bezeichnen[17]) (Fig. 27) die Elemente des nach *A10* existierenden ordinären Rechtecks mit $g^*, h^*, g^{*\prime}$; $h^{*\prime}$; $P^* = g^*\,g^{*\prime}$; $Q^* = g^*\,h^{*\prime}$; $P^{*\prime} = g^{*\prime}\,h^*$. Wir müssen nun noch zeigen, daß es zu jedem $g \mathrel{I} P^*$ ein ordinäres Rechteck mit g als Seite gibt. Sei $P = P^*$. Es gibt Q mit $Q \mathrel{I} g$; $Q \varnothing P$. Es gibt $\bar{h}; \bar{h}'$ mit $\bar{h}, \bar{h}' \mathrel{I} Q$; $\bar{h} \perp g^{*\prime}$; $\bar{h}' \perp g^*$. Nach (I) ist dann $\bar{h} \perp \bar{h}'$; $Q = \bar{h}\,\bar{h}'$. Sei $S = g^{*\prime}\,\bar{h}$; $T = g^*\,\bar{h}'$. Nach *S62* ist $P\,T\,Q = S$. Sei $R = Q\,T\,Q$. Aus $P\,Q\,R = S$ und h mit $h \mathrel{I} R, S$ folgt nach *S64* $h \parallel g$. Für $g' = P\,g$; $h' = Q\,g$ gilt also $g', h' \perp g, h$. Wenn $P' = g'\,h \varnothing P$ gilt, sind wir fertig. Wenn dagegen $P' \bigcirc P$, also $g \bigcirc h$, so heißt dies $g \curvearrowright g^*$ oder $g \curvearrowright g^{*\prime}$. Wir konstruieren daher zunächst zu g° mit $g^\circ \mathrel{I} P$; $g^\circ \not\curvearrowright g^*, g^{*\,\circ}$ ein ordinäres Rechteck. Bezogen auf dies Rechteck erschließen wir dann auch für g die Existenz eines ordinären Rechtecks.

S66. Zu $P; g$ gibt es genau ein h mit $h \mathrel{I} P$; $h \parallel g$.

Sei j das Lot von P auf g und $h = P\,j$. Nach *S65* ist $h \parallel g$. Die Eindeutigkeit folgt aus *A2*.

5.3. Die affine Inzidenzebene mit Nachbarelementen.

S67. Die Punkte und Geraden von $\mathfrak{G}$ bilden mit den Relationen „inzident" und „parallel" eine affine Inzidenzebene mit Nachbarelementen, wie sie in

[17]) Beweis nach einer Anregung von G. EHLERS.

einer anderen Arbeit[5]) durch die dort in *S 3.6* aufgeführten Eigenschaften definiert wurde.

Wir zeigen, daß die a. a. O. unter *S 3.6* zusammengestellten Eigenschaften gelten: (a) Zu $P; Q$ gibt es g mit $g \mathrel{I} P, Q$. Dies folgt aus *A 1*. (b) Es gibt drei nichtbenachbarte Punkte, deren Verbindungsgeraden nicht Schmieggeraden sind. Dies folgt aus *A 10*, *S 23*. (c) Zu g gibt es $P; Q$ mit $P, Q \mathrel{I} g$; $P \not\bigcirc Q$. Dies folgt aus *S 32*. (d) Aus $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. Dies folgt aus *S 28*. (e) Aus $g \bigcirc h$; $h \bigcirc j$ folgt $g \bigcirc j$. Dies folgt aus *S 33*. (f) Aus $P \bigcirc Q$; $g \mathrel{I} P, R$; $h \mathrel{I} Q, R$; $g \not\bigcirc h$ folgt $R \bigcirc P, Q$. Dies folgt aus *S 22*.

(g) Aus $g \bigcirc h$; $P \mathrel{I} g, j$; $Q \mathrel{I} h, j$; $j \not\bigcirc g$ folgt $P \bigcirc Q$. Dies folgt mit *D 7* aus *S 22*. (h) Aus $g \parallel h$; $h \parallel j$ folgt $g \parallel j$. Dies folgt aus *S 60*. (i) Zu $g \parallel h$; $P \mathrel{I} g, j$; $j \not\bigcirc g$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} h, j$; $j \not\bigcirc h$. Dies folgt aus *S 58*, *A 11* und *S 59*. (j) Zu $P; g$ gibt es genau ein h mit $h \parallel g, h \mathrel{I} P$. Dies folgt aus *S 66*.

S 68. In der in *S 67* genannten affinen Inzidenzebene mit Nachbarelementen gelten der affine kleine Satz von DESARGUES und der affine Satz von PAPPOS-PASCAL in der Formulierung, wie sie a. a. O.[5]) gegeben ist. Wie wir in jener Arbeit[5]) zeigten, läßt sich unsere Ebene damit als affine Ebene über einem H-Ring beschreiben.

Ein *H-Ring* $\boldsymbol{R}_H$ ist dabei ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und von zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt. Die Punkte $P \in \mathfrak{G}$ sind damit eineindeutig den geordneten Elementpaaren $(x; y)$ von $\boldsymbol{R}_H$ zugeordnet, und die Geraden $g \in \mathfrak{G}$ sind eineindeutig den homogenen (d.h. bis auf einen Nichtnullteilerfaktor festgelegten) geordneten Elementtripeln $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ zugeordnet, wobei $\boldsymbol{N}$ die Menge der Nullteiler in $\boldsymbol{R}_H$ bezeichnet. $P \mathrel{I} g$ wird durch $u\,x + v\,y + w = 0$ beschrieben.

$P \bigcirc Q$ gilt, wenn $(x; y)$ und $(x'; y')$ die zugehörigen Koordinaten sind, genau dann, wenn $x - x', y - y' \in \boldsymbol{N}$ ist. Sind $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ die Koordinaten von g und g', so gilt $g \bigcirc g'$ genau dann, wenn $v\,w' - w\,v'$, $w\,u' - u\,w'$, $u\,v' - v\,u' \in \boldsymbol{N}$ ist. $g \parallel g'$ gilt genau dann, wenn $u\,v' - v\,u' = 0$ ist.

All dies besagen die a. a. O.[5]) durchgeführten Untersuchungen.

5.4. Spezielle Eigenschaften des H-Rings[18]).

S 69. Die Punkte $P_0; P_a; P_b$ mögen die Koordinaten $(0; 0); (a; 0); (b; 0)$ haben und P_{a+b} die Koordinaten $(a + b; 0)$. Dann gilt $P_{a+b} = P_a\,P_0\,P_b$. Umgekehrt folgt aus $P' = P_a\,P_0\,P_b$, daß P' die Koordinaten $(a + b; 0)$ hat.

Es seien $P_1'; P_b^*$ die Punkte mit den Koordinaten $(0; 1); (b; 1)$. Mit *S 62* folgt dann leicht $P_0\,P_b = P_1'\,P_b^*$ und $P_1'\,P_b^* = P_a\,P_{a+b}$, also $P_{a+b} = P_a\,P_0\,P_b$. Die Umkehrung folgt mit *S 61*.

S 70. Für $2 \in \boldsymbol{R}_H$ gilt $2 \notin \boldsymbol{N}$.

Wegen *S 68*, *S 69* würde $2 \in \boldsymbol{N}$ bedeuten, wenn P_0, P_1, P_2 bzw. die Koordinaten $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ haben: $P_0 \bigcirc P_2 = P_1\,P_0\,P_1$ mit $P_1 \not\bigcirc P_0$. Es gibt g mit $g \mathrel{I} P_0, P_1$ und $h = g\,P_1$; $h \perp g$. Es gibt Q mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \not\bigcirc P_1$ und j mit

[18]) Vgl. F. BACHMANN, Grundlagen der Geometrie[3]).

$j \mathrel{I} Q$, P_0. Es ist $Q \varnothing P_0$. Für $j' = h\,j\,h$ gilt $j' \mathrel{I} Q$, $P_2 = h\,P_0\,h$. Aus $P_0 \bigcirc P_2$ würde mit *S 22* folgen $j' = h\,j\,h \bigcirc j$ und hieraus, da der quasielliptische Fall ausgeschlossen ist, nach *A 9* $j \curvearrowright h$, was im Widerspruch steht zu $P_0 \varnothing P_1$.

S 71. Wir wählen als Achsen unseres Bezugssystems in der Ebene zwei orthogonale Geraden $g; g'$. Durch $(0; 1; 0)$ und $(1; 0; 0)$ sollen also orthogonale Geraden repräsentiert werden. P und Q mögen die Koordinaten $(a; b)$ und $(c; d)$ haben. Dann hat $P^* = Q\,P\,Q$ die Koordinaten $(a^*; b^*) = (2c - a;\ 2d - b)$.

Zum Beweis betrachten wir $g_a; g_c; g_{a^*}$ mit $g_a, g_c, g_{a^*} \perp g$; $g_a \mathrel{I} P$; $g_c \mathrel{I} Q$; $g_{a^*} \mathrel{I} P^*$. (I) Es ist für g_a^* mit $g_a^* = g_c\,g_a\,g_c$: $g_a^* = Q\,g_a\,Q$. Dazu beschreiben wir Q in der Form $Q = h\,g_c$. Mit *S 65* ist dann $h \perp g_a$, woraus die Behauptung folgt. (II) Es gilt $g_a^* \mathrel{I} P^*$; $g_a^* \perp g$. Das folgt aus *S 12* und *S 5*. Wegen *A 17* gilt damit $g_a^* = g_{a^*}$. Die Punkte $P_a = g\,g_a$; $P_c = g\,g_c$; $P_{a^*} = g\,g_{a^*}$ haben die Koordinaten $(a; 0)$; $(c; 0)$; $(a^*; 0)$. Es ist $P_{a^*} = P_c\,P_a\,P_c = P_c(P_a\,P_c\,P_0)\,P_0 = P_c(P_0\,P_c\,P_a)\,P_0 = (P_c\,P_0\,P_c)\,P_0(P_0 P_a P_0)$. Dies bedeutet nach *S 69*: $a^* = 2c - a$. Ebenso folgt $b^* = 2d - b$.

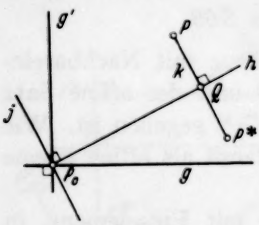


Fig. 28. *S 72.*

S 72. Die Koordinatenachsen $g; g'$ seien orthogonal. Dann gibt es in $\boldsymbol{R}_H$ ein Element k so, daß die Form $u^2 + k\,v^2$ genau dann Nullteiler ist, wenn $u, v \in \boldsymbol{N}$ gilt. Zwei durch $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ repräsentierte Geraden sind genau dann orthogonal, wenn $u\,u' + k\,v\,v' = 0$ ist[18]).

Es sei h gegeben mit $h \mathrel{I} P_0 = g\,g'$; $h \curvearrowright g'$. Wir können die Koordinaten von h in der Form $(c; 1; 0)$ ansetzen. Hiermit können wir die Gerade j mit $j = h\,P_0$; $j \perp h$ (da wegen *A 7* $j \curvearrowright g$ ist) durch $(1; f(c); 0)$ beschreiben.

(I) Hat P die Koordinaten $(a; b)$, werden die Koordinaten für $P^* = h\,P\,h$ (Fig. 28):

$$(*)\quad \{(1 - c\,f(c))^{-1}(a + 2b\,f(c) + a\,c\,f(c));\quad (1 - c\,f(c))^{-1}(-b - 2a\,c - b\,c\,f(c))\}.$$

Zum Beweis bestimmen wir k mit $k \mathrel{I} P$; $k \perp h$ und $Q = k\,h$. Wegen $k \parallel j$; $k \mathrel{I} P$ wird k repräsentiert durch $(1; f(c); -a - b\,f(c))$; damit finden wir für Q

$$\{(1 - c\,f(c))^{-1}(a + b\,f(c));\ -(1 - c\,f(c))^{-1}\,c\,(a + b\,f(c))\}.$$

Wegen $P = Q\,P\,Q = h\,P\,h$ erhalten wir hieraus nach *S 71* für P^* die Koordinaten (*).

Dabei ist $(1 - c\,f(c)) \notin \boldsymbol{N}$; denn aus $(1 - c\,f(c)) \in \boldsymbol{N}$ folgt die Existenz von d mit $d \neq 0$; $d(1 - c\,f(c)) = 0$. Hiermit haben die orthogonalen Geraden $(c; 1; 0)$ und $(1; f(c); 0)$ außer $(0; 0)$ noch den Punkt $(d\,f(c); -d) \neq (0; 0)$ gemeinsam, entgegen *A 2*.

(II) $\bar{h}$ mit $\bar{h} \mathrel{I} P_0$; $\bar{h} \curvearrowright g'$ werde durch $(d; 1; 0)$ repräsentiert. Nach *A 4* ist $h\,g\,\bar{h} = \bar{h}\,g\,h$, also auch $h\,g\,\bar{h}\,P_1\,\bar{h}\,g\,h = \bar{h}\,g\,h\,P_1\,h\,g\,\bar{h}$. Wir nehmen als P_1

den Punkt mit den Koordinaten $(1;0)$ und berechnen die vorstehende Gleichung in Koordinaten unter Verwendung von $(*)$. Dann folgt hieraus

$$c\,f(d) = d\,f(c).$$

Dies muß für jede Wahl von c und d gelten. Setzen wir speziell $d=1$, so erhalten wir

$$(**) \qquad c\,f(1) = f(c).$$

Dabei ist $f(1) \notin \boldsymbol{N}$; denn aus $f(1) \in \boldsymbol{N}$ folgt für die zu $(1;1;0) \nsim g, g'$ orthogonale Gerade $(1;f(1);0)$: $(1;f(1);0) \sim g'$, entgegen $A\,7$.

Wir setzen $f(1) = -k$ und $c = \frac{u}{v}$; $f(c) = \frac{v'}{u'}$ mit $v, u' \notin \boldsymbol{N}$. Damit wird aus $(**)$:

$$(***) \qquad v\,v' + k\,u\,u' = 0.$$

Die Nebenbedingung $v, u' \notin \boldsymbol{N}$ ist durch geeignete Wahl der Bezeichnung offenbar immer zu erfüllen. Also kennzeichnet $(***)$ allgemein für ein Geradenpaar $h; j$ mit den Koordinaten $(u;v;0)$; $(u';v';0)$ die Orthogonalität. Auf Grund der Beziehungen zwischen Orthogonalität und Parallelität gilt diese Kennzeichnung nicht nur für Geradenpaare durch den Punkt P_0 sondern allgemein.

(III) Es sei $v^2 + k\,u^2 = c \in \boldsymbol{N}$. Dann folgt $u \in \boldsymbol{N}$. Denn aus $u \notin \boldsymbol{N}$ folgt, daß durch $(u;v;0)$ und $(-v;k\,u;0)$ zwei orthogonale Geraden $h; j$ repräsentiert werden. Es gibt d mit $d \neq 0$; $d\,c = 0$. Dann haben $h; j$ außer $(0;0)$ auch den Punkt $(d\,k\,u; d\,v) \neq (0;0)$ gemeinsam, entgegen A 2. Also gilt $u \in \boldsymbol{N}$. Ebenso folgt $v \in \boldsymbol{N}$.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in dem

Theorem. *Wir betrachten eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem vorgegebenen System von involutorischen Erzeugenden, welche dem Axiomensystem aus* **1.1** *genügen möge. Die in $\mathfrak{G}$ erklärten Geraden- und Punktspiegelungen interpretieren wir als Geraden und Punkte einer Ebene; wir nennen sie:* euklidische Ebene mit Nachbarelementen. *Dann gilt: Eine euklidische Ebene mit Nachbarelementen läßt sich als analytische Geometrie über einem H-Ring beschreiben.*

Ein H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ ist dabei ein kommutativer Ring mit Einselement, in welchem jeder Nullteiler invertierbar ist und von je zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt. Mit $\boldsymbol{N}$ bezeichnen wir das teilerlose Ideal der Nullteiler in $\boldsymbol{R}_H$.

Die analytische Beschreibung der euklidischen Ebene mit Nachbarelementen gestaltet sich folgendermaßen: Den Punkten entsprechen eineindeutig die geordneten Paare $(x;y)$ aus $\boldsymbol{R}_H$, den Geraden die homogenen (d.h. bis auf einen gemeinsamen Faktor $f \notin \boldsymbol{N}$ festgelegten) geordneten Elementtripel $(u;v;w)$ von $\boldsymbol{R}_H$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$. Die Inzidenz wird durch $u\,x + v\,y + w = 0$ beschrieben. Zwei Geraden mit den Koordinaten $(u;v;w)$ und $(u';v';w')$ sind genau dann orthogonal, wenn $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ ist; die Parallelität wird durch $u\,v' - v\,u' = 0$ beschrieben.

Dabei ist $v^2 + k\,u^2$ mit $k \in \boldsymbol{R}_H$ eine definite binäre Form über $\boldsymbol{R}_H$; d.h. $u^2 + k\,v^2 \in \boldsymbol{N}$ ist gleichbedeutend mit $u, v \in \boldsymbol{N}$. Außerdem gilt $1+1 \notin \boldsymbol{N}$.

Wir erhalten eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ *als Bewegungsgruppe der analytischen Geometrie über* $\boldsymbol{R}_H$, *wenn wir jeder Geraden* $(u; v; w)$ *die Matrix*

$$(\dagger) \qquad \begin{pmatrix} \frac{v^2 - k u^2}{v^2 + k u^2} & -\frac{2 k u v}{v^2 + k u^2} & -\frac{2 k u w}{v^2 + k u^2} \\ -\frac{2 u v}{v^2 + k u^2} & \frac{v^2 - k u^2}{v^2 + k u^2} & -\frac{2 v w}{v^2 + k u^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zuordnen und die hiervon erzeugte Gruppe betrachten.

Es gibt einen Homomorphismus der euklidischen Ebene mit Nachbarelementen in eine eindeutige euklidische Ebene. Dazu fassen wir die Klassen benachbarter Punkte und benachbarter Geraden zu Großpunkten *und* Großgeraden *zusammen*[19]. *Dann nennen wir einen Großpunkt und eine Großgerade „inzident", wenn es unter den Repräsentanten einen Punkt und eine Gerade gibt, die inzidieren. Entsprechend führen wir die Relation „orthogonal" für Großgeraden ein. In der so definierten* Großgeometrie[19]) *ist jeder Großpunkt und jede Großgerade nur zu sich selber benachbart: Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es also genau eine Verbindungsgerade und zu zwei verschiedenen Geraden höchstens einen Schnittpunkt. Die so gewonnene eindeutige euklidische (Groß-)Ebene läßt sich als analytische Geometrie über dem Restklassenkörper* $\boldsymbol{K} \cong \boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ *beschreiben. Für* $\boldsymbol{K}$ *ist also Char* $(\boldsymbol{K}) \neq 2$ *und es gibt über* $\boldsymbol{K}$ *eine definite binäre Form* $v^2 + k u^2$; *letzteres läßt sich auch beschreiben als die Existenz eines Elements* $-k$ *in* $\boldsymbol{K}$, *welches nicht Quadrat ist. Die eindeutige euklidische (Groß-)Ebene entspricht also den von* F. BACHMANN[18]) *durch die Axiome A 1, A 2, A 3, A 4, A 5, A 10, A 11 charakterisierten Ebenen. Ist* $\mathfrak{N}$ *die invariante Untergruppe der Nachbarbewegungen, so ist* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *isomorph zur Bewegungsgruppe der Großgeometrie.*

Der Beweis dieses Theorems, abgesehen von dem letzten Absatz, bildete den Gegenstand unserer Untersuchungen. Man sieht nun noch leicht ein, daß die Zuordnung der Matrizen zu den Geraden umkehrbar eindeutig ist. Auch zeigt man leicht, daß die durch $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ beschriebene Eigenschaft „orthogonal" genau gleichbedeutend damit ist, daß die zugehörigen Matrizen vom Typ (†) kommutieren. Die Matrizen vom Typ (†) erzeugen also in der Tat eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe.

Der im Anschluß daran beschriebene Übergang zur Großgeometrie ist jedenfalls möglich. Soweit es sich um affine Eigenschaften handelt, haben wir diesen Übergang in [5]) ausführlich beschrieben und auch gezeigt, daß der Koordinatenbereich der Großgeometrie von dem Restklassenkörper $\boldsymbol{K} \cong \boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ gebildet wird. Man überlegt sich nun noch leicht, daß die obige Einführung der Relation „orthogonal" für Großgeraden genau der Restklassenbildung der Relation $v\,v' + k\,u\,u' = 0$ nach $\boldsymbol{N}$ entspricht.

Seine volle Bedeutung gewinnt unser Theorem aber erst durch das

Umkehrtheorem. *Es sei* $\boldsymbol{R}_H$ *ein H-Ring, für den 2 nicht Nullteiler ist, und es sei* $v^2 + k u^2$ *eine definite Form über* $\boldsymbol{R}_H$. *Es sei dann über* $\boldsymbol{R}_H$ *auf die oben an-*

[19]) Die Begriffe Großpunkt, Großgerade und Großgeometrie finden sich bei J. HJELMSLEV[1]) 3. Mitt. S. 35ff.

gegebene Weise eine analytische Geometrie definiert, in der die Orthogonalität mit Hilfe der definiten Form erklärt ist. Jeder Geraden dieser Geometrie ordne man eine Matrix vom Typ (†) zu. Die von diesen Matrizen erzeugte Gruppe genügt dann, mit eben diesen Matrizen als System von involutorischen Erzeugenden, dem Axiomensystem aus **1.1**; *die analytische Geometrie über* $\boldsymbol{R}_H$ *bildet also eine euklidische Ebene mit Nachbarelementen.*

Die Durchführung des Beweises liegt auf der Hand: Zunächst hat man sich von der eineindeutigen Zuordnung zwischen Matrizen und Geraden zu überzeugen und davon, daß die in der analytischen Geometrie über $\boldsymbol{R}_H$ erklärten Relationen „orthogonal" und „inzident" für die zugehörigen Matrizen gerade auf die in D 1 und D 3 angegebene Weise gekennzeichnet sind. Hiermit lassen sich dann die Axiome A 1 bis A 11 verifizieren. Man kann dabei die Ergebnisse von F. BACHMANN[3]) benutzen, der diese Rechnungen für den Fall, daß $\boldsymbol{R}_H$ ein Körper ist, durchgeführt hat. Außerdem ziehe man die in [5]) beschriebenen Eigenschaften einer affinen Geometrie über einem H-Ring heran. Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen.

Bemerkung. Es ist jetzt leicht möglich, den Anschluß an die Untersuchungen von J. HJELMSLEV[1]) zu gewinnen und diese noch zu vervollständigen: Zunächst entnimmt man seinen Arbeiten, daß unsere Axiome A 1 bis A 11 bei ihm gelten sollen. Doch stellt er für seine Geometrien noch weitergehende Forderungen auf. Man kann jetzt ohne Schwierigkeit die sich daraus für den H-Ring ergebenden charakteristischen Eigenschaften angeben. Indem wir für die Beweise auf die Untersuchungen von F. BACHMANN[3]) für den Fall, daß der H-Ring ein Körper ist, verweisen, die sich unmittelbar auf unseren allgemeineren Fall übertragen, erwähnen wir nur zwei Resultate:

A 18. Es gibt $g; h; j$ mit $g\,h; j\,g\,j = h$. (Es gibt eine Gerade j, welche den von den Geraden g und h gebildeten „rechten Winkel halbiert"[20]).)

Dies gilt genau dann, wenn in der definiten Form $k = 1$ gesetzt werden kann.

A 19. Zu $g; h$ gibt es j mit $j\,g\,j = h$. (Existenz der „Winkelhalbierenden"[21]).

Dies gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{R}_H$ ein „pythagoräischer H-Ring" ist, d. h.: Zu $a, b \in R_H$ gibt es ein c mit $a^2 + b^2 = c^2 \in \boldsymbol{R}_H$.

Hamburg, Universität, Institut für Angewandte Mathematik.

(Eingegangen am 10. April 1954.)

[20]) Dies ist Axiom VI bei J. HJELMSLEV[1]) 3. Mitt. S. 5.
[21]) Siehe J. HJELMSLEV[1]) 3. Mitt. S. 8.

HELLWIG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 26—46 (1954)

Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus.

Von
GÜNTER HELLWIG.

Einleitung.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$L[u] \equiv (A(x,y)\,u_x)_x - (C(x,y)\,u_y)_y - D(x,y)\,u = F(x,y) \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten und machen zur Erläuterung unserer Problemstellungen in der Einleitung die folgenden, später noch zu ergänzenden Voraussetzungen:

(α) *$A(x,y)$, $C(x,y)$ für $r_0 \leq x < 0$, $0 < x \leq r_1$, $-\infty < y < +\infty$ stetig differenzierbar.*

(β) *Für $x > 0$ ist $AC > 0$ und mit $E(x,y) = \sqrt{\frac{C(x,y)}{A(x,y)}}$ ist ferner $|E(x,y)| \leq M_1(x)$, $|E(x,y_1) - E(x,y_2)| \leq M_2(x)\,|y_1 - y_2|$, so daß $\int_0^x M_i(x)\,dx < \infty$ ausfällt.*

(γ) *Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x,y) = 0$ oder $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x,y) = \infty$.*

(δ) *Für $x < 0$ ist $AC < 0$ und $A(x,y) = A^1(x)\,A^2(y)$, $C(x,y) = C^1(x)\,C^2(y)$.*

Die *Charakteristiken* von (1) werden durch die Differentialgleichung $A(x,y)\,dy^2 - C(x,y)\,dx^2 = 0$, die *charakteristischen Richtungen* durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm E(x,y) \equiv \pm \sqrt{\frac{C(x,y)}{A(x,y)}} \tag{2}$$

festgelegt. Wir nennen (1) in einem Punkt $P:(x,y)$ von *elliptischem Typus*, wenn dieser Punkt Träger keiner reellen charakteristischen Richtung (2) ist ($C/A < 0$). (1) wird in P von *hyperbolischem* bzw. *parabolischem Typus* genannt, wenn P Träger genau zweier verschiedener, reeller charakteristischer Richtungen (2) ($C/A > 0$) bzw. Träger genau einer charakteristischen Richtung (etwa $C/A = 0$) ist[1]).

Die Gl. (1) ist für $x > 0$ hyperbolisch, für $x < 0$ elliptisch und wegen Voraussetzung (γ) für $x = 0$ parabolisch. Auf der parabolischen Kurve $\mathfrak{k}$ (y-Achse) präzisieren wir den Sachverhalt. Wir nennen $\mathfrak{k}$ a) Träger der charakteristischen Spitzen, wenn $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} E(x,y) = 0$, b) Einhüllende der Charakteristiken, wenn

[1]) Die übliche Definition ist: $AC < 0$ elliptisch, $AC > 0$ hyperbolisch, $AC = 0$ parabolisch. Dabei muß jedoch zusätzlich gefordert werden, daß A, C überall stetig sind. Außerdem hat man meist auch $|A| + |C| > 0$ vorausgesetzt. Beides werden wir nicht tun. Nach unserer Definition ist z. B. $(x\,u_x)_x - x\,u_{yy} = 0$ überall hyperbolisch.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} E(x, y) = +\infty$ ist[2]). Entsprechend nennt man (1) auf $\mathfrak{k}$ hyperbolisch, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} E(x, y) = e(y)$ mit $0 < e(y) < \infty$ ist.

Die einfachste Gleichung mit diesen Eigenschaften ist

$$u_{xx} - \operatorname{sign} x\,|x|^c u_{yy} = 0. \tag{3}$$

F. TRICOMI [14] ($c=1$), S. GELLERSTEDT [4] ($c=2n+1$, $n=0, 1, 2, \ldots$) u. a. haben für (3) die folgende Problemstellung behandelt[3]). Durch einen beliebigen Punkt $P_0:(x_0, y_0)$ mit $x_0>0$ werden die zwei Charakteristiken $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ gelegt, die $\mathfrak{k}$ in den Punkten P_1, P_2 schneiden mögen. Durch P_1, P_2 wird weiterhin eine ganz in der linken Halbebene verlaufende Kurve $\mathfrak{c}$ mit eindeutiger Projektion auf $\mathfrak{k}$ gelegt. Das durch $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}$ begrenzte Gebiet $\mathfrak{g}$ zerteilen wir in die Gebiete $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$. In $\mathfrak{g}_0$ (mit der Berandung $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{k}$) findet man mittels der GREEN-HADAMARDschen Funktion eine Lösung $v(x, y)$ von (3), die die vorgegebenen Werte $v|_{\mathfrak{c}_1} = \varphi(x)$, $v_x|_{\mathfrak{k}} = \nu(y)$ annimmt. Mittels einer GREENschen Funktion (E. HOLMGREN [7]) verschafft man sich weiter in $\mathfrak{g}_1$ eine Lösung $w(x, y)$ von (3), die den Randbedingungen $w|_{\mathfrak{c}} = \psi(y)$, $w_x|_{\mathfrak{k}} = \nu(y)$ genügt. In der Hoffnung, einen stetig differenzierbaren Übergang über die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$ zu erhalten, fordert man $v(0, y) = w(0, y)$ und erhält daraus zur Bestimmung von $\nu(y)$ eine Integralgleichung. $u(x, y) = \{v(x, y)$ in $\mathfrak{g}_0$, $w(x, y)$ in $\mathfrak{g}_1\}$ ist offenbar eine „Lösung" von (3), die auf $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1$ die Vorgaben ψ, φ erfüllt. Diese durch die Vorgaben eindeutig bestimmte Lösung kann in einer endlichen Anzahl von Punkten auf dem Rande $\mathfrak{c}$ und auf $\mathfrak{k}$ in einer genauer angebbaren Weise unendlich werden [4]. Für Eindeutigkeitsfragen ist diese Problemstellung auch bei

$$u_{xx} - C(x)\, u_{yy} = 0 \tag{4}$$

[$C(x)$ monoton wachsend, zweimal stetig differenzierbar mit $C(x) > 0$ für $x > 0$, $C(0) = 0$ und weitere Voraussetzungen] von M. H. PROTTER [10] untersucht worden. Für allgemeinere Gleichungen siehe auch [1].

Bei einer anderen Problemstellung betrachtet man (4) für $x \gtrless 0$ und wählt die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$, die stets als Träger der charakteristischen Spitzen vorausgesetzt wird, als Anfangskurve eines Anfangswertproblems (F. J. FRANKL [3], L. BERS [2], M. H. PROTTER [11] u. a.[4]). In [5] wurde von W. HAACK und dem Verfasser das Anfangswertproblem für eine allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine singuläre „Integralgleichung" zurückgeführt. An dieser erkennt man, daß das CAUCHYsche Problem im allgemeinen nicht lösbar sein wird, wenn $\mathfrak{k}$ Einhüllende der Charakteristiken ist. Für (1) mit $D \equiv 0$ und Koeffizienten A, C, die sich auf

[2]) $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$ wird als eine Richtung gezählt und bedeutet das Parallelsein zur y-Achse.

[3]) In [4], [14] (Literaturangaben am Ende der Arbeit) wird $y^c u_{xx} + u_{yy} = 0$ betrachtet.

[4]) Weitere Literaturangaben in [5].

$A = A_0(y) + xA_1(x, y)$, $C = x^c(C_0(y) + xC_1(x, y))$ mit $c > 0$ reduzieren lassen, ist dort gezeigt, daß die CAUCHYschen Vorgaben $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$ gestellt werden dürfen. Auch im folgenden machen wir diese Integralgleichung zum Ausgangspunkt (§ 2).

In [6] wurde vom Verfasser die parabolische Kurve als Randkurve eines Anfangs-Randwertproblems gewählt.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die skizzierten Problemstellungen die folgenden drei Forderungen erfüllen, wobei wir von der speziellen Gestalt der Differentialgleichung ganz absehen wollen: 1. Die Koeffizienten A, C, D, F von (1) sind mit Einschluß entsprechender Ränder stetig. 2. Es ist stets $|A| + |C| > 0$. 3. Die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$ ist Träger der charakteristischen Spitzen.

Es ist klar, daß viele Eigenarten der partiellen Differentialgleichungen von gemischtem Typus nicht hervortreten können, wenn man solche Einschränkungen macht. Andererseits wird man erwarten, daß die skizzierten Probleme in ganz bestimmter, vielleicht recht vernünftiger Weise ausgezeichnet sind. Solche Eigenarten und Auszeichnungen anzugeben ist ein Ziel dieser Arbeit.

Im ersten Abschnitt betrachten wir (1) für $x \geqq 0$ und wählen die parabolische Kurve $\mathfrak{k}$ [Vor. (γ)] als Anfangskurve, auf der die obigen drei Forderungen nicht bestehen müssen. Gefragt wird nach den auf $\mathfrak{k}$ zu stellenden Anfangsbedingungen, die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewährleisten. Dabei muß die Konstruktion eines durch die Charakteristiken $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{k}$ begrenzten Gebietes $\mathfrak{g}_0$, das Einflußgebiet bezüglich P_0 genannt, nicht immer möglich sein, da $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ keine endlichen Schnittpunkte mit $\mathfrak{k}$ haben müssen[5]). Die Forderung, daß durch jeden Punkt P_0 ein endliches Einflußgebiet erzeugt wird, führt zu einer sachgemäßen Abgrenzung des Problemkreises. Hinreichende Voraussetzungen dazu sind die in (β) genannten. Bei geeigneten Voraussetzungen über die Koeffizienten in (1) werden vollständige Fallunterscheidungen für das Anfangswertproblem angegeben und die Auszeichnungen für die CAUCHYschen Vorgaben aufgefunden (§ 3).

Im zweiten Abschnitt fragen wir nach sinnvollen Randwertproblemen von (1) für das Gebiet $\mathfrak{g}_1$ mit der Berandung $\mathfrak{c} + \mathfrak{k}$. Zu diesem Zwecke wurde (1) für $x < 0$ als „separierbar" vorausgesetzt [Vor. (δ)]. Es ist nun von Interesse, Lösungen eines solchen Randwertproblems durch Formulierung eines Anfangswertproblems auf $\mathfrak{k}$ in den hyperbolischen Bereich fortzusetzen, wie dies in analoger Weise beim TRICOMI-Problem geschehen ist. Für eine stetige Fortsetzung ist notwendig, daß beim Randwertproblem die Vorgabe $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$ mit $x < 0$ und beim Anfangswertproblem die Vorgabe $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$ mit $x > 0$ zulässig ist. Entsprechend müßten bei einer stetig differenzierbaren Fortsetzung beim Randwertproblem die Vorgabe $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$

[5]) Bei der Gleichung $(x^2 u_x)_x - u_{yy} = 0$ (welche die dritte Forderung verletzt) gibt es z. B. kein endliches Einflußgebiet $\mathfrak{g}_0$.

mit $x < 0$ und beim Anfangswertproblem die CAUCHYschen Vorgaben $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$ zulässig sein. Betrachten wir als einfaches Beispiel

$$(|x|^a u_x)_x - \operatorname{sign} x \, |x|^c u_{yy} = 0,$$

so ergibt sich als notwendige Forderung für eine stetig differenzierbare Fortsetzung im obigen Sinne $a = 0$, $c > -1$. Dies ist die gesuchte Auszeichnung für den Gleichungstyp (3).

I.

§ 1. Das charakteristische Netz.

Wir betrachten (1) in dem Rechteck

(1.1) $\quad \mathfrak{r}: \ 0 \leqq x \leqq r_1 \quad \text{mit} \quad 0 < r_1 \leqq 1, \qquad s_0 \leqq y \leqq s_1 \quad \text{mit} \quad s_0 < s_1$ [6].

Als Anfangskurve $\mathfrak{k}$ wählen wir das Geradenstück

(1.2) $\quad \mathfrak{k}: \ x = 0, \qquad s_0 \leqq y \leqq s_1.$

Bezeichnungen: Mit $\mathfrak{r} - \mathfrak{k}$ bzw. $\overline{\mathfrak{r} - \mathfrak{k}}$ bezeichnen wir die Punktmengen $0 < x \leqq r_1$ bzw. $0 < \varepsilon \leqq x \leqq r_1$ und $s_0 \leqq y \leqq s_1$. Teilrechtecke $\mathfrak{r}' \subseteqq \mathfrak{r}$ sind: $0 \leqq x \leqq r_1' \leqq r_1$, $s_0 \leqq s_0' \leqq y \leqq s_1' \leqq s_1$. Eine Funktion $\Phi(x, y)$ heißt in $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ bedingt stetig, wenn $x^\varphi \Phi(x, y)$ mit $\varphi \geqq 0$ dort stetig ist. Sind Φ, Ψ in $\mathfrak{r}$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\mathfrak{r}_\delta$: $0 \leqq x \leqq \delta(\varepsilon)$, $s_0 \leqq y \leqq s_1$, so daß $|\Psi(x, y)| < \varepsilon$ in $\mathfrak{r}_\delta$, so schreiben wir für $\Phi + \Psi$ einfach $||\Phi||$. Entsprechendes in $\mathfrak{r}'$.

Die über A, C in (1) zu machenden Voraussetzungen sollen recht allgemein sein. Ihre Formulierung wird nahegelegt, indem man etwa auf $A(x, y)$ formal die TAYLORsche Formel anwendet:

$$A(x, y) = \frac{x^a}{a!} A^{(a)}(0, y) + \frac{x^{a+1}}{(a+1)!} A^{(a+1)}(\vartheta x, y), \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Voraussetzung (I) *über die Koeffizienten in* (1):

(*a*) *In* $\mathfrak{r}$ *ist*

$$A(x, y) = x^\alpha \{A_0(y) + x^\alpha A_1(x, y)\}, \qquad C(x, y) = x^c \{C_0(y) + x^\gamma C_1(x, y)\}$$

mit reellen Zahlen a, α, c, γ *und* $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $c > -1$, $c - a > -2$. $A_0(y)$, $C_0(y)$ *sind zweimal stetig differenzierbar und von gleichem Vorzeichen*:

$$0 < \mathfrak{A}_0 \leqq A_0(y) \leqq \mathfrak{A}_1, \qquad 0 < \mathfrak{C}_0 \leqq C_0(y) \leqq \mathfrak{C}_1$$ [7];

$A_1(x, y)$, $C_1(x, y)$ *sind stetig differenzierbar*, A_{1xy}, A_{1yy}, C_{1xy}, C_{1yy} *stetig.*

(*b*) $D(x, y)$, $D_y(x, y)$; $F(x, y)$, $F_y(x, y)$ *sind in* $\mathfrak{r}$ *bedingt stetig, und es ist*

$$|D(x, y)|, \ |D_y(x, y)| \leqq \mathfrak{D} x^d, \qquad |F(x, y)|, \ |F_y(x, y)| \leqq \mathfrak{F} x^f$$

mit $d > -1$, $d - a > -2$, $f > -1$, $f - a > -2$.

[6] Die Annahme $r_1 \leqq 1$ ist beim Anfangswertproblem unwesentlich.

[7] Große Frakturbuchstaben bezeichnen stets geeignete, positive Zahlen. Sind A_0, C_0 negativ, multipliziere man (1) mit -1.

(c_1) *$u_0(y), u_1(y)$ sind willkürliche in $s_0 \leq y \leq s_1$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen.* (c_2) *$u_0(y), u_1(y)$ sind dreimal stetig differenzierbar.*

Unsere Betrachtungen beziehen sich stets auf $\mathfrak{r}$ oder auf jeweils passend zu wählende Teilrechtecke $\mathfrak{r}'$.

In $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ ist (1) hyperbolisch mit $|A| + |C| > 0$, denn mit (2) hat man

$$E(x,y) = x^{\frac{c-a}{2}} \sqrt{\frac{C_0(y)}{A_0(y)}} \sqrt{\frac{1 + x^{\gamma} \frac{C_1(x,y)}{C_0(y)}}{1 + x^{\alpha} \frac{A_1(x,y)}{A_0(y)}}} \tag{1.3}$$

Auf $\mathfrak{k}$ ist (1) hyperbolisch wenn $c - a = 0$ gilt, parabolisch in allen anderen Fällen. Nur der Fall $c = a = 0$ führt zum klassischen CAUCHYschen Anfangswertproblem, allerdings nur formal, da die Koeffizienten D, F von (1) auf $\mathfrak{k}$ nicht einmal stetig sein müssen.

Nach (1.3) sind E, E_y in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ stetig. Ferner ist

$$\mathfrak{E}_0 x^{\frac{c-a}{2}} \leq E(x,y) \leq \mathfrak{E}_1 x^{\frac{c-a}{2}}, \qquad |E_y(x,y)| \leq \mathfrak{E}_2 x^{\frac{c-a}{2}} \tag{1.4}$$

mit $\mathfrak{E}_0 = \left\| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{A}_1}} \right\|$, $\mathfrak{E}_1 = \left\| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} \right\|$[8]. Mit Voraussetzung (a) erkennt man aus (1.4), daß

$$|E(x,y)| \leq M_1(x), \qquad |E(x,y_2) - E(x,y_1)| \leq M_2(x)\,|y_2 - y_1|$$

mit

$$\int_0^x M_i(x)\,dx < \infty$$

ist, so daß der Satz von CARATHEODORY-KAMKE ([8] S. 34, S. 2) angewendet werden kann. Dabei beachte man, daß man $E(x,y)$ über $\mathfrak{k}$ für $x < 0$ ein Stück fortsetzen kann (etwa $E(x,y) = E(|x|, y)$ für $x < 0$). Danach gibt es durch jeden Punkt $P_0 : (x_0, y_0) \in \mathfrak{r}'$ genau eine Lösung $\mathfrak{c}_1 : Z(x; x_0, y_0)$, $\mathfrak{c}_2 : Y(x; x_0, y_0)$ jeder der beiden Differentialgleichungen $y' = -E(x,y)$, $y' = E(x,y)$[9]. Y, Z sind in $\mathfrak{r}'$ in allen Argumenten stetig, in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ stetig differenzierbar. Y, Z werden ferner nur für $x \leq x_0$ betrachtet. Es ist $Y(x_0; x_0, y_0) = Z(x_0; x_0, y_0)$. Mit $Z = y_0 + \int_x^{x_0} E(\xi, Z)\,d\xi$ und (1.4) findet man

$$\begin{cases} y_0 + \dfrac{2\mathfrak{E}_0}{c-a+2}\left(x_0^{\frac{c-a}{2}+1} - x^{\frac{c-a}{2}+1}\right) \leq Z \\ \qquad\qquad \leq y_0 + \dfrac{2\mathfrak{E}_1}{c-a+2}\left(x_0^{\frac{c-a}{2}+1} - x^{\frac{c-a}{2}+1}\right) \end{cases} \tag{1.5}$$

---

[8]) Damit nach Fußnote [7]) $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_1$ Zahlen sind, denke man sich für $\left\| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{A}_1}} \right\|$ nach unserer Bezeichnungsweise etwa $\sqrt{\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{A}_1}} - \varepsilon_0$ für $\left\| \sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} \right\|$ etwa $\sqrt{\frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0}} + \varepsilon_1$ mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ geschrieben.

[9]) Lösung bedeutet: Y, Z erfüllt in $\mathfrak{r}'$ die Relation $y = y_0 \mp \int_x^{x_0} E(\xi, y)\,d\xi$, in $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ die Differentialgleichung.

und analog für Y. Die Schnittpunkte von Y, Z mit $\mathfrak{k}$:

$$P_1 : (0, y_1) = (0, Z(0; x_0, y_0)), \qquad P_2 : (0, y_2) = (0, Y(0; x_0, y_0))$$

liegen bei geeigneter Wahl von P_0 in $\mathfrak{r}'$, wie man aus (1.5) entnimmt. Dadurch wird durch jeden solchen nicht auf $\mathfrak{k}$ gelegenen Punkt P_0 ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}(x_0, y_0)$, das Einflußgebiet, festgelegt, das durch $\mathfrak{k}$ und die beiden durch P_0 gehenden Charakteristiken Y, Z begrenzt wird. Liegt P_0 auf $\mathfrak{k}$, so besteht $\mathfrak{g}_0$ aus P_0. Wesentlich für diese Konstruktion ist die Vor. $c - a > -2$ [vgl. Fußnote [5])]. Wir betrachten ferner nur die Menge $\mathfrak{P}$ der Punkte P_0, so daß für das durch P_0 erzeugte Einflußgebiet gilt: $\mathfrak{g}_0 \leqq \mathfrak{r}'$. Jedenfalls ist für $\mathfrak{P}$ sicher ein Teilrechteck von $\mathfrak{r}'$ zulässig, welches nach Vereinbarung wieder mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnet wird.

In $\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}$ sind $Y_{x_0}, Y_{y_0}, Z_{x_0}, Z_{y_0}$ nach Sätzen von BENDIXSON-KAMKE [8] stetig. Y_{y_0} genügt der Gleichung

$$Y_{y_0}(x; x_0, y_0) = 1 - \int_x^{x_0} E_y(\xi, Y(\xi; x_0, y_0))\, Y_{y_0}(\xi; x_0, y_0)\, d\xi. \tag{1.6}$$

Ist $\mathfrak{M}_\varepsilon$ der größte Wert von $|Y_{y_0}|$ in $\overline{\mathfrak{r}' - \mathfrak{k}}$, so erhält man mit (1.4) wegen $x \leq x_0$

$$\mathfrak{M}_\varepsilon \leq \frac{1}{1 - \frac{2\mathfrak{E}_2 x_0^{\frac{c-a}{2}+1}}{c-a+2}}$$

und damit $|Y_{y_0}|, |Z_{y_0}| \leq \mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{r}'$. Dabei darf in unserer Bezeichnungsweise $\mathfrak{Y} = \|1\|$ gesetzt werden. Analog wird, indem man neben (1.4) die Gleichung

$$Y_{x_0}(x; x_0, y_0) = -E(x_0, y_0) - \int_x^{x_0} E_y(\xi, Y(\xi; x_0, y_0))\, Y_{x_0}(\xi; x_0, y_0)\, d\xi$$

benutzt, $|Y_{x_0}|, |Z_{x_0}| \leq \mathfrak{Z}\, x_0^{\frac{c-a}{2}}$ in $\mathfrak{r}'$. Schließlich erhält man mit (1.5), (1.6) leicht

$$|Z(x; x_0, y_0) - Y(x; x_0, y_0)| \leq \frac{4\mathfrak{E}_1}{c-a+2}\left(x_0^{\frac{c-a}{2}+1} - x^{\frac{c-a}{2}+1}\right), \tag{1.7}$$

$$|Z_{y_0}(x; x_0, y_0) - Y_{y_0}(x; x_0, y_0)| \leq \frac{4\mathfrak{Y}\,\mathfrak{E}_2}{c-a+2}\, x_0^{\frac{c-a}{2}+1} \tag{1.8}$$

Damit sind die Abschätzungen für die Charakteristiken beendet.

Setzen wir $K(x, y) = \sqrt{A(x, y)\, C(x, y)}$, so wird nach Voraussetzung (a)

$$K(x,y) = x^{\frac{a+c}{2}} \sqrt{A_0(y)\, C_0(y)} \sqrt{1 + \frac{1}{A_0 C_0}(x^\alpha A_1 C_0 + x^\gamma A_0 C_1 + x^{\alpha+\gamma} A_1 C_1)}, \tag{1.9}$$

$$0 \leq \mathfrak{K}\, x^{\frac{a+c}{2}} \leq K(x,y) \leq \mathfrak{K}_1\, x^{\frac{a+c}{2}}, \qquad |K_y(x,y)| \leq \mathfrak{K}_2\, x^{\frac{a+c}{2}} \tag{1.10}$$

mit $\mathfrak{K} = \sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}\, \|1\| = \left\| \sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0} \right\|$, $\mathfrak{K}_1 = \left\| \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1} \right\|$. Für K_x und $K_y E$ findet man

mit (1.4), (1.9) bei Beachtung von $c-a>-2$

$$(1.11)\quad K_x(x,y)=x^{\frac{a+c}{2}-1}\left\|\frac{a+c}{2}\sqrt{A_0(y)\,C_0(y)}\right\|,\quad K_y(x,y)\,E(x,y)=x^{\frac{a+c}{2}-1}\|0\|$$

und damit für die Ausdrücke $L_{1,2}(x,y)=K_x(x,y)\pm K_y(x,y)\,E(x,y)$ nach leichter Rechnung die Abschätzungen

$$(1.12)\qquad |L_{1,2}(x,y)|\leq \mathfrak{L}\,x^{\frac{a+c}{2}-1},\qquad \mathfrak{L}=\left\|\frac{|a+c|}{2}\sqrt{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}\right\|,$$

$$(1.13)\qquad |L_{1y}(x,y)|,\ |L_{2y}(x,y)|\leq \mathfrak{L}_1\,x^{\frac{a+c}{2}-1}$$

Diese sind auch für $a+c=0$ gültig.

Ist $G(x,y)$ in $\mathfrak{r}$ bedingt stetig, also $|G(x,y)|\leq \mathfrak{G}\,x^g$ mit $g>-1$, so wird mit (1.7)

$$(1.14)\quad \begin{cases} |H(x_0,y_0)|\equiv\left|\iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0,y_0)} G(x,y)\,dx\,dy\right|\leq \\ \qquad\leq\int\limits_0^{x_0}dx\int\limits_{Y(x;x_0,y_0)}^{Z(x;x_0,y_0)}|G(x,y)|\,dy\leq\frac{\overline{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{G}}{g+1}\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+2}=\mathfrak{H}\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+2}\end{cases}$$

Dabei ist $\overline{\mathfrak{H}}=\frac{4\mathfrak{E}_1}{c-a+2}$ nur von den Größen des charakteristischen Netzes abhängig. Man findet weiter

$$(1.15)\qquad |H_{x_0}(x_0,y_0)|\leq\mathfrak{H}_1\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+1},\qquad |H_{y_0}(x_0,y_0)|\leq\mathfrak{H}_2\,x_0^{g+1}.$$

Wenn man überdies $G_y(x,y)$ in $\mathfrak{r}$ bedingt stetig voraussetzt: $|G_y(x,y)|\leq\mathfrak{G}\,x^g$ mit $g>-1$, so zeigt man durch Anwendung des Mittelwertsatzes

$$|G(x,Z)\,Z_{y_0}-G(x,Y)\,Y_{y_0}|\leq|G_y(x,\bar{y})|\,|Z_{y_0}|\,|Z-Y|+|G(x,Y)|\,|Z_{y_0}-Y_{y_0}|$$

bei Beachtung von (1.7), (1.8), daß über (1.15) hinaus die Ungleichung gilt

$$(1.16)\quad |H_{y_0}(x_0,y_0)|\leq\int\limits_0^{x_0}|G(x,Z)\,Z_{y_0}-G(x,Y)\,Y_{y_0}|\,dx\leq\mathfrak{H}_2\,x_0^{\frac{c-a}{2}+g+2}$$

Zusammenfassung. In $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ gelten die Abschätzungen:

$$|A(x,y)|\leq\mathfrak{A}\,x^a,\quad |A_x(x,y)|,\ |A_{xy}(x,y)|\leq\mathfrak{A}\,x^{a-1}\quad\text{wenn}\quad a\neq 0,$$

$$|A(x,y)|\leq\mathfrak{A},\quad |A_x(x,y)|,\ |A_{xy}(x,y)|\leq\mathfrak{A}\,x^{\alpha-1}\quad\text{wenn}\quad a=0\ \text{ist};$$

$$|C(x,y)|,\ |C_y(x,y)|,\ |C_{yy}(x,y)|\leq\mathfrak{C}\,x^c;\quad |G(x,y)|\leq\mathfrak{G}\,x^g;$$

$$|H(x,y)|=\left|\iint\limits_{g(x,y)}G\,d\xi\,d\eta\right|\leq\mathfrak{H}\,x^h,\quad |H_x(x,y)|\leq\mathfrak{H}_1\,x^{h_1},\quad |H_y(x,y)|\leq\mathfrak{H}_2\,x^{h_2};$$

$$\mathfrak{K}\,x^k\leq K(x,y)\leq\mathfrak{K}_1\,x^k,\quad |K_y(x,y)|\leq\mathfrak{K}_2\,x^k;$$

$$|L_{1,2}(x,y)|\leq\mathfrak{L}\,x^l,\quad |L_{1y}|,\ |L_{2y}|\leq\mathfrak{L}_1\,x^l;$$

$$|Y_{y_0}(x;x_0,y_0)|,\ |Z_{y_0}(x;x_0,y_0)|\leq\mathfrak{Y},\quad |Y_{x_0}(x,x_0,y_0)|,\ |Z_{x_0}(x;x_0,y_0)|\leq\mathfrak{Z}\,x_0^z.$$

Dabei ist

$$\alpha>0,\quad c>-1,\quad c-a>-2,\quad g>-1,\quad h=\frac{c-a}{2}+g+2,\quad h_1=\frac{c-a}{2}+g+1,$$

$$h_2=\begin{cases} g+1 & \text{wenn} \quad |G(x,y)|\leq \mathfrak{G}\,x^g, \\ \dfrac{c-a}{2}+g+2 & \text{wenn überdies} \quad |G_y(x,y)|\leq \mathfrak{G}\,x^g \quad \text{ist,}\end{cases}$$

$$k=\frac{a+c}{2},\quad l=\frac{a+c}{2}-1,\quad z=\frac{c-a}{2}.$$

Bezüglich der x-Potenzen lassen die hier gegebenen Abschätzungen keine Verschärfung zu, wie das Beispiel $(x^a u_x)_x - x^c u_{yy} = x^l$ zeigt. Gerade dieser Bestandteil wird später fast ausschließlich benötigt.

Es ist von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen, daß an Stelle von Vor. (a) in (I) jede andere Vor. über A, C treten darf, die uns das Bestehen der in der Zusammenfassung genannten Ungleichungen gewährleistet, da nur diese weiterhin benötigt werden. Als Beispiel erwähnen wir:

(a_1) *In* $\mathfrak{x}$ *ist* $A(x,y)=x^a A_1(x,y)$, $C(x,y)=x^c C_1(x,y)$ *mit reellen Zahlen* a, c *und* $c>-1$, $c-a>-2$. A_1, C_1 *sind stetig differenzierbar,* A_{1xy}, A_{1yy}, C_{1xy}, C_{1yy} *stetig, und es gilt:*

$$0<\mathfrak{A}_0\leq A_1(x,y)\leq \mathfrak{A}_1,\qquad 0<\mathfrak{C}_0\leq C_1(x,y)\leq \mathfrak{C}_1.$$

§ 2. Die singuläre Integralgleichung.

Jetzt soll die Methode dargelegt werden, die uns zur Lösung des Anfangswertproblems führt. Sie ist analog der in [5], ihre Durchführung wird aber wegen der zugelassenen Unstetigkeiten der Koeffizienten von (1) auf $\mathfrak{k}$ schwieriger.

Es sei $\mathfrak{k}_\varepsilon$ eine Parallele zur Anfangskurve $\mathfrak{k}$ im Abstande $\varepsilon>0$. Die Schnittpunkte der Charakteristiken $Z(x;x_0,y_0)$, $Y(x;x_0\,y_0)$ durch P_0 mit $\mathfrak{k}_\varepsilon$ werden mit $P_{1,\varepsilon}$, $P_{2,\varepsilon}$ bezeichnet. Durch Y, Z und $\mathfrak{k}_\varepsilon$ wird das abgeschlossene Gebiet $\mathfrak{g}_{0\varepsilon}$ begrenzt, welches für $\varepsilon\to 0$ in das Einflußgebiet $\mathfrak{g}_0$ übergeht. Wir integrieren (1) über $\mathfrak{g}_{0\varepsilon}$ und erhalten

$$\iint\limits_{\mathfrak{g}_{0\varepsilon}} \{(A\,u_x)_x-(C\,u_y)_y\}\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{g}_{0\varepsilon}}(D\,u+F)\,dx\,dy. \tag{2.1}$$

Eine Umformung von (2.1) ergibt (vgl. [5])

$$\left\{\begin{aligned} u(P_0)=\frac{1}{2K(P_0)}\Big\{&K\,u|_{P_{1,\varepsilon}}+K\,u|_{P_{2,\varepsilon}}+\int\limits_{P_{1,\varepsilon}}^{P_0}u\,dK+\int\limits_{P_{2,\varepsilon}}^{P_0}u\,dK+\\ &+\int\limits_{P_{2,\varepsilon}}^{P_{1,\varepsilon}}(C\,u_y\,dx+A\,u_x\,dy)+\iint\limits_{\mathfrak{g}_{0\varepsilon}}(D\,u+F)\,dx\,dy\Big\}\text{[10]}. \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

[10]) Transformiert man (1) auf charakteristische Koordinaten ξ,η mit $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, wobei φ,ψ den Differentialgleichungen $\sqrt{A}\,\varphi_x+\sqrt{C}\,\varphi_y=0$, $\sqrt{A}\,\psi_x-\sqrt{C}\,\psi_y=0$ zu genügen haben, so erhält man mit $\Phi=\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x$

$$(K(\xi,\eta)\,u_\xi)_\eta+(K(\xi,\eta)\,u_\eta)_\xi-\frac{D(\xi,\eta)}{\Phi(\xi,\eta)}\,u=\frac{F(\xi,\eta)}{\Phi(\xi,\eta)}. \tag{*}$$

Integriert man (*) in der ξ,η-Ebene (wo die Charakteristiken Parallele zu den Koordinatenachsen sind) über ein Einflußgebiet $\mathfrak{g}_\varepsilon(\xi_0,\eta_0)$ und transformiert den dabei entstehenden Ausdruck zurück, so ergibt sich (2.2).

Wegen $dx=0$ auf $\mathfrak{k}_\varepsilon$ erhalten wir für $\varepsilon\to 0$ die singuläre Funktionalgleichung

$$(2.3)\qquad \begin{cases} u(P_0)=\dfrac{1}{2K(P_0)}\Big\{K\,u|_{P_1}+K\,u|_{P_2}+\displaystyle\int_{P_1}^{P_0} u\,dK+\int_{P_2}^{P_0} u\,dK+ \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{P_2}^{P_1} A\,u_x\,dy+\iint_{\mathfrak{g}_0}(D\,u+F)\,dx\,dy\Big\}. \end{cases}$$

Diese ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen u mit der Gl. (1) äquivalent. Auf $\mathfrak{k}$ werden zweimal stetig differenzierbare Funktionen als Anfangswerte vorgeschrieben. *Eine Funktion $u(P_0)=u(x_0, y_0)$ wird Lösung eines solchen Anfangswertproblems genannt, wenn sie 1. in $\mathfrak{r}'$ stetig, in $\mathfrak{r}'-\mathfrak{k}$ stetig differenzierbar und das „Energieintegral"*

$$(2.4)\qquad E[u]=\iint_{\mathfrak{g}_0}\{A\,u_x^2+C\,u_y^2+|D|\,u^2\}\,dx\,dy<\infty$$ [11])

ist; 2. die Relation (2.3) für jedes Einflußgebiet $\mathfrak{g}_0$ erfüllt und die Anfangsbedingungen im Sinne zweidimensionaler Konvergenz annimmt[12]).

Sicher nur in ausgezeichneten Fällen werden auf $\mathfrak{k}$ die CAUCHYschen Anfangsbedingungen

$$(2.5)\qquad \lim_{x\to 0} u(x, y)=u_0(y),\qquad \lim_{x\to 0} u_x(x, y)=u_1(y)$$

möglich sein. Für U als gesuchte Funktion mit $u=U+x\,u_1+u_0$ werden diese auf Null reduziert. Bezeichnet man (2.3) [als Grenzwert von (2.2) verstanden] mit $u=L^{-1}[F]$, so findet man leicht $u_0=L^{-1}[L[u_0]]$, $x\,u_1=L^{-1}[L[x\,u_1]]$ und damit für U die Funktionalgleichung $U=L^{-1}[F-L[x\,u_1]-L[u_0]]$, die mit (2.3) äquivalent ist. Ausgeschrieben (und wieder als Grenzwert verstanden) ergibt sich

$$(2.6)\qquad \begin{cases} U(P_0)=\dfrac{1}{2K(P_0)}\Big\{K\,U|_{P_1}+K\,U|_{P_2}+\displaystyle\int_{P_1}^{P_0} U\,dK+\int_{P_2}^{P_0} U\,dK+ \\ \qquad\qquad +\displaystyle\int_{P_2}^{P_1} A\,U_x\,dy+\iint_{\mathfrak{g}_0}(D\,U+G)\,dx\,dy\Big\}, \end{cases}$$

$$(2.7)\qquad \begin{cases} G=F-A_x\,u_1(y)+C\,(x\,u_1''(y)+u_0''(y))+ \\ \qquad +C_y\,(x\,u_1'(y)+u_0'(y))+D\,(x\,u_1(y)+u_0(y)). \end{cases}$$

An Stelle von (2.6) betrachten wir lediglich

$$(2.8)\qquad U(P_0)=\frac{1}{2K(P_0)}\Big\{\int_{P_1}^{P_0} U\,dK+\int_{P_2}^{P_0} U\,dK+\iint_{\mathfrak{g}_0}(D\,U+G)\,dx\,dy\Big\}.$$

---

[11]) $2L[u]$ ist die EULERsche Gleichung des nicht positiv definiten Variationsausdruckes $E^*[u]=\iint\{A\,u_x^2-C\,u_y^2+D\,u^2\}\,dx\,dy$. Wegen (2.4) ist $|E^*[u]|<\infty$.

[12]) Die Lösung erfüllt im Innern auch (1) oder jedenfalls die auf die „hyperbolische Normalform" transformierte Gl. (1), wenn auf jedem $\mathfrak{k}_\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) mit den dort bekannten Werten u, u_x, u_y die (2.3) erfüllen ein klassisches CAUCHYsches Anfangswertproblem für (1) gelöst werden kann.

Dieser Kunstgriff ist nur dann sinnvoll, wenn wir von den Lösungen der Funktionalgleichung (2.8) zeigen können, daß sie die Relationen

$$(2.9)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} K\,U|_{P_{1,\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} K\,U|_{P_{2,\varepsilon}} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{P_{2,\varepsilon}}^{P_{1,\varepsilon}} A\,U_x\,dy = 0$$

erfüllen. Dann sind nämlich Lösungen von (2.8) auch solche von (2.6) und damit auch von (2.3).

Unter Beachtung von § 1 kann (2.8) explizit ausgeschrieben werden. Man hat mit $H(x_0, y_0) = \iint\limits_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} G\,dx\,dy$

$$(2.10)\quad \begin{cases} U(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \displaystyle\int_0^{x_0} \big(U(x, Z(x; x_0, y_0))\, L_2(x, Z(x; x_0, y_0)) + \\ \qquad + U(x, Y(x; x_0, y_0))\, L_1(x, Y(x; x_0, y_0))\big)\,dx + \\ \qquad + \displaystyle\iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D(x, y)\, U(x, y)\,dx\,dy + H(x_0, y_0)\Big\}. \end{cases}$$

Für die Ableitungen erhält man (wieder in abgekürzter Schreibweise)

$$(2.11)\quad \begin{cases} U_{x_0}(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \displaystyle\int_0^{x_0} (U_y(x,Z) L_2(x,Z) Z_{x_0} + U_y(x,Y) L_1(x,Y) Y_{x_0})\,dx + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{x_0} (U(x,Z)\, L_{2y}(x,Z)\, Z_{x_0} + U(x,Y)\, L_{1y}(x,Y)\, Y_{x_0})\,dx + \\ \qquad + \Big(\displaystyle\iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\,U\,dx\,dy\Big)_{x_0} + H_{x_0}(x_0, y_0)\Big\}, \end{cases}$$

$$(2.12)\quad \begin{cases} U_{y_0}(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \displaystyle\int_0^{x_0} (U_y(x,Z) L_2(x,Z) Z_{y_0} + U_y(x,Y) L_1(x,Y) Y_{y_0})\,dx + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{x_0} (U(x,Z)\, L_{2y}(x,Z)\, Z_{y_0} + U(x,Y)\, L_{1y}(x,Y)\, Y_{y_0})\,dx - \\ \qquad - 2K_{y_0}(x_0, y_0) U(x_0, y_0) + \Big(\displaystyle\iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\,U\,dx\,dy\Big)_{y_0} + H_{y_0}(x_0, y_0)\Big\}. \end{cases}$$

In den folgenden Sätzen ist die Bezeichnung von § 1 (Zusammenfassung) gebraucht. Dabei wird wesentlich benutzt, daß $l - k + 1 = 0$ ist. Um die Übersicht nicht zu erschweren und den Aufwand gering zu halten, setzen wir weiterhin $D \equiv 0$ in (1) voraus. Die folgenden zwei Sätze bleiben in derselben Fassung auch für $D \not\equiv 0$ gültig. Im Anhang zu § 2 werden wir dies für Satz 1 zeigen.

Satz 1. *Ist* $h > 0$, $h - k > 0$ *und* $\dfrac{\Omega}{\mathfrak{R}\,h} < 1$, *so hat* (2.10) *eine in* $\mathfrak{r}'$ *stetige Lösung* $U(x_0, y_0)$ *mit* $\lim\limits_{x_0\to 0} U(x_0, y_0) = 0$. *Es ist überdies* $|U(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}$.

Mit dieser Lösung sind die folgenden Ausdrücke V, W, als Funktionen von x_0, y_0 aufgefaßt, bedingt stetig und genügen daher Abschätzungen der

angegebenen Form:

$$(2.13)\quad \begin{cases} |V(x_0, y_0; U)| \equiv \left| \int_0^{x_0} (U(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{x_0} + U(x, Y)\, L_{1y}(x, Y)\, Y_{x_0})\, dx + \right. \\ \qquad \left. + H_{x_0}(x_0, y_0) \right| \leq \mathfrak{V}\, x_0^v, \end{cases}$$

$$(2.14)\quad \begin{cases} |W(x_0, y_0; U)| \equiv \left| \int_0^{x_0} (U(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{y_0} + U(x, Y)\, L_{1y}(x, Y)\, Y_{y_0})\, dx - \right. \\ \qquad \left. - 2K_{y_0}(x_0, y_0)\, U(x_0, y_0) + H_{y_0}(x_0, y_0) \right| \leq \mathfrak{W}\, x_0^w\ ^{13}). \end{cases}$$

Satz 2. *Ist* $h > 0$, $h - k > 0$, $v - k > 0$, $w > 0$, $w - k > 0$, $w - k + z > 0$, $h - w > 0$ *und* $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} < 1$, $\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}\, w} < 1$, *so hat* (2.10) *eine stetig differenzierbare Lösung* $U(x_0, y_0)$ *mit* $\lim\limits_{x_0 \to 0} U(x_0, y_0) = \lim\limits_{x_0 \to 0} U_{x_0}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x_0 \to 0} U_{y_0}(x_0, y_0) = 0$. *Es ist überdies*

$$(2.15)\quad \begin{cases} |U(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}, \qquad |U_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_1\, x_0^{\mathrm{Min}\{v-k,\ w-k+z\}}, \\ \qquad\qquad |U_{y_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_2\, x_0^{w-k}\ ^{14}). \end{cases}$$

Beweis (Satz 1). Für (2.10) wird eine Folge von Funktionen $U^n(x_0, y_0)$ definiert durch

$$(2.16)\quad \begin{cases} U^n(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \times \\ \times \left\{ \int_0^{x_0} (U^{n-1}(x, Z)\, L_2(x, Z) + U^{n-1}(x, Y)\, L_1(x, Y))\, dx + H(x_0, y_0) \right\} \end{cases}$$

mit $U^0 \equiv 0$. Mit vollständiger Induktion bei Beachtung von $l - k + 1 = 0$ findet man

$$(2.17)\qquad |U^n(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} \right)^{\nu} x_0^{h-k} \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \frac{1}{1 - \dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h}}\, x_0^{h-k}.$$

Jedes U^n ist stetig und $\lim\limits_{x_0 \to 0} U^n(x_0, y_0) = 0$. Durch $U = \lim\limits_{n \to \infty} U^n = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (U^\nu - U^{\nu-1})$ wird eine Grenzfunktion erklärt. Man hat wegen (2.17)

$$\lim_{x_0 \to 0} U(x_0, y_0) = 0, \qquad |U(x_0, y_0) \leq \mathfrak{U}\, x_0^{h-k}$$

und mittels Induktion

$$(2.18)\quad |U^\nu(x_0, y_0) - U^{\nu-1}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} \right)^{\nu-1} x_0^{h-k} < \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}\, h} \right)^{\nu-1}$$

bei Beachtung von $x_0 \leq 1$ (1.1). $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |U^\nu - U^{\nu-1}|$ ist gleichmäßig konvergent,

---

13) v, w können negativ sein.

14) Ähnliche Sätze sind unter stärkeren Voraussetzungen in [5] bewiesen worden. Obige Sätze haben für unsere Problemstellung abschließenden Charakter. Die Ungleichung $h - w > 0$ ist unwesentlich und nur durch den Beweisgang bedingt.

$U(x_0, y_0)$ also stetig. Weiter wird etwa

$$(2.18a)\qquad \left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U(x, Z) - U^{n-1}(x, Z)) L_2(x, Z)\, dx \right| < \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h}} \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h}\right)^n < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$. Somit darf der Grenzübergang $n \to \infty$ auch unter dem Integral in (2.16) durchgeführt werden und Satz 1 ist bewiesen.

Beweis (Satz 2). Für (2.10), (2.11), (2.12) wird eine Folge von Funktionen $U^n(x_0, y_0)$ durch (2.16) und

$$(2.19)\qquad \begin{cases} U^n_{y_0}(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \displaystyle\int_0^{x_0} (U^{n-1}_y(x, Z)\, L_2(x, Z)\, Z_{y_0} + \\ \qquad + U^{n-1}_y(x, Y)\, L_1(x, Y)\, Y_{y_0})\, dx + W(x_0, y_0; U^{n-1}) \Big\}^{15}), \end{cases}$$

$$(2.20)\qquad \begin{cases} U^n_{x_0}(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \Big\{ \displaystyle\int_0^{x_0} (U^{n-1}_y(x, Z)\, L_2(x, Z)\, Z_{x_0} + \\ \qquad + U^{n-1}_y(x, Y)\, L_1(x, Y)\, Y_{x_0})\, dx + V(x_0, y_0; U^{n-1}) \Big\}^{15}) \end{cases}$$

definiert mit $U^0 \equiv 0$. Mit vollständiger Induktion findet man (2.16) und

$$(2.21)\qquad |U^n_{y_0}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{W}}{2\mathfrak{K}} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu-1} x_0^{w-k},$$

$$(2.22)\qquad |U^n_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \frac{\mathfrak{V}}{2\mathfrak{K}} x_0^{v-k} + \frac{\mathfrak{W}}{2\mathfrak{K}} \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K}} \frac{\mathfrak{Z}}{w} \sum_{\nu=0}^{n-2} \left(\frac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu} x_0^{w-k+z}.$$

Jedes U^n ist stetig differenzierbar und erfüllt die im Satz genannten drei Anfangsbedingungen. Durch $U = \lim_{n\to\infty} U^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} (U^\nu - U^{\nu-1})$ wird eine Grenzfunktion erklärt, die die Anfangsbedingungen und die Abschätzungen (2.15) erfüllt. Mit (2.18), (2.19) und Fußnote [15]) findet man

$$(2.23)\qquad \begin{cases} |W(x_0, y_0; U^{\nu-1}) - W(x_0, y_0; U^{\nu-2})| \leq \dfrac{\mathfrak{H}\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K}} \left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h}\right)^{\nu-2} \dfrac{x_0^h}{h} + \dfrac{\mathfrak{H}\,\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}} \left(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h}\right)^{\nu-1} x_0^h \\ \qquad \leq \mathfrak{P} \left(\dfrac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} h}\right)^{\nu-1} x_0^h \quad mit \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{H} \left(\dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}} + \dfrac{\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}}\right) \\ \qquad \leq \mathfrak{P} \left(\dfrac{\mathfrak{L}\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu-1} \left(\dfrac{w}{h}\right)^{\nu-1} x_0^w \quad wegen \quad h - w > 0. \end{cases}$$

---

[15]) Die Bedeutung von $V(x_0, y_0; U^{n-1})$ ist mit (2.13) klar. $W(x_0, y_0; U^{n-1})$ ist erklärt durch

$$\int_0^{x_0} (U^{n-1}(x, Z)\, L_{2y}(x, Z)\, Z_{y_0} + U^{n-1}(x, Y)\, L_{1y}(x, Y)\, Y_{y_0})\, dx - \\ - 2K_{y_0}(x_0, y_0)\, U^n(x_0, y_0) + H_{y_0}(x_0, y_0).$$

Die Abschätzungen von V, W sind wegen (2.17) unabhängig von n.

Dabei ist zu beachten, daß $\mathfrak{Y} \geq 1$ ist (§ 1). Durch Induktionsschluß bestätigt man

$$(2.24)\quad |U^{\nu}_{y_0}(x_0, y_0) - U^{\nu-1}_{y_0}(x_0, y_0)| \leq \frac{1}{2\mathfrak{K}} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu-1} \left\{\mathfrak{W} + \mathfrak{P} \sum_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{w}{h}\right)^{j}\right\} x_0^{w-k}.$$

Damit ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} |U^{\nu}_{y_0} - U^{\nu-1}_{y_0}|$ gleichmäßig konvergent und U_{y_0} stetig. Der Grenzübergang $n \to \infty$ darf unter den Integralen in (2.19) vorgenommen werden. Bei W ist dies klar (Satz 1), für die anderen Glieder wird etwa

$$\left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U_{y_0}(x, Z) - U^{n-1}_{y_0}(x, Z))\, L_2(x, Z)\, Z_{y_0}\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{4\mathfrak{K}} \left(\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{P}}{1 - \frac{w}{h}}\right) \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{n} < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$.

Mit (2.18), (2.24) findet man aus (2.20) mit etwas Zwischenrechnung

$$(2.25)\quad |U^{\nu}_{x_0}(x_0, y_0) - U^{\nu-1}_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{Q} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{\nu-1} x_0^{w-k+z}.$$

Damit ist auch U_{x_0} stetig. Der Grenzübergang $n \to \infty$ darf in (2.20) unter den Integralen durchgeführt werden. Bei V ist dies klar. Andererseits ist mit (2.24)

$$\left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U_{y_0}(x, Z) - U^{n-1}_{y_0}(x, Z))\, L_2(x, Z)\, Z_{x_0}\, dx \right|$$

$$\leq \frac{\mathfrak{Z}}{4\mathfrak{K}^2} \left(\mathfrak{W} + \frac{\mathfrak{P}}{1 - \frac{w}{h}}\right) \frac{1}{1 - \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}} \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}\right)^{n} < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$ da $x_0^{w-k+z} \leq 1$ ist. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Anhang.

Wir betrachten die Differentialgleichung (1) mit $D(x, y) \not\equiv 0$ und beweisen Satz 1:

Beweis. Für (2.10) wird eine Folge von Funktionen $U^n(x_0, y_0)$ definiert durch

$$(2.26)\quad \begin{cases} U^n(x_0, y_0) = \dfrac{1}{2K(x_0, y_0)} \left\{ \displaystyle\int_0^{x_0} (U^{n-1}(x, Z)\, L_2(x, Z) + \right. \\ \qquad \left. + U^{n-1}(x, Y)\, L_1(x, Y))\, dx + \displaystyle\iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\, U^{n-1}\, dx\, dy + H(x_0, y_0) \right\} \end{cases}$$

mit $U^0 \equiv 0$. Man hat $|U^1| \leq \frac{\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} x_0^{h-k}$. Wegen $|D\, U^1| \leq \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{2\mathfrak{K}} x^{d+h-k}$ ergibt sich mit (1.14)

$$\left| \iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\, U^1\, dx\, dy \right| \leq \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{H}\bar{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{x_0^{\frac{c-a}{2} + d + h - k + 2}}{(d + h - k + 1)}.$$

Da $d > -1$ ergibt sich $d + h - k + 1 > 0$. Mit Vor. (I), (b) setzen wir $d - a + 2 = \eta > 0$ und erhalten $\frac{c-a}{2} + d + h - k + 2 = h + \eta$. Aus (2.26) folgert man

$$(2.27)\quad |U^2(x_0, y_0)| \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} (1 + T)\, x_0^{h-k} \quad \text{mit} \quad T = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h} + \frac{\mathfrak{D}\,\bar{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{x_0^{\eta}}{(d + h - k + 1)}.$$

Die x_0-Abhängigkeit von T darf nicht unterdrückt werden. Mit leichten Abschätzungen findet man

$$\left| \int_0^{x_0} U^2(x, Z)\, L_2(x, Z)\, dx \right| \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{L}}{2\mathfrak{K}} \frac{1 + T}{h}\, x_0^h,$$

$$\left| \iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} D\, U^2\, dx\, dy \right| \leq \frac{\mathfrak{D}\,\tilde{\mathfrak{H}}\,\bar{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{1 + T}{(d + h - k + 1)}\, x_0^{h+\eta},$$

$$|U^3(x_0, y_0)| \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} (1 + T + T^2)\, x_0^{h-k}$$

und mit vollständiger Induktion bei analogen Abschätzungen

$$(2.28)\quad |U^n(x_0, y_0)| \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \sum_{\nu=0}^{n-1} T^{\nu}\, x_0^{h-k} \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{1}{1 - T}\, x_0^{h-k},$$

indem wir beachten, daß $0 < T < 1$ in einem geeigneten Rechteck $\mathfrak{r}'$ gilt. An Stelle von (2.18) erhalten wir

$$(2.29)\quad |U^{\nu}(x_0, y_0) - U^{\nu-1}(x_0, y_0)| \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}}\, T^{\nu-1}\, x_0^{h-k} \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}}\, T^{\nu-1}.$$

Indem wir nun T durch eine Konstante $\mathfrak{T} < 1$ abschätzen wird wie bei (2.18a)

$$(2.30)\quad \left| \frac{1}{K(x_0, y_0)} \int_0^{x_0} (U(x, Z) - U^{n-1}(x, Z))\, L_2(x, Z)\, dx \right| \leq \frac{\tilde{\mathfrak{H}}}{2\mathfrak{K}} \frac{\mathfrak{T}^n}{1 - \mathfrak{T}} < \varepsilon$$

für $n > N(\varepsilon)$. Damit ist alles bewiesen.

§ 3. Die Lösung des Anfangswertproblems.

Es müssen auf $\mathfrak{k}$ geeignete Vorgaben gefunden werden, so daß wir mit diesen eine Lösung von (2.3) in dem dort genannten Sinne finden. Dabei werden stets die Voraussetzungen (I) mit (c_2) gemacht. Die am Ende von § 1 gegebene Zusammenfassung wird laufend benutzt. Zunächst werden einige Angaben über die Qualität der in Satz 2 angeführten Ungleichungen benötigt.

$G(x, y)$ ist durch (2.7) gegeben. Mit Vor. (c_2) hat man $|G(x, y)|, |G_y(x, y)| \leq \mathfrak{G}\, x^{\varepsilon}$. Dabei ist

$$g = \operatorname{Min} \left\{ f,\ \begin{matrix} a - 1 \ (\text{wenn } a \neq 0) \\ \alpha - 1 \ (\text{wenn } a = 0) \end{matrix},\ \begin{matrix} c \ (\text{wenn } u_0(y) \neq \text{const}) \\ c + 1 \ (\text{wenn } u_0(y) = \text{const}) \end{matrix},\ \begin{matrix} d \ (\text{wenn } u_0(y) \neq \text{const}) \\ d + 1 \ (\text{wenn } u_0(y) = \text{const}) \end{matrix} \right\}.$$

Satz 3. *Ist* $g > -1$, $g - a > -2$ *so gilt*:

(α) $h > 0$, $h - k > 0$, $w > 0$, $w - k > 0$ *und* $h - w > 0$;

(β) $w - k + z > v - k$;

(γ) $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h} < 1$, $\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w} < 1$

in einem geeigneten Rechteck $\mathfrak{r}'$.

Beweis. (α) Es ist $h = \frac{c-a}{2} + g + 2 > 0$ wegen $c - a > -2$, $h - k = g - a + 2 > 0$. Mit (γ) ist Satz 1 anwendbar und liefert $|U| \leq \mathfrak{U} x^{h-k}$. Die w-Bestimmung (2.14) ergibt $w = h$. Sicher ist auch $w = h - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein zulässig. Dann ist $h - w = \varepsilon > 0$ und $w - k > 0$. (β) Die v-Bestimmung (2.13) liefert $v = \operatorname{Min}\left\{h + \frac{c-a}{2}, h - 1\right\} = h - 1$ wegen $c - a > -2$. Man hat $w - k + z = h + \frac{c-a}{2} - k - \varepsilon > h - 1 - k = v - k$. ($\gamma$) In der Bezeichnungsweise von § 1 ist in $\mathfrak{r}'_\delta$:

$$\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{K} h} = \frac{\left\| \frac{|a+c|}{2} \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1} \right\|}{h \left\| \sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0} \right\|} \leq \frac{|a+c| \left(\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1} + 2\varepsilon_1\right)}{2h \left(\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0} - \varepsilon_2\right)} = \frac{|a+c|}{2h} \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}} \frac{1 + \frac{2\varepsilon_1}{|a+c| \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}}}{1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}}}$$

bei $|a+c| \neq 0$. Für $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{C}_0$; $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}_1$ dürfen die kleinsten und größten Werte von $A_0(y)$, $C_0(y)$ in $\mathfrak{r}'_\delta$ eingesetzt werden: $\sqrt{\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{C}_0}} = 1 + \varepsilon_3$. Es verbleibt daher zu zeigen, daß $\frac{|a+c|}{2h} < 1$ ist. 1. $a + c > 0$. Die Ungleichung folgt dann aus $g - a > -2$. 2. $a + c < 0$. Die Ungleichung folgt aus $g + c > -2$. Analog verfährt man bei $\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{Y}}{\mathfrak{K} w}$, indem man beachtet, daß $\mathfrak{Y} = 1 + \varepsilon_4$ in $\mathfrak{r}'_\delta$ gesetzt werden darf. Für $a + c = 0$ sind die Ungleichungen trivial.

Bemerkungen. 1. Mit (β) ergibt sich in Satz 2 die Verschärfung: $|U_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_1 x_0^{v-k}$. 2. Lösungen der Funktionalgleichung (2.8) mit $|U(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U} x_0^{h-k}$, $|U_{x_0}(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}_1 x_0^{v-k}$ erfüllen die Relationen (2.9), denn es ist:

$$|K U| \leq \mathfrak{K}_1 x_0^h, \qquad |A U_{x_0}| \leq \mathfrak{A} \mathfrak{U}_1 x_0^{v-k+a}$$

mit $h > 0$, $v - k + a = h - 1 - k + a = g + 1 > 0$. 3. Für Lösungen der Funktionalgleichung (2.6) mit $\lim_{x_0 \to 0} U(x_0, y_0) = \lim_{x_0 \to 0} U_{x_0}(x_0, y_0) = 0$ ist das Bestehen der Ungleichungen $h - k > 0$, $v - k > 0$ notwendig.

Wir geben nun die vollständigen Fallunterscheidungen für das Anfangswertproblem der Gl. (1) unter Vor. (I)[16]) mit (c_2) und setzen $D(x, y) \equiv 0$ voraus. Die Angaben für $D \not\equiv 0$ werden in Klammern gesetzt.

1. Fall: $a = 0$, $c > -1$, $(d > -1)$, $f > -1$.

Vorgaben: $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$.

[16]) Es sei erinnert, daß für Vor. (a) auch (a_1) oder eine gleichwertige zulässig ist (§ 1).

$\mathfrak{k}$ *ist a) hyperbolische Anfangskurve mit* $0 < A + C < \infty$ *(bei* $c = 0$*) oder b) parabolische Anfangskurve mit* $A + C > 0$.

I. $F(x, y) \equiv 0$. Man setzt $u = U + x\, u_1 + u_0$ und kommt zur Gl. (2.6), die mit (2.3) äquivalent ist. Betrachtet wird (2.8). G ist durch (2.7) mit $D \equiv F \equiv 0$ gegeben. Man hat $g = \text{Min}\,\{\alpha - 1, c\}$, $g > -1$.

1. $g = \alpha - 1$. Man findet $v = \frac{c}{2} + \alpha$, $v - k = \alpha > 0$. Mit Satz 3 sind alle Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt. Damit ist eine Lösung der Gl. (2.8) aufgefunden, die wegen Bemerkung 2 auch Lösung von (2.6) ist. Man zeigt leicht $E[u] < \infty$ (2.4).

2. $g = c$. Man findet $v = \frac{3c}{2} + 1$, $v - k = c + 1 > 0$ und schließt wie oben weiter.

II. $F(x, y) \not\equiv 0$. Es genügt hier bekanntlich eine Lösung von (1) mit $\lim_{x \to 0} u(x, y) = \lim_{x \to 0} u_x(x, y) = 0$ zu finden. Man setzt also $u = U$ und $G = F$. Also wird $g = f$ und $g > -1$, $v = \frac{c}{2} + f + 1$, $v - k = f + 1 > 0$ und weiter wie oben.

Die in I. und II. bestimmten Lösungen U^{I}, U^{II} erfüllen (2.8) und auch (2.6) und damit erfüllt $u^{\mathrm{I,II}} = U^{\mathrm{I,II}} + x\, u_1 + u_0$ die Funktionalgleichung (2.3). $u = u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}$ ist die Lösung des Gesamtproblems, die wir durch entsprechende Wiederholungen des Verfahrens unter Benutzung des Eindeutigkeitssatzes (§ 4) in einem geeigneten Streifen $\mathfrak{s}$ um die Anfangskurve $\mathfrak{k}$ finden. $u(x, y)$ ist in $\mathfrak{s}$ stetig differenzierbar mit $E[u] < \infty$[17]), erfüllt in $\mathfrak{s}$ die Funktionalgleichung (2.3) und nimmt die Anfangswerte im Sinne zweidimensionaler Konvergenz an. Es ist also auch $\lim_{x \to 0} u_y(x, y) = u_0'(y)$.

2. Fall: $c - a > -1$, $(d - a > -1)$, $f - a > -1$ **mit** $a \neq 0$.

Vorgaben: $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim_{x \to 0} u_x(x, y) = 0$.

$\mathfrak{k}$ *ist a) hyperbolische Anfangskurve mit* $A + C = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ *(bei* $c = a$*) oder b) parabolische Anfangskurve.*

I. $F(x, y) \equiv 0$. Man setzt $u = U + u_0$ und kommt zur Gl. (2.6). Betrachtet wird (2.8). Man findet mit (2.7) $G = C\, u_0''(y) + C_y\, u_0'(y)$ und damit $g = c > -1$, $g - a > -1$. Es wird $v = \frac{c - a}{2} + c + 1$, $v - k = c - a + 1 > 0$. Satz 3 und Bemerkung 2 liefert die Anwendbarkeit von Satz 2 und das Erfülltsein von (2.9). Mit den Ungleichungen $|A\, u_x^2| = |A\, U_x^2| \leq \mathfrak{A}\, \mathfrak{U}_1^2\, x^{2c - a + 2}$, $|C\, u_y^2| = |C\, (U_y + u_0')^2| \leq \mathfrak{B}\, x^c$ erschließt man $E[u] < \infty$.

II. $F(x, y) \not\equiv 0$ bleibt dem Leser überlassen.

Die Lösung $u(x, y)$ des Gesamtproblems hat dieselben Eigenschaften wie im 1. Falle.

3. Fall: $c - a > -2$, $(d - a > -2)$, $f - a > -2$ **mit** $a \neq 0$[18]).

Vorgabe: $\lim_{x \to 0} u(x, y) = u_0(y)$.

---

[17]) Aus $E[u^{\mathrm{I}}] < \infty$, $E[u^{\mathrm{II}}] < \infty$ folgt $E[u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}}] < \infty$.

I. $F(x, y) \equiv 0$. Wir setzen $u = U + u_0$ und erhalten dieselben Größen wie im 2. Falle. Es ist $g > -1$, $g - a > -2$ aber a) $v - k = 0$ wenn $c - a = -1$, b) $v - k < 0$ wenn $c - a < -1$ ist. Mit Satz 3 folgt, daß bis auf $v - k$, $w - k + z$ alle Ungleichungen des Satzes 2 erfüllt sind. Der Beweisgang von Satz 2 zeigt, daß für U, U_y alle Aussagen erhalten bleiben. Aus (2.22) entnimmt man für a) $\lim_{x \to 0} |U_x(x, y)| \leq \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}$, da mit Satz 3 ($\beta$) $w - k + z > 0$ ist. Mit Bemerkung 2 sind die Relationen (2.9) erfüllt, der Übergang von (2.8) zu (2.3) also möglich. Daß auch $E[u] < \infty$ besteht, erkennt man wie im zweiten Falle mit (1.14) wegen $2c - a + 2 = c + (c - a) + 2 > -1$.

II. $F(x, y) \not\equiv 0$ analog.

Die Lösung $u(x, y)$ und $u_y(x, y)$ sind in einem Streifen $\mathfrak{s}$ um die Anfangskurve $\mathfrak{k}$ stetig mit $E[u] < \infty$. $u_x(x, y)$ ist in $\mathfrak{s} - \mathfrak{k}$ stetig. u erfüllt in $\mathfrak{s}$ die Funktionalgleichung (2.3) und nimmt die Anfangswerte im Sinne zweidimensionaler Konvergenz an. Es ist also $\lim_{x \to 0} u_y(x, y) = u_0'(y)$. Ist $c - a = -1$, $f - a \geq -1$ bzw. $c - a \geq -1$, $f - a = -1$, so ist überdies $\lim_{x \to 0} u_x(x, y)$ beschränkt.

Die gegebenen Fallunterscheidungen sind vollständige und unter unseren Voraussetzungen auch endgültige. Die folgenden *Ergänzungen* sind nützlich.

1. Sind die Koeffizienten in (1) auch auf $\mathfrak{k}$ stetig, also $a \geq 0$, $c \geq 0$, ($d \geq 0$), $f \geq 0$, so genügt bereits Vor. (I) mit (c_1). Man hat dann nicht nötig, von der Ungleichung (1.16) Gebrauch zu machen; es genügt (1.15).

2. Nur im 1. Falle sind die in der Einleitung genannten 3 Forderungen erfüllbar. Sie erweisen sich als nicht notwendig für die CAUCHYschen Anfangsvorgaben. Vielmehr ist für diese Vorgaben das Vorliegen des Falles 1 notwendig und hinreichend. Analoges gilt für die anderen Fälle. Man erschließt dies mit Bemerkung 3. Beachtet sei jedoch in diesem Zusammenhange unser recht allgemeiner Lösungsbegriff [18a]).

§ 4. Eindeutigkeit der Lösung.

Diese soll für unsere drei Fälle gemeinsam bewiesen werden. Wegen der Äquivalenz von (2.3) und (2.6) genügt es, sie für (2.6) zu beweisen. $U = u - x u_1 - u_0$ bzw. $U = u - u_0$ hat dann den Anfangsbedingungen $\lim_{x \to 0} U(x, y) = \lim_{x \to 0} U_x(x, y) = 0$ bzw. $\lim_{x \to 0} U(x, y) = 0$ zu genügen. Mit Bemerkung 3 (§ 3) kommen wir zu

Satz 4. *Die Gl.* (2.6) *hat höchstens eine in* $\mathfrak{r}'$ *stetige Lösung* U^1 *mit* $|U^1(x, y)| \leq \mathfrak{U}^1 x^{h-k}$, $|U_x^1(x, y)| \leq \mathfrak{U}_1^1 x^{h-k-1}$ *und* $h > 0$, $h - k > 0$.

Beweis. Gibt es zwei Lösungen U^1, U^2 von (2.6), so genügt $U = U^1 - U^2$ den Abschätzungen $|U| \leq \mathfrak{U} x^{h-k}$, $|U_x| \leq \mathfrak{U}_1 x^{h-k-1}$ und mit Bemerkung 2

[18]) Dabei ist vorausgesetzt, daß nicht alle Ungleichungen des zweiten Falles erfüllt sind.
[18a]) Siehe auch „Zusatz bei der Korrektur" am Schluß der Arbeit.

(§ 3) der Gl. (2.8):

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2K(x_0, y_0)} \left\{ \int_0^{x_0} \big(U(x,Z) L_2(x,Z) + U(x,Y) L_1(x,Y) \big) dx + \iint_{\mathfrak{g}(x_0, y_0)} DU\, dx\, dy \right\}.$$

Durch Induktionsschluß findet man mit analogen Schlüssen, wie sie im Anhang zu § 2 verwendet worden sind, für U die Abschätzung

$$|U(x_0, y_0)| \leq \mathfrak{U}\, \mathfrak{T}^n\, x_0^{k-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wegen $\mathfrak{T} < 1$ folgt daher $U \equiv 0$.

Bemerkung. Die Bedingung $|U_x^1(x, y)| \leq \mathfrak{U}_1^1\, x^{k-k-1}$ kann durch $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{P_{1,\varepsilon}}^{P_{2,\varepsilon}} A\, U_x^1\, dy = 0$ ersetzt werden.

II.

§ 5. Randwertprobleme und Fortsetzung der Lösung.

Jetzt betrachten wir die Gl. (1) mit $D(x, y) \equiv 0$ [19]), $F(x, y) \equiv 0$ in dem Rechteck

$$\tilde{\mathfrak{r}}: \quad r_0 \leq x \leq 0, \qquad s_0 \leq y \leq s_1 \tag{5.1}$$

und machen über die Koeffizienten in (1) die

Voraussetzung (II). *(a) In* $\tilde{\mathfrak{r}} - \mathfrak{k}$ *sind* $A(x, y) = A^1(x)\, A^2(y)$, $C(x, y) = -C^1(x)\, C^2(y)$ *stetig differenzierbar mit* $AC < 0$ [20]). *(b)* $u_3(x)$ *bzw.* $u_3(y)$ *sind auf der Berandung* $\tilde{\mathfrak{b}}$ *von* $\tilde{\mathfrak{r}}$, $u_4(x)$ *bzw.* $u_4(y)$ *sind auf* $\tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}$, $u_5(y)$ *auf* $\mathfrak{k}$ *zweimal stetig differenzierbar.*

Es wird die Gl. (1) mit den Randbedingungen

$$1.\ \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}}} u(x, y) = u_3 \quad \textit{oder} \quad 2.\ \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}} u(x, y) = u_4, \qquad \lim_{x \to 0} u_x(x, y) = u_5(y) \tag{5.2}$$

betrachtet. Durch Einführung einer neuen gesuchten Funktion U dürfen diese Randwertprobleme in der Form $L[U] = G_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ mit den Randwerten

$$1.\ \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}}} U(x, y) = 0 \quad \text{oder} \quad 2.\ \lim_{(x,y) \to \tilde{\mathfrak{b}} - \mathfrak{k}} U(x, y) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} U_x(x, y) = 0 \tag{5.3}$$

angenommen werden. Auf $\mathfrak{k}$ können A, C beliebig hohe Singularitäten haben. Daher werden diese Randwertprobleme im allgemeinen nicht lösbar sein. Um notwendige Bedingungen für ihre Lösbarkeit anzugeben, wurde (1) als „separierbar" vorausgesetzt. Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$-L[U] = \lambda A^2(y)\, C^1(x)\, U \tag{5.4}$$

mit den Randbedingungen (5.3) im HILBERTschen Raum $\mathfrak{R}$:

$$\iint_{\tilde{\mathfrak{r}}} |U|^2 A^2(y)\, C^1(x)\, dx\, dy < \infty .$$

---

[19]) Diese Annahme ist wesentlich.

[20]) Um einige Fallunterscheidungen zu vermeiden, wollen wir A^1, A^2, C^1, C^2 positiv annehmen.

Ist $\Phi_\nu(x, y)$ ein in $\mathfrak{R}$ vollständiges System von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_\nu \neq 0$ mit

$$\iint_{\tilde{\tau}} \Phi_i(x, y)\, \Phi_k(x, y)\, A^2(y)\, C^1(x)\, dx\, dy = \delta_{ik},$$

so erhalten wir bekanntlich formal die Lösung obiger Randwertprobleme in der Form

$$U_i(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_{\tilde{\tau}} G_i(x, y)\, \Phi_\nu(x, y)\, dx\, dy. \tag{5.5}$$

Durch den Ansatz $U = U^1(x)\, U^2(y)$ und $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2$ zerfällt (5.4) und (5.3) in die Eigenwertprobleme (5.6) mit den Randbedingungen (5.7)

$$-(A^1 U^{1\prime})' = \lambda^1 C^1 U^1, \qquad -(C^2 U^{2\prime})' = \lambda^2 A^2 U^2; \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to r_0} U^1(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 0} U^1(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim\limits_{x \to \mathfrak{C}} U^{1\prime}(x) = 0, \\ \lim\limits_{y \to s_0} U^2(y) = \lim\limits_{y \to s_1} U^2(y) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Das zweite Eigenwertproblem ist vom STURM-LIOUVILLEschen Typus, das erste dagegen ist ein (bezüglich $x = 0$) singuläres vom WEYLschen Typus, welches im HILBERTschen Raum $\mathfrak{R}^1$: $\int_{r_0}^{0} |U^1|^2\, C^1(x)\, dx < \infty$ betrachtet werden muß. Irgendwelche Randbedingungen bei $x = 0$ dürfen nur im Grenzkreisfall (vgl. etwa F. RELLICH [12], § 1) gestellt werden. Dieser liegt genau dann vor, wenn $\int_{\delta}^{0} C^1(x)\, dx < \infty$, $\int_{\delta}^{0} |B^1(x)|^2\, C^1(x)\, dx < \infty$ ist. Dabei ist $B^1(x) = \int_{x}^{} \frac{1}{A^1(\xi)}\, d\xi$ und $r_0 < \delta < 0$.

Sämtliche für (5.6) bei $x = 0$ im Grenzkreisfall zulässigen Randbedingungen lauten:

$$U_0^1 \cos\alpha + U_1^1 \sin\alpha = 0, \qquad 0 \leq \alpha < \pi. \tag{5.8}$$

Dabei sind U_0^1, U_1^1 die RELLICHschen Anfangszahlen. Sind $\Psi(x), \Omega(x)$ zwei linear unabhängigen Lösungen mit $\Delta = A^1(\Omega'\Psi - \Omega\Psi') \neq 0$ von

$$-(A^1 Z')' - \mu C^1 Z = 0, \tag{5.9}$$

so werden U_0^1, U_1^1 in bezug auf Ψ, Ω, μ so erklärt: Man definiere $W(x)$ durch $-(A^1 U^{1\prime})' - \mu C^1 U^1 = W(x)\, C^1(x)$ und bestimme zwei Zahlen U_0^1, U_1^1, so daß

$$U^1(x) = U_0^1 \Psi(x) + U_1^1 \Omega(x) - \int_{x}^{0} \frac{\Psi(x)\Omega(y) - \Omega(x)\Psi(y)}{\Delta} W(y)\, C^1(y)\, dy \tag{5.10}$$

wird[21]).

[21]) Man vgl. F. RELLICH [12]. Die genaue Literaturangabe ist [13], S. 111.

Unter den Bedingungen (5.8) soll nun etwa $\lim_{x\to 0} U^{1\prime}(x) = 0$ enthalten sein, wofür die Existenz eines Fundamentalsystems Ψ, Ω von (5.9) mit $\lim_{x\to 0} \Psi'(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \Omega'(x) = \varkappa \neq 0$ notwendig ist. Dafür ist wiederum notwendig, daß $\lim_{x\to 0} A^1(x) \neq 0$ und $\int_\delta^0 C^1(x)\, dx < \infty$ ist. Setzt man nämlich $Y^1 = Z$, $Y^2 = Z'$, so wird

$$Y^2(x) = \frac{1}{A^1(x)} \left\{ A^1(0)\, \varkappa + \mu \int_x^0 C^1(x)\, Y^1(x)\, dx \right\}.$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Bedingungen

$$(5.11) \qquad \lim_{x\to 0} A^1(x) \neq 0, \qquad \int_\delta^0 C^1(x)\, dx < \infty \quad \text{mit} \quad r_0 < \delta < 0$$

notwendig für die Lösbarkeit des Randwertproblems (5) mit der Randbedingung (5.2_2) sind. $\Phi_\nu(x, y) = \Phi_i^1(x)\, \Phi_k^2(y)$ ist dann ein in $\mathfrak{R}$ vollständiges System von Eigenfunktionen, wie dies für (5.5) verlangt wurde. Analog ist bei der Randbedingung (5.2_1) zu verfahren.

Betrachtet man (1) in $\mathfrak{r} + \tilde{\mathfrak{r}}$ unter den Voraussetzungen (I) mit (a) oder (a_1) und (II) und will man die Lösung des Randwertproblems (5.2_2) durch Formulierung eines Anfangswertproblems auf $\mathfrak{k}$ stetig differenzierbar über $\mathfrak{k}$ fortsetzen, so ergeben sich mit unseren Betrachtungen in der Einleitung als notwendige Bedingungen für den *elliptisch-parabolischen* Teil $(\tilde{\mathfrak{r}})$ die Bedingungen (5.11), für den *hyperbolisch-parabolischen* Teil $(\mathfrak{r})$ die Bedingungen $a = 0$, $c > -1$ (§ 3, 1. Fall).

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die Koeffizienten A, C in $\mathfrak{r} + \tilde{\mathfrak{r}}$ ein einheitliches Bildungsgesetz haben. Dies ist der Fall, wenn wir etwa mit Vor. (I) und (a_1) (§ 1) setzen:

$$A(x, y) = |x|^a A^1(x)\, A^2(y), \qquad C(x, y) = \operatorname{sign} x\, |x|^c C^1(x)\, C^2(y).$$

Dabei sind $A^1(x), A^2(y)$; $C^1(x)$, $C^2(y)$ positiv und stetig differenzierbar in $\mathfrak{r} + \tilde{\mathfrak{r}}$. Dann bedeutet (5.11) einfach $a = 0$, $c > -1$ und dieses sind auch genau die im *hyperbolisch-parabolischen* Teil $(\mathfrak{r})$ zu stellenden notwendigen Bedingungen. Schließlich ist damit auch die in der Einleitung angegebene Auszeichnung des einfachen Gleichungstypus (3) gefunden.

Literatur.

[1] Agmon, S., L. Nirenberg and M. H. Protter: A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. Commun. Pure Applied Math. **6**, 455—471 (1953). — [2] Bers, L.: On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. N.A.C.A. Techn. Note No. 2058. 1950. — [3] Frankl, F. J.: Über das Cauchysche Problem für Gleichungen vom gemischten elliptisch-hyperbolischen Typus mit vorgegebenen Anfangsdaten auf der parabolischen Linie. Bull. Acad. Sci. URSS. **8** (1944) (Russisch). — [4] Gellerstedt, S.: Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. Ark. Math. Astr. Fys. **26** (1937). — [5] Haack, W., u. G. Hellwig: Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischtem Typus. Arch. Math. **5**, 60—76 (1954). — [6] Hellwig, G.: Anfangs-

und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern. Math. Z. **58**, 337—357 (1953). — [7] HOLMGREN, E.: Sur un problème aux limites pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. Ark. Math. Astr. Fys. **19** B, No. 14 (1926). — [8] KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig 1944. — [9] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1945. — [10] PROTTER, M. H.: Uniqueness theorems for the Tricomi problem. J. of Rat. Mech. Analy. **2**, 107—114 (1953). — [11] PROTTER, M. H.: A boundary value problem for an equation of mixed type. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 416—429 (1953). — [12] RELLICH, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122**, 343—368 (1951). — [13] RELLICH, F.: Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen. Vorlesungsausarbeitung W.S. 1952/53 des Math. Inst. Göttingen. — [14] TRICOMI, F.: Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto. Atti della Accad. Naz. dei Lin. (5) **14**, 133—247 (1923).

Zusatz bei der Korrektur. Läßt man in der Voraussetzung (I) auf S. 29 die Forderungen $c > -1$, $d > -1$ weg, so tritt beim Anfangswertproblem in § 3 ein weiterer Fall auf.

4. Fall: $a = 0$, $c > -2$, $(d > -2)$, $f > -1$ mit $g + c > -2$.

Vorgaben: $\lim\limits_{x \to 0} u(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$.

Vorausgesetzt ist dabei, daß nicht alle Ungleichungen des 1. Falles erfüllt sind. Wir setzen $u = U + x u_1$ und erhalten mit (2.7) $g = \text{Min}\{f, \alpha - 1, c + 1, (d + 1)\}$. Es ist $g > -1$ und Satz 3 kann verwendet werden, da die im Beweis zu (γ) benutzte Ungleichung $g + c > -2$ erfüllt ist. Alle Ungleichungen des Satzes 2 sind erfüllt. Die Lösung $u(x, y)$ mit $E[u] < \infty$ hat dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie im 1. Falle. Auch der Eindeutigkeitssatz 4 bleibt erhalten. Als Beispiel erwähnen wir $u_{xx} - x^c u_{yy} = 0$ mit $-1 \geqq c > -\frac{3}{2}$.

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität.

(Eingegangen am 13. Juni 1954.)

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 47—69 (1954)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. IV.

Von
WALTER NEUMER.

Vorbemerkung.

In dem nachstehenden vierten Abschnitt dieser Arbeit[1]) werden die Beziehungen zwischen dem ACKERMANNschen Bezeichnungssystem für Ordnungszahlen[2]) und dem in I entwickelten konstruktiven Algorithmus dargestellt. Es zeigt sich (§ 11), daß das s-stellige ACKERMANNsche System, d. h. dasjenige, welches eine Klammer mit $s(=2, 3, \ldots)$ Leerstellen verwendet, den Abschnitt der Zahlen $< 1VII'^{s-1}$ repräsentiert. Ferner wird ein rekursives Verfahren skizziert, welches für jedes Klammersymbol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ die ihm gleiche reguläre Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus anzugeben gestattet. Es erscheint daher angebracht, zunächst die allgemeine Form der Zahlen $< 1VII'^{1V}$ im konstruktiven Algorithmus zu charakterisieren; für die Zahlen $< 1VII'$ ist dies in I, § 3 bereits geschehen, so daß jetzt noch die Zahlen zwischen $1VII'$ und $1VII'^{1V}$ zu betrachten wären. Indessen macht es kaum mehr Umstände, die Form der I'-Zahlen überhaupt, also der Zahlen $1VII' \leq \xi < 1VII'I''$ herzuleiten, welcher Aufgabe der § 9 gewidmet ist[3]). Dies ist auch deshalb gerechtfertigt, weil inzwischen von K. SCHÜTTE[4]) eine Verallgemeinerung der ACKERMANNschen Symbolik vorgenommen wurde, mit welcher sich der ganze Abschnitt $[1, 1VII'I'')$ ebenfalls konstruktiv erfassen läßt. Das geht zwar summarisch aus einer einfachen Anwendung des in V zur Darstellung kommenden Algorithmus für Normalfunktionen[5]) hervor, aber wenn man die Beziehungen zwischen der SCHÜTTEschen φ-Symbolik und dem konstruktiven Algorithmus von I im einzelnen untersuchen will, wird man die Form der I'-Zahlen kennen müssen.

§ 9. Die Form der I'-Zahlen.

1. Zunächst verabreden wir einige Bezeichnungen. Wir betrachten gewisse n-tupel $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, wo die a_i irgendeiner geordneten Menge

[1]) Die drei vorangehenden Abschnitte, erschienen in dieser Z. **58**, 391—413 (1953), **59**, 434—454 (1954), **60**, 1—16 (1954), werden als I, II, III zitiert; die Paragraphen sind durchgehend, die Formeln, Sätze und Fußnoten abschnittsweise numeriert.

[2]) Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten CANTORschen Zahlenklasse. Math. Z. **53**, 403—413 (1951). Diese Arbeit wird im folgenden zitiert als [A].

[3]) Der § 9 gehört an sich zu I, wurde aber dort aus Platzmangel weggelassen.

[4]) Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen. Math. Annalen **127**, 15—32 (1954).

[5]) Siehe die Vorbemerkung zu I.

entnommen sein sollen. Ist $\mathfrak{a}' = (a_1', \ldots, a_{n'}')$, so sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ gleichbedeutend mit $n = n'$, $a_1 = a_1', \ldots, a_n = a_n'$. Im Fall $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$ hat man zwei Möglichkeiten:

(L)
1. Es gibt ein $i \leq \min(n, n')$, so daß $a_1 = a_1', \ldots, a_{i-1} = a_{i-1}'$ (falls $i > 1$) und $a_i \neq a_i'$ gilt; i heiße der kritische Index für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$.
2. Es ist $n \neq n'$ und $a_i = a_i'$ für $i \leq \min(n, n')$.

Wir setzen fest, daß $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}'$ gelten soll in den beiden Fällen:

$$\text{(L 1)} \quad \text{mit} \quad a_i < a_i'; \qquad \text{(L 2)} \quad \text{mit} \quad n < n'.$$

Damit ist die Menge der $\mathfrak{a}$ lexikographisch geordnet.

Wir werden es bei der Beschreibung der I'-Zahlen mit regulären Operatoren[6]) erster Stufe von der Form

$$(1) \qquad W = \left(\ldots\left((V(II'^{\alpha_1})^{\beta_1})(II'^{\alpha_2})^{\beta_2}\right)\ldots\right)(II'^{\alpha_h})^{\beta_h} \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

zu tun haben, wo die α_i und β_i Zahlen $< 1VII'I''$ bedeuten, die noch gewissen Ungleichungen genügen. Ein solcher Operator ist völlig bestimmt durch die Exponenten erster Stufe α_i, β_i, so daß wir ihn abgekürzt bezeichnen können durch

$$(2) \qquad W = [(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_h, \beta_h)] \quad (h = 1, 2, \ldots).$$

Nach der Exponentenregel in I, § 1, 5 werden in (1) Exponenten, die $= 1$ sind, nicht hingeschrieben; sie müssen in (2) natürlich erscheinen. — Beispiele: $VII' = [(1, 1)]$, $VII'^2 = [(2, 1)]$, $V(II'^2)^{1VII'} = [(2, 1VII')]$. — Verstehen wir die Relation $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ wieder im lexikographischen Sinn, dann läßt sich auch die Klasse der Operatoren (2) gemäß den Festsetzungen zu (L) lexikographisch ordnen, indem wir die Paare (α_i, β_i) mit den dortigen a_i identifizieren. Wir nennen W *schwächer* als W'' oder W'' *stärker* als W, wenn in diesem Sinne $W < W''$ oder $W' > W$ gilt.

Ferner werden wir von *Quasioperatoren* $\mathfrak{x}$ reden, die in Verbindung mit einem Operator W der Form (1) — oder dem Operator V — und einer geeigneten Zahl $\psi < 1VII'I''$ eine reguläre Zahl der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi^* = \left(\left(\ldots\left(\psi(WI^{\gamma_1})^{\delta_1}\right)(WI^{\gamma_2})^{\delta_2}\right)\ldots\right)(WI^{\gamma_m})^{\delta_m}W^{\varepsilon} = \mathfrak{x}(\psi, W) \\ \qquad (W \text{ hat die Gestalt (1) oder es ist } W = V) \end{cases}$$

hervorbringen. Darin sind alle γ_i, δ_i sowie ε Zahlen $< 1VII'I''$, die noch gewissen Ungleichungen genügen. In (3) kann die Potenz W^{ε} auch fehlen. m kann jede natürliche Zahl $1, 2, \ldots$ sein. Es können aber auch alle rechts von ψ stehenden Kombinationen $(WI^{\gamma_i})^{\delta_i}$ fehlen, so daß $\psi^* = \psi W^{\varepsilon}$ wird; W^{ε} kann dann nicht fehlen.

Den durch die Exponenten $\gamma_i, \delta_i, \varepsilon$ bestimmten Quasioperator $\mathfrak{x}$ schreiben wir abgekürzt:

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = \left((\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_m, \delta_m), (\varepsilon)\right).$$

[6]) Siehe I, § 1, 1 und 2.

In (4) rechts darf nach dem zu (3) Gesagten (ε) fehlen; ebenso dürfen alle (γ_i, δ_i) fehlen, d. h. $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$ werden. — Beispiele: $1WI = \mathfrak{x}(1, W)$ mit $\mathfrak{x} = ((1, 1))$; $1W = \mathfrak{x}(1, W)$ mit $\mathfrak{x} = ((1))$; $((1VII')\,(VI^2)^3)\,V^2 = \mathfrak{x}(1VII', V)$ mit $\mathfrak{x} = ((2, 3), (2))$. — Auch die $\mathfrak{x}$ lassen sich analog wie die W lexikographisch ordnen, wenn wir noch festsetzen, daß stets $(\varepsilon) < (\gamma, \delta)$ und $(\varepsilon) < (\varepsilon')$ für $\varepsilon < \varepsilon'$ gelten soll.

Wenn $\mathfrak{x}$ nicht die Form $((\varepsilon))$ hat, definieren wir im Hinblick auf seine Form (4):

$$\bar{\mathfrak{x}} = ((\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_m, \delta_m)). \tag{5}$$

$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$ besagt also, daß (ε) in (4) fehlt; wenn $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$, so sagen wir, daß $\bar{\mathfrak{x}}$ nicht existiert.

Ist $\mathfrak{x}' = ((\gamma_1', \delta_1'), \ldots, (\gamma_{m'}', \delta_{m'}'), (\varepsilon'))$, so bestehen für das Zustandekommen von $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{x}'$ nach (L) die folgenden Möglichkeiten[7]):

(Q)
1. $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ existieren und stehen in der Beziehung (L 1).
2. $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ existieren und stehen in der Beziehung (L 2).
3. $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}'$, $\varepsilon \neq \varepsilon'$.
4. $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}'$, wobei entweder $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x}' \neq \bar{\mathfrak{x}}'$ oder $\mathfrak{x}' = \bar{\mathfrak{x}}'$ und $\mathfrak{x} \neq \bar{\mathfrak{x}}$.
5. $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$, $\mathfrak{x}' = ((\varepsilon'))$, $\varepsilon \neq \varepsilon'$.
6. Entweder $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ existiert oder $\mathfrak{x}' = ((\varepsilon'))$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ existiert.

Demnach gilt $\mathfrak{x} < \mathfrak{x}'$ in den folgenden Fällen:

(Q 1) mit $(\gamma_i, \delta_i) < (\gamma_i', \delta_i')$ (i = kritischer Index); (Q 2) mit $m < m'$; (Q 3) mit $\varepsilon < \varepsilon'$; (Q 4) mit $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$; (Q 5) mit $\varepsilon < \varepsilon'$; (Q 6) mit $\mathfrak{x} = ((\varepsilon))$. $\mathfrak{x}$ heiße wieder schwächer als $\mathfrak{x}'$ oder $\mathfrak{x}'$ stärker als $\mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{x} < \mathfrak{x}'$ oder $\mathfrak{x}' > \mathfrak{x}$ gilt.

2. Jede reguläre I'-Zahl, d. h. jede Zahl aus $[1VII', 1VII'I'')$ besitzt einen größten Anfang der Form $1VII'^{\alpha_{11}}$, wo α_{11} ihrerseits eine bereits konstruierte Zahl $< 1VII'I''$ ist (vgl. I, § 2, **2** und **3**); mit dem Hinschreiben von α_{11} soll also die Konstruktion im Exponenten von I' beendet sein. $II'^{\alpha_{11}}$ ist ein auf V ausgeübter Operator zweiter Stufe. Wir können ihn noch mit einer Zahl $\beta_{11} < 1VII'^{\alpha_{11}+1} = 1V(II'^{\alpha_{11}})I'$ potenzieren, mit deren Hinschreiben die Konstruktion im Exponenten von $(II'^{\alpha_{11}})$ beendet sein soll. Dann haben wir den Anfang $1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}$ für unsere I'-Zahl. Hierin ist $V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}$ ein Operator erster Stufe, der einem Operator zweiter Stufe unterworfen werden kann. Dieser darf, wenn $\alpha_{11} > 1$ ist, jede Form $II'^{\alpha_{12}}$ mit $\alpha_{12} < \alpha_{11}$ haben. Denn nach dem zweiten Konstruktionsprinzip (I, § 1, **3**) können wir von $1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}$ aus die Figur $1(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})II'$ und durch Konstruktion im Exponenten des zweiten I' der Grundzeile alle Figuren $1(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})II'^{\mu}$ mit $\mu < \alpha_{11}$ bilden. An sich dürfen wir auch $\mu = \alpha_{11}$ machen, aber dann bekommen wir die Hilfsfigur $1(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})II'^{\alpha_{11}}$, welche durch die reguläre Figur $1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}+1}$ zu ersetzen ist; wir wollten aber den Exponenten β_{11} nicht mehr vergrößern. [Im Fall $\alpha_{11} = 1$ dürfen wir auf Grund dieses Entschlusses überhaupt keinen Operator der Form $II'^{\alpha_{12}}$ mehr auf $V(II')^{\beta_{11}}$ ausüben.]

[7]) Die Relation $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}'$ soll die Existenz von $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{x}}'$ implizieren.

Den Operator $II'^{\alpha_{12}}$ können wir wieder mit einem Exponenten β_{12} versehen, der jetzt durch die Bedingung $\beta_{12} < 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big) II'^{\alpha_{12}+1}$ beschränkt ist. Damit gewinnen wir den Anfang $1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)\,(II'^{\alpha_{12}})^{\beta_{12}}$, worin die Zeichengruppe hinter 1 ein Operator erster Stufe ist, den wir im Falle $\alpha_{12} > 1$ einem Operator zweiter Stufe $II'^{\alpha_{13}}$ mit $\alpha_{13} < \alpha_{12}$ unterwerfen können usw. Indem wir so fortfahren, gelangen wir etwa nach h_1 Schritten zu folgendem Schema einer regulären Zahlenfigur (vgl. die Exponentenregel **I**, § 1, **5**):

$$(6_1)\quad \begin{cases} 1W_1 = 1\big(\dots((V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\,(II'^{\alpha_{12}})^{\beta_{12}})\dots\big)\,(II'^{\alpha_{1h_1}})^{\beta_{1h_1}}, \\ 1VII'I'' > \alpha_{11} > \alpha_{12} > \dots > \alpha_{1h_1} \geqq 1, \qquad \beta_{11} < 1VII'^{\alpha_{11}+1}, \\ \beta_{12} < 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big) II'^{\alpha_{12}+1}, \dots, \beta_{1h_1} < 1\big(\dots(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\dots\big) II'^{\alpha_{1h_1}+1}. \end{cases}$$

Jede I'-Zahl hat also einen größten Anfang der Form (6_1), der dann nicht mehr in der bisherigen Weise, nämlich durch Anhängen von Kombinationen $(II'^{\alpha})^{\beta}$ vergrößert wird. — Es bestehen die Ungleichungen:

$$(\bar{6}_1)\quad \begin{cases} 1W_1 < 1W_1II' \leqq 1\big(\dots(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\dots\big)\,(II'^{\alpha_{1h_1}})^{\beta_{1h_1}+1} < \\ \quad < 1\big(\dots(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}})\dots\big)\,II'^{\alpha_{1h_1}+1} \leqq \dots \leqq \\ \quad \leqq 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big)\,(II'^{\alpha_{12}})^{\beta_{12}+1} < 1\big(V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}}\big) II'^{\alpha_{12}+1} \leqq \\ \quad \leqq 1V(II'^{\alpha_{11}})^{\beta_{11}+1} < 1VII'^{\alpha_{11}+1} < 1VII'I''. \end{cases}$$

Man bemerkt die formale Analogie zwischen (6_1) bzw. $(\bar{6}_1)$ und den Relationen (22) bzw. (24) in **I**, § 3, **2**.

Nach (1) und (2) können wir setzen:

$$W_1 = [(\alpha_{11}, \beta_{11}), \dots, (\alpha_{1h_1}, \beta_{1h_1})].$$

Ist $1W_1'$ eine zweite Zahl der Form (6_1), worin

$$W_1' = [(\alpha_{11}', \beta_{11}'), \dots, (\alpha_{1h_1'}', \beta_{1h_1'}')],$$

so gilt $1W_1 = 1W_1'$ nur im Fall der Identität $W_1 = W_1'$. Ist $1W_1 \neq 1W_1'$, so muß entweder $W_1 < W_1'$ oder $W_1' < W_1$ sein. Man erkennt leicht, daß $1W_1 < 1W_1'$ und $W_1 < W_1'$ äquivalente Relationen sind; im Fall (L 2) ist dies trivial und im Fall (L 1) überzeugt man sich davon an Hand der Ungleichungen $(\bar{6}_1)$ durch eine analoge Betrachtung, wie sie in **I**, § 3, **2** bezüglich (H' 1) angestellt wurde.

3. Wenn eine Zahl (6_1) der größte Anfang dieser Art einer I'-Zahl sein soll, dann dürfen wir ihn nur noch so vergrößern, daß reguläre Zahlenfiguren $< 1W_1II'$ entstehen. Die hierhergehörige Betrachtung wollen wir nachher unter allgemeineren Voraussetzungen durchführen. Zunächst nehmen wir daher an, wir hätten bereits eine Reihe von Anfängen $\psi_1 < \dots < \psi_{j-1}$ $(j \geqq 2)$ für unsere I'-Zahl konstruiert, wobei $\psi_1 \geqq 1W_1$ und $\psi_{j-1} = \bar{\psi}_{j-1} W_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}$ ist[8]), und es sei mit dem Hinschreiben von ε_{j-1} die Konstruktion im Exponenten von W_{j-1} beendet; W_{j-1} soll ein Operator der Form (1) sein, also

$$W_{j-1} = [(\alpha_{j-1,1}, \beta_{j-1,1}), \dots, (\alpha_{j-1,h_{j-1}}, \beta_{j-1,h_{j-1}})],$$

[8]) Es kann auch $\psi_{j-1} = \bar{\psi}_{j-1}$ sein; s. unten **4**.

worin $\alpha_{j-1,1} > \cdots > \alpha_{j-1,h_{j-1}} \geq 1$ ist und die $\beta_{j-1,i}$ ebenfalls gewissen Ungleichungen genügen. Dann können wir ψ_{j-1} nur noch durch Anhängen solcher Zeichenkombinationen vergrößern, daß reguläre Zahlenfiguren $< \psi_{j-1} W_{j-1} = \overline{\psi}_{j-1} W_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}+1}$ entstehen[9]).

Unter diesen Umständen können wir nach dem zweiten Konstruktionsprinzip die Figur $\psi_{j-1} V I I'^{\alpha_{j1}}$ bilden mit $\alpha_{j1} \leq \alpha_{j-1,1}$. Wird $\alpha_{j1} = \alpha_{j-1,1}$ gewählt, so können wir auch $\psi_{j-1} V(I I'^{\alpha_{j-1,1}})^{\beta_{j1}}$ mit $\beta_{j1} \leq \beta_{j-1,1}$ bilden, und wenn noch $\beta_{j1} = \beta_{j-1,1}$ genommen wird, so dürfen wir auch zu $\psi_{j-1}\big(V(I I'^{\alpha_{j-1,1}})^{\beta_{j-1,1}}\big) I I'^{\alpha_{j2}}$ mit $\alpha_{j2} \leq \alpha_{j-1,2}$ übergehen, im Fall $\alpha_{j2} = \alpha_{j-1,2}$ dann zu

$$\psi_{j-1}\big(V(I I'^{\alpha_{j-1,1}})^{\beta_{j-1,1}}\big)\,(I I'^{\alpha_{j-1,2}})^{\beta_{j2}} \quad \text{mit} \quad \beta_{j2} \leq \beta_{j-1,2}$$

fortschreiten usw. Wir dürfen aber nicht dauernd $\alpha_{ji} = \alpha_{j-1,i}$ und $\beta_{ji} = \beta_{j-1,i}$ machen, weil wir sonst nach h_{j-1} Schritten zu der Zahl $\psi_{j-1} W_{j-1}$ gelangen würden. Also müssen wir entweder für ein $i_j \leq h_{j-1}$ zum erstenmal eine Wahl $(\alpha_{ji_j}, \beta_{ji_j}) < (\alpha_{j-1,i_j} \beta_{j-1,i_j})$ treffen oder wir müssen schon nach einem $i_j < h_{j-1}$ mit dem Anhängen von Kombinationen $(I I'^{\alpha})^{\beta}$ aufhören. Im ersten Fall können wir, wenn $\alpha_{ji_j} > 1$, noch einen Operator $I I'^{\alpha_{j,i_j+1}}$ ausüben mit $\alpha_{j,i_j+1} < \alpha_{ji_j} \leq \alpha_{j-1,i_j}$, und die weitere Konstruktion vollzieht sich analog derjenigen, welche zu (6_1) geführt hat. Somit ergibt sich als neuer Anfang für die zu bildende I'-Zahl die reguläre Zahlenfigur

$$(6_j) \qquad \begin{cases} \psi_{j-1} W_j = \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\,(I I'^{\alpha_{jh_j}})^{\beta_{jh_j}}, \\ \alpha_{j-1,1} \geq \alpha_{j1} > \alpha_{j2} > \cdots > \alpha_{jh_j} \geq 1, \qquad W_j < W_{j-1} \quad (j \geq 2). \end{cases}$$

Wenn dabei hinsichtlich $W_j < W_{j-1}$ der Fall (L 1) vorliegt mit i_j als kritischem Index, so bestehen die Ungleichungen

$$(6'_j) \qquad \begin{cases} \beta_{ji_j} < \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\, I I'^{\alpha_{ji_j}+1}, \\ \beta_{j,i_j+1} < \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\, I I'^{\alpha_{j,i_j+1}+1}, \ldots, \\ \beta_{jh_j} < \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\, I I'^{\alpha_{jh_j}+1} \quad (j \geq 2), \end{cases}$$

von denen die erste nur im Fall $\alpha_{ji_j} < \alpha_{j-1,i_j}$ konstruktiv sinnvoll und im Fall $\alpha_{ji_j} = \alpha_{j-1,i_j}$ durch $\beta_{ji_j} < \beta_{j-1,i_j}$ zu ersetzen ist.

Stehen W_j und W_{j-1} in der Beziehung (L 1) und ist dabei $\alpha_{ji_j} < \alpha_{j-1,i_j}$, so haben wir die Kette von Ungleichungen:

$$(\bar{6}_j) \qquad \begin{cases} \psi_{j-1} W_j < \psi_{j-1} W_j I I' \leq \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\,(I I'^{\alpha_{jh_j}})^{\beta_{jh_j}+1} < \\ \quad < \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\, I I'^{\alpha_{jh_j}+1} \leq \cdots \leq \\ \quad \leq \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\,(I I'^{\alpha_{j,i_j+1}})^{\beta_{j,i_j+1}+1} < \\ \quad < \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\, I I'^{\alpha_{j,i_j+1}+1} \leq \\ \quad \leq \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\,(I I'^{\alpha_{ji_j}})^{\beta_{ji_j}+1} < \\ \quad < \psi_{j-1}\big(\ldots(V(I I'^{\alpha_{j1}})^{\beta_{j1}})\ldots\big)\, I I'^{\alpha_{ji_j}+1} \leq \psi_{j-1} W_{j-1} \quad (j \geq 2). \end{cases}$$

[9]) Die Schranke $\psi_{j-1} W_{j-1}$ muß auch im Fall $\psi_{j-1} = \overline{\psi}_{j-1}$ unterschritten werden.

Ist jedoch $\alpha_{ji_j} = \alpha_{j-1,i_j}$, so fällt in $(\bar{6}_j)$ die vorletzte Zahlenfigur einschließlich des vorangehenden Zeichens $<$ weg. — Stehen W_j und W_{j-1} in der Beziehung (L 2), so reduziert sich die Ungleichungenkette $(\bar{6}_j)$ auf $\psi_{j-1} W_j < \psi_{j-1} W_j I I' \leq \psi_{j-1} W_{j-1}$.

Sei $\psi_{j-1} W_j'$ eine zweite Zahl der Form (6_j) mit

$$W_j' = [(\alpha_{j1}', \beta_{j1}'), \ldots, (\alpha_{jk_j'}', \beta_{jk_j'}')].$$

Es gilt $\psi_{j-1} W_j' = \psi_{j-1} W_j$ nur im Fall der Identität $W_j = W_j'$. Wenn $\psi_{j-1} W_j' \neq \psi_{j-1} W_j$ ist, so muß $W_j < W_j'$ oder $W_j' < W_j$ sein. Man überzeugt sich leicht, daß $\psi_j W_j < \psi_j W_j'$ mit $W_j < W_j'$ äquivalent ist; das erfordert nur eine Erörterung, wenn $W_j < W_j'$ unter der Bedingung (L 1) gilt. Sei k der kritische Index für W_j und W_j'. Wegen $W_j' < W_{j-1}$ können W_j und W_{j-1} nicht in der Beziehung (L 2) stehen; es gibt also einen kritischen Index i_j für W_j und W_{j-1}, wobei $i_j \leq k$ sein muß. Somit hat man $(\alpha_{ji_j}, \beta_{ji_j}) \leq (\alpha_{ji_j}', \beta_{ji_j}') \leq (\alpha_{j-1,i_j}, \beta_{j-1,i_j})$. Ist $i_j < k$, so schließt man wie am Ende von **2**. Ist $i_j = k$, so stellt, wegen der Regularität von $\psi_{j-1} W_j'$, im Fall $\alpha_{jk} < \alpha_{jk}'$ die vorletzte und im Fall $\alpha_{jk} = \alpha_{jk}'$, $\beta_{jk} < \beta_{jk}'$ die drittletzte Zahlenfigur in $(\bar{6}_j)$ ein (reguläres) Zwischenstadium in der Konstruktion von $\psi_{j-1} W_j'$ dar.

4. Nun verabreden wir, daß ψ_0 die Zahl 1 bedeute und konstruieren von $\psi_{j-1} W_j$ $(j \geq 1)$ aus weiter, indem wir diese Zahlenfigur als einen Anfang ansehen, der nicht mehr durch Anhängen von Kombinationen $(I I'^{\alpha})^{\beta}$ an W_j vergrößert werden soll. Die betreffende I'-Zahl muß daher unterhalb $\psi_{j-1} W_j I I'$ bleiben. Bei dieser Beschränkung können wir dann $\psi_{j-1} W_j I^{\gamma_{j1}}$ mit $\gamma_{j1} < \psi_{j-1} W_j I I'$ bilden, darauf den Operator erster Stufe $W_j I^{\gamma_{j1}}$ noch potenzieren usw. Durch eine ganz analoge Betrachtung, wie sie in I, § 3, **2** zur Gewinnung von (22) gedient hat, gelangen wir zu folgendem Schema einer regulären Zahlenfigur:

$$(7_j) \quad \begin{cases} \varphi_j = \big(\ldots((\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\,(W_j I^{\gamma_{j2}})^{\delta_{j2}})\ldots\big)\,(W_j I^{\gamma_{jm_j}})^{\delta_{jm_j}}, \\ \psi_{j-1} W_j I I' > \gamma_{j1} > \gamma_{j2} > \cdots > \gamma_{jm_j} \geq 1, \qquad \delta_{j1} < \psi_{j-1} W_j I^{\gamma_{j1}+1}, \\ \delta_{j2} < \big(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}}\big)\, W_j I^{\gamma_{j2}+1}, \ldots, \\ \delta_{jm_j} < \big(\ldots(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\ldots\big)\, W_j I^{\gamma_{jm_j}+1} \qquad (j \geq 1,\ \psi_0 = 1). \end{cases}$$

Wenn wir nun auf die Hinzufügung von Kombinationen $(W_j I^{\gamma})^{\delta}$ verzichten, kann φ_j nur noch so vergrößert werden, daß wir unterhalb $\varphi_j W_j I$ bleiben, was uns erlaubt, zu

$$(8_j) \qquad \psi_j = \varphi_j W_j^{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon_j < \varphi_j W_j I \qquad (j \geq 1)$$

überzugehen. — Auf diese Weise kommt man von ψ_{j-1} zu ψ_j. Man kann natürlich die Zwischenstation (8_j) auslassen, in welchem Fall $\psi_j = \varphi_j$ sein soll; aber auch (7_j) kann man sparen und setzen:

$$(8_j') \qquad \psi_j = \psi_{j-1} W_j^{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon_j < \psi_{j-1} W_j I \qquad (j \geq 1).$$

(8_j) und $(8_j')$ lassen sich zusammenfassen zu

$$(9_j) \qquad \psi_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon_j < \bar{\psi}_j W_j I \qquad (j \geq 1),$$

worin $\bar{\psi}_j = \varphi_j$ oder $= \psi_{j-1}$ ist. Im Fall $\psi_j = \varphi_j$ setzen wir ebenfalls $\bar{\psi}_j = \varphi_j$.

Analog zu I, § 3, (24) haben wir die Ungleichungen:

$$(\bar{9}_j) \quad \begin{cases} \psi_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j} < \psi_j W_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j+1} < \bar{\psi}_j W_j I \leq \\ \leq (\ldots(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\ldots)\,(W_j I^{\gamma_{jm_j}})^{\delta_{jm_j}+1} < \\ < (\ldots(\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\ldots)\,W_j I^{\gamma_{jm_j}+1} \leq \cdots \leq \\ \leq (\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\,(W_j I^{\gamma_{j2}})^{\delta_{j2}+1} < (\psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}})\,W_j I^{\gamma_{j2}+1} \leq \\ \leq \psi_{j-1}(W_j I^{\gamma_{j1}})^{\delta_{j1}+1} < \psi_{j-1} W_j I^{\gamma_{j1}+1} < \psi_{j-1} W_j I I' \qquad (j \geq 1). \end{cases}$$

Wenn $\psi_j = \bar{\psi}_j$ ist, müssen wir in $(\bar{9}_j)$ natürlich die zweite und die vierte Zahlenfigur fortlassen; im Fall $(8_j')$, also für $\bar{\psi}_j = \psi_{j-1}$, reduziert sich die Kette von Ungleichungen $(\bar{9}_j)$ auf

$$\psi_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j} < \psi_j W_j = \bar{\psi}_j W_j^{\varepsilon_j+1} < \bar{\psi}_j W_j I < \psi_{j-1} W_j I I'.$$

Im Hinblick auf (3) und (4) schreiben wir

$$(10_j) \qquad \psi_j = \mathfrak{x}_j(\psi_{j-1}, W_j), \qquad \mathfrak{x}_j = \big((\gamma_{j1}, \delta_{j1}), \ldots, (\gamma_{jm_j}, \delta_{jm_j}), (\varepsilon_j)\big) \qquad (j \geq 1).$$

In $\mathfrak{x}_j$ können die Glieder $(\gamma_{ji}, \delta_{ji})$ fehlen (Fall $(8_j')$) oder es kann das Glied (ε_j) fehlen (Fall $\psi_j = \bar{\psi}_j = \varphi_j$). — Ist $\psi_j' = \mathfrak{x}_j'(\psi_{j-1}, W_j)$ eine zweite Zahl der Form (9_j), so wird $\psi_j = \psi_j'$ nur, wenn $\mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_j'$ ist. Man sieht leicht ein, daß $\psi_j < \psi_j'$ mit $\mathfrak{x}_j < \mathfrak{x}_j'$ äquivalent ist [im Fall (Q 1) zieht man $(\bar{9}_j)$ heran und schließt wie in I, § 3, 2 bezüglich (H′ 1)].

5. Die Ziffern **2** bis **4** zeigen, wie man sich von der zu konstruierenden I'-Zahl eine Reihe wachsender Anfänge $\psi_0 = 1, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s$ der Form (9_j) $(j = 1, \ldots, s)$ entstanden denken kann. Soll ψ_s der größte Anfang dieser Art für die betreffende Zahl sein, dann können wir ψ_s nicht mehr durch Ausübung von Operatoren $V(I I'^{\alpha})^{\beta}$ und die daran anschließenden, bisher beschriebenen Konstruktionen vergrößern, aber wir können immer noch Kombinationen der Form $(V I^{\mu})^{\nu}$ anfügen. So erhalten wir eine reguläre Zahlenfigur $< \psi_s V I I'$, die wir wieder in der Form

$$(10_{s+1}) \qquad \chi = \psi_{s+1} = \mathfrak{x}_{s+1}(\psi_s, V), \qquad V = W_{s+1}$$

schreiben, so daß die Relationen (7_j) bis (9_j) auch für $j = s+1$ in Anspruch genommen werden können.

Die Zahl χ ist offenbar bestimmt durch das System der Operatoren W und der Quasioperatoren $\mathfrak{x}_j$. Daher kürzen wir ab:

$$(11) \qquad \chi = \langle (W_1, \mathfrak{x}_1), \ldots, (W_s, \mathfrak{x}_s), (V, \mathfrak{x}_{s+1}) \rangle \qquad (s \geq 1).$$

In (11) kann der Quasioperator $\mathfrak{x}_{s+1}$ fehlen, d. h. $\chi = \psi_s$ sein, in welchem Fall wir in (11) das Glied $(V, \mathfrak{x}_{s+1})$ weglassen.

Aus $(\bar{9}_1)$, $(\bar{6}_2)$, $(\bar{9}_2)$, …, $(\bar{9}_{s-1})$, $(\bar{6}_s)$, $(\bar{9}_s)$ und $(\bar{9}_{s+1})$ entnimmt man der Reihe nach die Ungleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} 1W_1 II' > \psi_1 W_1 \geq \psi_1 W_2 II' > \psi_2 W_2 \geq \cdots > \psi_{s-1} W_{s-1} \geq \\ \qquad \geq \psi_{s-1} W_s II' > \psi_s W_s \geq \psi_s V II' > \chi V > \chi. \end{cases}$$

Ist χ der größte Anfang dieser Form unserer I'-Zahl, so kann χ nur noch additiv, d. h. nicht mehr durch Ausübung von Operatoren auf χ, vergrößert werden. Da χ offenbar Hauptzahl ist (vgl. I, § 1, 5, erster Absatz), so haben alle Haupt-I'-Zahlen die Form (10_{s+1}).

Man überzeugt sich unmittelbar vom Bestehen der Ungleichungen:

$$(13\,a)\quad \psi_{j-1} W_j II' \leq \psi_{j-1} W_j' \quad \text{für} \quad W_j < W_j' \qquad (j = 1, \ldots, s;\ \psi_0 = 1)$$

$$(13\,b)\quad \begin{cases} \psi_j W_j \leq \psi_j' = \mathfrak{x}_j'(\psi_{j-1}, W_j) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x}_j < \mathfrak{x}_j' \\ \qquad (j = 1, \ldots, s+1;\ W_{s+1} = V,\ \psi_{s+1} = \chi,\ \psi_{s+1}' = \chi'). \end{cases}$$

Ist $\chi' = \langle (W_1', \mathfrak{x}_1'), \ldots, (W_{s'}', \mathfrak{x}_{s'}'), (V, \mathfrak{x}_{s'+1}') \rangle$ eine zweite Zahl der Form (10_{s+1}), so gilt $\chi = \chi'$ nur im Identitätsfall. Für $\chi \neq \chi'$ bestehen folgende Möglichkeiten:

(H'')
1. Es gibt ein $j \leq \min(s, s')$, so daß $W_1 = W_1'$, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1'$, …, $W_{j-1} = W_{j-1}'$, $\mathfrak{x}_{j-1} = \mathfrak{x}_{j-1}'$ (falls $j > 1$) und $W_j \neq W_j'$ ist.
2. Wie 1., aber es ist noch $W_j = W_j'$, dagegen $\mathfrak{x}_j \neq \mathfrak{x}_j'$.
3. $s = s'$, $W_j = W_j'$, $\mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_j'$ für $j \leq s$, $\mathfrak{x}_{s+1} \neq \mathfrak{x}_{s-1}'$.
4. Wie 3., aber genau eines der Paare $(V, \mathfrak{x}_{s+1})$, $(V, \mathfrak{x}_{s+1}')$ fehlt.
5. $s \neq s'$, $W_j = W_j'$, $\mathfrak{x}_j = \mathfrak{x}_j'$ für $j \leq \min(s, s')$.

Die Relation $\chi < \chi'$ findet in den folgenden Fällen statt:

(H'' 1) mit $W_j < W_j'$; (H'' 2) mit $\mathfrak{x}_j < \mathfrak{x}_j'$; (H'' 3) mit $\mathfrak{x}_{s+1} < \mathfrak{x}_{s+1}'$;

(H'' 4) mit fehlendem $(V, \mathfrak{x}_{s+1})$; (H'' 5) mit $s < s'$.

Die beiden letzten Fälle sind trivial. Im Fall (H'' 3) ergibt sich die Behauptung wegen $\psi_s' = \psi_s$ aus (13 b) für $j = s+1$. Im Fall (H'' 2) wird wegen $\psi_{j-1} = \psi_{j-1}'$ vermöge (12) und (13 b): $\chi < \psi_j W_j \leq \psi_j' \leq \chi'$, und im Fall (H'' 1) vermöge (12) und (13 a): $\chi < \psi_{j-1} W_j II' \leq \psi_{j-1} W_j' = \psi_{j-1}' W_j' \leq \psi_j' \leq \chi'$.

6. Mittels additiver Konstruktion gelangen wir von χ zu dem allgemeinen Schema I, § 3, (21), worin mindestens χ_1 eine Haupt-I'-Zahl ist, die übrigen χ_i auch Haupt-I-Zahlen oder Haupt-V-Zahlen sein können. Das ist also die allgemeine Form der I'-Zahlen.

Zwei verschiedene I'-Zahlen η und η' der Form **I**, (21) werden wieder gemäß den aus der Disjunktion (H) in **I**, § 3, **1** folgenden Kriterien verglichen (s. **I**, § 3, **3** sowie die Berichtigung hierzu am Schluß dieses Abschnitts).

Sei $\eta = \chi_1 q_1 + \cdots + \chi_k q_k + r$ eine I'-Zahl. Die in den $\chi_i \geq 1VII'$ auftretenden Exponenten erster Stufe [d.h. die in (11) rechts erscheinenden Zahlen, wenn die Symbole W_j, $\mathfrak{x}_j$ explizit in der Form (2) bzw. (4) hingeschrieben werden] sind entweder $< 1VII'$ oder sie sind I'-Zahlen derselben Form wie η. Wir nennen η *I'-einstöckig*, wenn alle Exponenten erster Stufe der $\chi_i \geq 1VII'$ unterhalb $1VII'$ bleiben, und *I'-$(n+1)$-stöckig*, wenn diese Exponenten höchstens I'-n-stöckig (d.h. eventuell auch $< 1VII'$) sind, aber mindestens einer I'-n-stöckig ist. η hat einen größten Anfang der Form

$$\sigma = 1VII'^{1VII'^{\cdots^{1VII'^{\alpha^{(e-1)}}}}},$$

wo $\alpha^{(e-1)} < 1VII'$; die I'-e-stöckige Zahl σ nennen wir die *I'-Spitze* von η. Analog wie in **I**, § 3, **2** zeigt man, daß

$$1VII'_e \leq \eta < 1VII'_{e+1}$$

ist, unter $1VII'_n$ das n-te Glied der Fundamentalfolge **I**, (17) für $1VII'I''$ verstanden. Also ist $1VII'_e$ die kleinste I'-Zahl mit I'-e-stöckiger Spitze, und für $e' > e$ ist jede I'-Zahl mit I'-e'-stöckiger Spitze größer als jede I'-Zahl mit I'-e-stöckiger Spitze.

Nun läßt sich die rekursive Vergleichung zweier I'-Zahlen $\eta = \chi_1 q_1 + \cdots + \chi_k q_k + r \neq \eta' = \chi'_1 q'_1 + \cdots + \chi'_{k'} q'_{k'} + r'$ folgendermaßen skizzieren. Sind ihre I'-Spitzen ungleichstöckig, so sind wir fertig. Andernfalls gehen wir nach **I**, § 3, (H) vor. (H, 2—4) sind triviale Fälle. Im Fall (H 1) sind χ_i und χ'_i zu vergleichen. Ist genau eine dieser Zahlen $< 1VII'$ oder sind ihre I'-Spitzen ungleichstöckig, so sind wir wieder fertig, und wenn beide $< 1VII'$ sind, verfahren wir nach **I**, § 3, **1**, **2**. Andernfalls ist die Disjunktion (H″) von **5** zu benützen. (H″, 4, 5) sind triviale Fälle. Im Fall (H″ 1) muß man auf die Disjunktion (L) und in den Fällen (H″, 2, 3) auf die Disjunktion (Q) (Ziffer **1**) zurückgehen. (L 2) und (Q 2, 4, 6) sind wieder trivial, dagegen erfordern (L 1) und (Q 1, 3, 5) die Vergleichung zweier Exponenten erster Stufe von η und η', die wir ξ und ξ' nennen. Die Betrachtung wiederholt sich für ξ und ξ' (wenn nicht der triviale Fall eintritt, daß eine dieser Zahlen $< 1VII'$ wird), aber die I'-Stockwerksanzahl von ξ bzw. ξ' ist mindestens um 1 niedriger als bei η und η'. Nach endlich vielen Schritten müssen wir daher bei einem „trivialen" Fall anlangen.

Das Hinschreiben einer I'-Zahl erfordert seinerseits „interne" Vergleichungen auf Grund der Ungleichungen für die auftretenden Exponenten und Summanden.

Rückblickend können wir feststellen, daß die Vergleichung zweier I'-Zahlen ebenfalls nach dem allgemeinen Rezept von **I**, § 2, **3** verläuft.

§ 10. Einige Eigenschaften des s-stelligen Ackermannschen Bezeichnungssystems.

1. Das s-stellige ACKERMANNsche Bezeichnungssystem ($s = 1, 2, \ldots$), welches wir $\mathfrak{A}_s$ nennen wollen, verwendet nur die Zeichen 1, + und eine Klammer ( ) mit s Leerstellen. $\mathfrak{A}_3$ wurde von W. ACKERMANN in [A] ausführlich beschrieben, wobei der Verfasser bemerkte, daß diese Betrachtungen ohne weiteres für beliebiges $s > 3$ übertragen werden können (sie lassen sich natürlich auch für $s = 1$ und $s = 2$ spezialisieren). Das gilt insbesondere für den Beweis, daß die Symbole des Systems $\mathfrak{A}_s$ wirkliche Ordnungszahlen im gewohnten Sinne sind, so daß wir nach den üblichen Regeln mit ihnen rechnen können. Dies vorausgesetzt, wollen wir einige Definitionen und Eigenschaften von $\mathfrak{A}_s$ für beliebiges s zusammenstellen in der Form, wie sie im § 11 benötigt werden.

Jedes „Symbol" — abgesehen davon, ob es zu $\mathfrak{A}_s$ gehört oder nicht — ist 1 oder von der Form $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, wo die „Glieder" α_i wieder Symbole sind, oder von der Form $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$, wobei die π_i Symbole 1 oder $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ bedeuten[10]). Aus der Klasse dieser Symbole wird die Unterklasse $\mathfrak{A}_s$ der „Ordnungszahlen" ausgesondert durch folgende Festsetzungen. 1 ist Ordnungszahl. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ Ordnungszahlen, so ist auch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ eine. Sind $\pi_1, \ldots, \pi_m$ Ordnungszahlen von der Form 1 oder $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, so ist $\pi_1 + \cdots + \pi_m$ genau dann Ordnungszahl, wenn $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \cdots \geq \pi_m$ ist. Es wird sich nach Erklärung der Relation $<$ zeigen, daß $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ die sonst mit $1, 2, 3, \ldots$ bezeichneten natürlichen Zahlen sind.

$\alpha = \beta$ bedeutet die figürliche Einerleiheit der Symbole α und β, $\alpha \neq \beta$ das Gegenteil. Sind α, β Ordnungszahlen, so folgt aus $\alpha \neq \beta$ entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$. — Bevor wir die Relation $<$ erklären, führen wir noch einige Abkürzungen ein. Zunächst lassen sich alle Systeme $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wo die $\alpha_i \in \mathfrak{A}_s$ sind, nach der Festsetzung in § 9, **1** lexikographisch ordnen; wir benötigen im allgemeinen nur die Fälle, wo (L 1) stattfindet, und zwar für $1 \leq n \leq s$, $n = n'$ [einzige Ausnahme: unten (G_s 2)]. Ist $n = s$, so ist $\mathfrak{a} = \pi \in \mathfrak{A}_s$. Wenn $\pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$, $\pi' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_s') \in \mathfrak{A}_s$, so schreiben wir natürlich $\pi < \pi'$ an Stelle von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$. — Haben wir n Symbole $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, welche nicht durch Indizes unterschieden sind, so schreiben wir, wo es die Deutlichkeit erfordert, auch $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)_n$ statt $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$.

Die Relation $<$ für Ordnungszahlen $\in \mathfrak{A}_s$ läßt sich nun rekursiv durch folgende Festsetzungen einführen, von denen man sich an Hand von [A] leicht überzeugt, daß sie für $s = 3$ mit den dortigen Anordnungen äquivalent sind.

(G_s)
1. $1 \leq \alpha$.
2. $\pi_1 + \cdots + \pi_m < \pi_1' + \cdots + \pi_{m'}'$ ist äquivalent mit $(\pi_1, \ldots, \pi_m) < (\pi_1', \ldots, \pi_{m'}')$.
3. $\alpha_i < (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ für $i = 1, \ldots, s$.
4. Ist $\alpha_i < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$, $\alpha_i' < (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ für $i = 1, \ldots, s$, so ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ äquivalent mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.

[10]) Diese Bedeutung soll der Buchstabe π in der Folge immer haben.

Folgerungen. Mit α ist $\alpha+1$ eine Ordnungszahl. — Ferner ergeben sich die Kriterien:

(G_s')
1. Aus $\max(\alpha_1', \ldots, \alpha_s') \geq (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.
2. Aus $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.
3. Aus $\alpha_i \leq \alpha_i'$ für $i = 1, \ldots, s$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \leq (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.
4. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) > (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ folgt $\max(\alpha_1', \ldots, \alpha_s') \geq (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.
5. Aus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$ und $\max(\alpha_1', \ldots, \alpha_s') < (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ folgt $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < (\alpha_1', \ldots, \alpha_s')$.

Nach $(G_s' 3)$ ist $(1, \ldots, 1)_s$ das kleinste Symbol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ und nach $(G_s, 1, 2)$ die kleinste transfinite Zahl ω.

Bezeichnet man mit Γ_s den Limes des Systems $\mathfrak{A}_s$, so gilt

$$\Gamma_s = \lim_n \sigma_n, \quad \text{wo} \quad \sigma_1 = (1, \ldots, 1)_s, \quad \sigma_{n+1} = (\sigma_n, 1, \ldots, 1)_s. \tag{14}$$

Dies ergibt sich durch Induktion nach der Anzahl der in einem Symbol $\in \mathfrak{A}_s$ vorkommenden Zeichen + und ( ). Sei ϑ_n die größte unter Verwendung von genau n dieser Zeichen herstellbare Zahl $\in \mathfrak{A}_s$ (es gibt ja nur endlich viele Möglichkeiten). Dann ist offenbar $\vartheta_1 = \sigma_1$. Wir zeigen, daß $\vartheta_{n+1} = (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$ ist, woraus $\vartheta_n = \sigma_n$ und somit (14) folgt. — Sei $\vartheta_{n+1} = \pi_1 + \cdots + \pi_m$. Wäre $m > 1$, so wäre $\pi_1 \leq \vartheta_n < (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$ und daher auch $\vartheta_{n+1} < (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$, was unmöglich. Also ist $\vartheta_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Wäre $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) < \vartheta_n$, so folgte wieder $\vartheta_{n+1} < (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$ nach $(G_s' 2)$. Also muß es ein $\alpha_i = \vartheta_n$ geben und die übrigen α_k dürfen kein Zeichen + und ( ) enthalten, müssen also $= 1$ sein. Nach $(G_s 4)$ wird daher $\vartheta_{n+1} = (\vartheta_n, 1, \ldots, 1)_s$.

Satz 1. *Ist* $\pi_n = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_s^{(n)}) \in \mathfrak{A}_s$ *eine wachsende Folge, so ist entweder* $\lim_n \pi_n = \Gamma_s$ *oder* $\lim_n \pi_n = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathfrak{A}_s$.

Beweis. Wenn $\lambda = \lim_n \pi_n < \Gamma_s$, so ist $\lambda = \pi_1' + \cdots + \pi_m'$, also $\pi_n < \pi_1'$ für alle n. Daraus folgt $\lambda = \pi_1'$.

Satz 2. *Wenn* $\pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$, *so ist* $\lim_n \pi \cdot n = \pi \cdot \omega \in \mathfrak{A}_s$ *und* $\lim_n \pi \cdot n = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. — *Alle* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ *sind Zahlen* ω^ν *mit* $1 \leq \nu < \Gamma_s$ *und umgekehrt.*

Beweis. Sei $\lambda = \lim_n \pi \cdot n = \pi \cdot \omega$; wegen $\pi < (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_s + 1)$ ist $\pi \cdot n = \pi + \cdots + \pi < (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_s + 1)$ und daher auch $\lambda \leq (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_s + 1)$. Ist $\lambda = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, so folgt $\pi < \pi_1$, somit $\pi \cdot n < \pi_1$, also $\lambda = \pi_1$. — Sei $\alpha' < \pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\alpha' = \pi_1 + \cdots + \pi_m$. Dann wird nach dem Bewiesenen (für $\pi_1 = 1$ trivialerweise) $\alpha' \omega = \pi_1 \omega \leq \pi$; also muß $\pi = \omega^\nu$ sein. — Daß ein $\omega^\nu < \Gamma_s$ die Form $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ hat, ist nach dem Vorstehenden klar. Für ein ω^ν, von dem nur $\nu < \Gamma_s$ bekannt ist, folgt aber $\omega^\nu < \Gamma_s$. Denn nach (14) ist $\Gamma_s = \lim(\nu, 1, \ldots, 1)_s$, $\nu < \Gamma_s$. Sei $(\nu, 1, \ldots, 1)_s = \omega^{\mu_\nu}$. Da μ_ν mit ν wächst, ist $\lim_\nu \mu_\nu = \Gamma_s$, daher $\omega^{\Gamma_s} = \Gamma_s > \omega^\nu$.

2. Im Fall $s \geq 2$ führen wir nun die Abkürzung

$$\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad 1 \leq p < s \tag{15}$$

ein, mit welcher wir die Aussagen $\lambda = (\beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathfrak{A}_s$, $\lambda > \alpha_i \in \mathfrak{A}_s$ für $i = 1, \ldots, p$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ zusammenfassen. Wenn $\lambda \in \mathfrak{A}_s$, $\alpha_i \in \mathfrak{A}_s$ für $i = 1, \ldots, p < s$, so drücken wir das Nichtstattfinden der Relation (15) aus durch

$$\lambda \sim> (\alpha_1, \ldots, \alpha_p). \tag{15'}$$

Satz 3. *Die Bedingung* $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *ist hinreichend und notwendig dafür, daß* $\lambda > \mu(\nu) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \nu, 1, \ldots, 1)_s$ *ist für alle* $\nu < \lambda$. — *Niemals ist* $\lambda > (\nu, 1, \ldots, 1)_s$ *für alle* $\nu < \lambda$.

Beweis. Daß die Bedingung hinreicht, folgt aus (G_s' 2). Ihre Notwendigkeit ergibt sich so. Für ein $\lambda = \pi_1 + \cdots + \pi_m$ mit $m > 1$ ist stets

$$\lambda < (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \pi_1, 1, \ldots, 1)_s$$

bei beliebigen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ aus $\mathfrak{A}_s$. Aus $\lambda > \mu(\nu)$ für alle $\nu < \lambda$ folgt daher $\lambda = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Für ein $\nu > \max(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ und $< \lambda$ ist $\lambda > \mu(\nu)$ nur auf Grund von (G_s 4) möglich, d. h. man hat $\lambda > \mu(\nu)$ und daher auch $(\beta_1, \ldots, \beta_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Also gilt (15). — Die zweite Aussage folgt analog.

Satz 4. *Die kleinste Zahl* $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *ist gegeben durch*

$$\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_s.$$

Beweis. Aus $\vartheta = (\xi_1, \ldots, \xi_s) < \lambda$, $\vartheta > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ folgt nämlich $\vartheta < \lambda$ gemäß (G_s' 5); das führt aber auf den Widerspruch

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) < (\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1).$$

Satz 5. *Sei* $\lambda = (\beta_1, \ldots, \beta_s) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. *Es bedeute* λ^* *die Zahl* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \lambda)_s$ *oder* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \beta_s + 1)_s$, *je nachdem* $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ *ist oder nicht. Dann liegt zwischen* λ *und* λ^* *kein* $\vartheta > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. — *Im zweiten Fall ist übrigens* $\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \beta_s)_s$.

Beweis. 1. Sei $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$. Daß $\lambda^* > \lambda$ und $\lambda^* > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ gilt, ist klar. Angenommen, es gäbe ein $\vartheta = (\xi_1, \ldots, \xi_s) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ mit $\lambda < \vartheta < \lambda^*$. Nach ($G_s'$ 5) wäre dann $\vartheta < \lambda^*$, d. h. $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1)$, und da $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, so hätte man $(\xi_1, \ldots, \xi_p) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1)$. Wegen $\vartheta < \lambda^*$ müßte demnach $\vartheta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \xi_s)_s$ mit $\xi_s < \lambda$ sein. Also wäre nach der Voraussetzung über λ und nach (G_s' 2): $\vartheta < \lambda$ — ein Widerspruch.

2. Sei $\lambda \sim> (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$; wegen $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ ist dann $(\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$. Also hat λ die im Satz 5 angegebene Form. Nun schließt man analog wie im ersten Fall, daß $\vartheta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, 1, \ldots, 1, \xi_s)_s$ mit $\xi_s < \beta_s + 1$ sein müßte, woraus $\vartheta \leq \lambda$ folgte, im Widerspruch zu $\vartheta > \lambda$.

Satz 6. *Sei* $\{\lambda^{(\nu)}\}$, $1 \leq \nu < \Gamma_s$, *die wachsende Folge derjenigen Zahlen* $\in \mathfrak{A}_s$, *welche* $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *sind. Dann ist* $\lambda^{(\nu)}$ *eine stetige Funktion von* ν.

Zum Beweis benützen wir den

Hilfssatz 1. *Sei* (γ_ν), $\nu < \varrho$, ϱ *Limeszahl, eine Folge von Elementen aus einer wohlgeordneten Menge. Dann ist* (γ_ν) *mit einer nicht abnehmenden Teilfolge* (γ_{ν_τ}), $\tau < \varrho' \leq \varrho$, *konfinal.*

Beweis. In der Menge der verschiedenen γ_ν gibt es ein kleinstes Element γ_{ν_0}; wir denken uns dabei ν_0 als den kleinsten Index gewählt, für welchen es in der Folge (γ_ν) auftritt. Angenommen, wir haben bereits eine Teilfolge γ_{ν_τ}, $\tau < \sigma$, gefunden mit der Eigenschaft, daß γ_{ν_τ} das kleinste Element der Menge der verschiedenen γ_ν mit $\nu > \nu_{\tau'}$ für $\tau' < \tau$ und ν_τ der kleinste dabei mögliche Index ist. Ist $\sigma = \sigma' + 1$, so muß $\nu_{\sigma'} < \varrho$ sein; in der Restfolge der γ_ν mit $\nu > \nu_{\sigma'}$ gibt es ein kleinstes Glied $\gamma_{\nu_{\sigma'+1}} = \gamma_{\nu_\sigma}$ mit dem kleinstmöglichen Index ν_σ. Ist σ Limeszahl und $\lambda = \lim\limits_{\tau < \sigma} \nu_\tau < \varrho$, so gibt es in der Restfolge der γ_ν mit $\nu \geq \lambda$ wieder ein kleinstes Glied γ_{ν_σ} mit dem kleinstmöglichen Index $\nu_\sigma \geq \lambda$. — Die so zu definierende Teilfolge (γ_{ν_τ}) kann nicht abnehmen und (γ_ν) muß mit ihr konfinal sein.

Um den Hilfssatz 1 für den Beweis von Satz 6 zu verwenden, setzen wir $\lambda^{(\nu)} = (\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_s^{(\nu)})$ und $l^{(\nu)} = (\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_p^{(\nu)})$. Die $l^{(\nu)}$ sind hinsichtlich der Relation $\prec$ wohlgeordnet, so daß wir sie mit den γ_ν des Hilfssatzes identifizieren können. Wir haben zu zeigen, daß für eine Limeszahl $\mu < \Gamma_s$ stets $\lambda^{(\mu)} = \lim\limits_{\nu < \mu} \lambda^{(\nu)}$ ist. Nach Hilfssatz 1 ist $(l^{(\nu)})$, $\nu < \mu$, mit einer Teilfolge $l^{(\nu_\tau)}$, $\tau < \mu' \leq \mu$, konfinal, welche im Sinne $\prec$ nicht abnimmt. Es ist natürlich $\tilde{\lambda} = \lim\limits_{\nu < \mu} \lambda^{(\nu)} = \lim\limits_{\tau < \mu'} \lambda^{(\nu_\tau)} \leq \lambda^{(\mu)} < \Gamma_s$. Also wird nach Satz 1: $\tilde{\lambda} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Wäre $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \prec l^{(\nu_\tau)}$ für ein $\tau = \tau_0 < \mu'$, so wäre dies für alle $\tau > \tau_0$, $\tau < \mu'$, erst recht der Fall. Also hätten wir $\tilde{\lambda} \prec \lambda^{(\nu_\tau)}$ für $\tau_0 \leq \tau < \mu'$ und daher gemäß $(G_s' 4)$ für alle diese τ: $\max(\beta_1, \ldots, \beta_s) \geq \lambda^{(\nu_\tau)}$, d.h. $\max(\beta_1, \ldots, \beta_s) \geq \tilde{\lambda}$, ein Widerspruch. Also ist $(\beta_1, \ldots, \beta_p) \geq l^{(\nu_\tau)} > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, d.h. $\tilde{\lambda} > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Mithin muß $\tilde{\lambda} = \lambda^{(\mu)}$ sein.

3. W. Ackermann hat den verschiedenen Typen von Limeszahlen $\in \mathfrak{A}_3$ Fundamentalfolgen zugeordnet ([A], S. 411). Es ist an sich ohne weiteres möglich, seine dortige Tabelle für beliebige $\mathfrak{A}_s$ zu verallgemeinern. Da wir jedoch für spätere Zwecke einige Fundamentalfolgen in etwas anderer Form benötigen, ziehen wir es vor, auf direktem Wege, unter der Voraussetzung $s \geq 2$, eine Tabelle für die Fundamentalfolgen herzuleiten. — Der Fall $s = 1$ lohnt keine gesonderte Behandlung; $\mathfrak{A}_1$ stellt nämlich nur eine geringfügige Modifikation der Cantorschen Bezeichnungsweise für die Zahlen unterhalb der kleinsten ε-Zahl $\varepsilon_0 = \Gamma_1$ dar, denn es gilt $(\alpha) = \omega^\alpha$ für $\alpha < \Gamma_1$, wie man ohne weiteres sieht.

Zunächst betrachten wir die Zahlen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$, wobei wir von nun an unter λ und μ stets Limeszahlen verstehen. Wir sagen, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ sei vom Typ c_p oder b_p oder a_p $(1 \leq p \leq s)$, je nachdem $\alpha_p = \lambda$ oder $= \eta + 1$ oder

$=1$ ist. Einerseits brauchen wir nun nicht alle 3^s Typen von Zahlen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ gesondert zu behandeln, die sich durch Zusammenstellung von s Typenzeichen $t_1, \ldots, t_s$ mit $t_p = c_p$ oder $= b_p$ oder $= a_p$ ergeben; über die Definition der Fundamentalfolge entscheidet nämlich entweder die Kenntnis von t_s allein oder die Kenntnis von t_s und demjenigen t_p, dessen Index $p < s$ dadurch charakterisiert ist, daß $\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_{s-1} = 1$ und entweder $p = 1$ oder $p > 1$ mit $\alpha_p \neq 1$ ist. Andererseits sind unter Umständen noch zusätzliche Kennzeichnungen außer der Angabe von t_s und t_p erforderlich. — In der folgenden Tabelle bedeutet λ_n bzw. μ_n die als bekannt angesehene Fundamentalfolge für λ bzw. μ.

$(c_p\, c_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1, \ \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, 1, \ldots, 1)_{s-1}. \end{array} \right.$

$(b_p\, c_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lim\limits_n \sigma_n, \\ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \ \sigma_1 = \lambda, \ 1 \leq p \leq s-1, \\ \qquad \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1)_{s-1}. \end{array} \right.$

$(a_1\, c_s)$ $(1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lambda \cdot \omega = \lim\limits_n \lambda \cdot n, \ \lambda > (1, \ldots, 1)_{s-1}.$

(c_s) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \lambda) = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \lambda_n), \ \lambda \sim > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}).$

$(c_p\, b_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1, \eta+1)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda')_s, \\ \qquad \lambda' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1, \eta)_s, \ 1 \leq p \leq s-1. \end{array} \right.$

$(b_p\, b_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta+1, 1, \ldots, 1, \eta+1)_s = \lim\limits_n \sigma_n, \\ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \\ \sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta+1, 1, \ldots, 1, \eta)_s, \ 1 \leq p \leq s-1. \end{array} \right.$

$(a_1\, b_s)$ $(1, \ldots, 1, \eta+1)_s = (1, \ldots, 1, \eta)_s \cdot \omega = \lim\limits_n (1, \ldots, 1, \eta)_s \cdot n.$

$(c_p\, a_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lim\limits_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1. \end{array} \right.$

$(c'_p\, a_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lim (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1)_s, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1, \quad \lambda \sim > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \quad \text{für} \quad p > 1. \end{array} \right.$

$(b_p\, a_s)$ $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1)_s = \lim\limits_n \sigma_n, \ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \\ \qquad \sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, 1, \ldots, 1)_s, \quad 1 \leq p \leq s-1. \end{array} \right.$

$(a_1\, a_s)$ $(1, \ldots, 1)_s = \omega = \lim n.$

Für Limeszahlen der Form $\pi_1 + \cdots + \pi_m$, $m > 1$ genügt die Festsetzung:

(l_s) $$\alpha + \pi = \lim_n (\alpha + \gamma_n), \qquad \pi = (\beta_1, \ldots, \beta_s) = \lim_n \gamma_n.$$

Die Definitionen (l_s) und $(a_1\, a_s)$ sind selbstverständlich. Die übrigen wollen wir kurz begründen. Ihre linken Seiten bezeichnen wir mit $\tilde{\lambda}$, ihre rechten mit $\lim\limits_n \sigma_n$. Man überzeugt sich leicht, daß in $(c_p\, c_s)$ bis $(b_p\, a_s)$ immer $\tilde{\lambda} > \sigma_n$

gilt. Nach Satz 1 und 2 ist daher stets $\lim_n \sigma_n = \varrho = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \leq \tilde{\lambda}$, welche Bezeichnung wir ebenfalls festhalten.

Zu $(c_p\ c_s)$: $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu)$ ist nicht möglich, denn zusammen mit $\varrho > \sigma_n$ ergäbe dies $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geq \varrho$; $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu)$ und somit $\tilde{\lambda} > \varrho$ steht im Widerspruch zu der Relation $\varrho > \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, \lambda)$, die aus $\varrho > \sigma_n$ und $\lambda > \mu$ folgt. Also ist $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \mu, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Aus $\varrho \leq \tilde{\lambda}$ folgt $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$, also $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_s) = (1, \ldots, 1, \xi_s)_{s-p}$ mit $\xi_s \leq \lambda$. Wäre $\xi_s < \lambda$, so folgte vermöge Satz 3, daß $\lambda > \varrho$ wäre. Also ist $\xi_s = \lambda$.

Zu $(b_p\ c_s)$: Aus $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta)$ folgte wegen $\xi_{p+1} < \sigma_n$ für hinreichend großes n: $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, \sigma_n)$, und hieraus ergäbe sich $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geq \varrho$. — $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1)$ und somit $\tilde{\lambda} > \varrho$ ist unvereinbar mit $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1, \lambda) < \varrho$. — Also ist $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Nun wie bei $(c_p\ c_s)$.

Zu $(a_1\ c_s)$: Aus $\lambda < \varrho = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \leq (1, \ldots, 1, \lambda)_s$ folgt $\xi_1 = \cdots = \xi_{s-1} = 1$, $\xi_s \leq \lambda$, also wie bei $(c_p\ c_s)$: $\xi_s = \lambda$.

Zu (c_s): $(\xi_1, \ldots, \xi_{s-1}) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$ würde $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geq \varrho$ liefern, und $(\xi_1, \ldots, \xi_{s-1}) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$, somit $\tilde{\lambda} > \varrho$, ergäbe $\lambda \geq \varrho$, d. h. $\lambda > \sigma_n$, also $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \nu)$ für $\nu < \lambda$. Nach Satz 3 hätte man daher $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$, entgegen der Voraussetzung.

Zu $(c_p\ b_s)$: Aus $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ folgte $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n)$ für hinreichend großes n, daher $\max(\xi_1, \ldots, \xi_s) \geq \varrho$. — $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ und damit $\tilde{\lambda} > \varrho$ gerät in Widerspruch zu $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, \eta + 1) < \lambda' < \varrho$. Also ist $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Aus $\varrho \leq \tilde{\lambda}$ folgt $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$, demnach $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_s) = (1, \ldots, 1, \xi_s)_{s-p}$ mit $\xi_s \leq \eta + 1$; wegen $\lambda' < \varrho$ muß aber $\xi_s = \eta + 1$ sein.

Zu $(b_p\ b_s)$: Die Unmöglichkeit von $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta)$ erkennt man wie bei $(b_p\ c_s)$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta + 1)$ läßt sich wie bei $(c_p\ b_s)$ widerlegen. Also $\varrho = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \zeta + 1, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_s)$. Nun wie bei $(c_p\ b_s)$.

Zu $(a_1\ b_s)$: Aus $(1, \ldots, 1, \eta)_s < \varrho = (\xi_1, \ldots, \xi_s) \leq \tilde{\lambda} = (1, \ldots, 1, \eta + 1)_s$ folgt $\varrho \leqq \tilde{\lambda}$ und somit $\varrho = \tilde{\lambda}$.

Zu $(c_p\ a_s)$: $(\xi_1, \ldots, \xi_p) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ und $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda)$ scheiden aus wie bei $(c_p\ b_s)$. Dann folgt $\varrho = \tilde{\lambda}$ sofort aus $\varrho \leq \tilde{\lambda}$.

Zu $(c'_p\ a_s)$: Nach Satz 3 gibt es ein n_0 mit $\lambda < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_{n_0}, 1, \ldots, 1)_s$. Aus den Ungleichungen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1)_s < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_{n+1}, 1, \ldots, 1)_s$ für $n + 1 \geq n_0$ ersieht man, daß die Fundamentalfolge in $(c'_p\ a_s)$ mit der in $(c_p\ a_s)$ äquivalent ist.

Bemerkung. An sich wäre $(c'_p\ a_s)$ überflüssig; aber unter den gebotenen Voraussetzungen ist $(c'_p\ a_s)$ bequemer als $(c_p\ a_s)$.

Zu $(b_p\ a_s)$: Man widerlegt $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \leqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta)$ bzw. $(\xi_1, \ldots, \xi_p) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta + 1)$ wie bei $(b_p\ c_s)$ bzw. $(b_p\ b_s)$. Nun wie bei $(c_p\ a_s)$.

4. Ordnet man jedem Symbol $\alpha \in \mathfrak{A}_s$ dasjenige Symbol α^* zu, welches entsteht, indem man jedes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ durch $(1, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_s^*)$ ersetzt, dann gehören alle α^* zu $\mathfrak{A}_{s+1}$ und aus $\alpha \leq \beta$ folgt $\alpha^* \leq \beta^*$ (aus $\alpha = \beta$ folgt natürlich

$\alpha^* = \beta^*$). Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit $N(\alpha)$ die Anzahl der in α auftretenden Zeichen ( ) und + und setzen $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \cdots$. Für $\alpha < \beta$ mit $N(\alpha, \beta) \leq 1$ ist die Behauptung $\alpha^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$, $\beta^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$, $\alpha^* < \beta^*$ offenbar richtig. Angenommen, sie sei bewiesen für $\alpha < \beta$ mit $N(\alpha, \beta) \leq n-1$. Sei nun $\alpha < \beta$, $N(\alpha, \beta) = n$. Wenn $\alpha = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, $m > 1$, so gilt $\pi_i \geq \pi_{i+1}$, $N(\pi_i, \pi_{i+1}) \leq n-1$; also gehören π_i^* und π_{i+1}^* zu $\mathfrak{A}_{s+1}$ und es gilt $\pi_i^* \geq \pi_{i+1}^*$. Daraus folgt $\alpha^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$. Wenn $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, so ist $N(1, \alpha_i) = N(\alpha_i) \leq n-1$ und daher $\alpha_i^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$, folglich wieder $\alpha^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$. Ebenso ergibt sich $\beta^* \in \mathfrak{A}_{s+1}$. — Die Relation $\alpha < \beta$ muß auf Grund eines der Fälle (G_s) stattfinden und dabei entweder auf endlich viele Relationen $\alpha_i < \beta_i$ mit $N(\alpha_i, \beta_i) < N(\alpha, \beta)$ zurückgeführt erscheinen [wie in $(G_s 4)$ und eventuell in $(G_s 2)$] oder unmittelbar ersichtlich sein [wie in $(G_s 1)$, $(G_s 3)$ und eventuell in $(G_s 2)$]. Wenn das erstere zutrifft, gilt wegen $N(\alpha_i, \beta_i) \leq n-1$ auch $\alpha_i^* < \beta_i^*$ und damit $\alpha^* < \beta^*$, während beim Eintreten der zweiten Möglichkeit die Relation $\alpha^* < \beta^*$ in derselben Weise evident ist wie $\alpha < \beta$. — Übrigens ist $N(\alpha) = N(\alpha^*)$.

Sei $\mathfrak{A}_s^*$ das System der α^*, $\alpha \in \mathfrak{A}_s$. Die wohlgeordneten Systeme $\mathfrak{A}_s^*$ und $\mathfrak{A}_s$ sind vom selben Typus; wir können sie daher miteinander identifizieren, d. h. $\alpha = \alpha^*$ setzen. Nach $(b_1 a_{s+1})$ ist $(2, 1, \ldots, 1)_{s+1} = \lim_n \sigma_n^*$, wo σ_n aus (14) entnommen ist. Also kommt

$$\Gamma_s = (2, 1, \ldots, 1)_{s+1} \quad (s \geq 1). \tag{16}$$

Ausführlicher formuliert:

Satz 7. $\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_s^*$ *ist der durch* $(2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ *bestimmte Abschnitt von* $\mathfrak{A}_{s+1}$ *(für* $s \geq 1$*).*

Ohne Verwendung von (14) läßt sich der Satz 7 etwa so beweisen, daß man $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1} = \lim_n \sigma_n^*$ (s. oben) für $\alpha^* \in \mathfrak{A}_s^*$ zeigt. Die vorstehende Ungleichung ist nämlich richtig für $N(\alpha^*) = 1$. Ist sie bewiesen für $N(\beta^*) \leq n-1$ und ist $N(\alpha^*) = n$, so wird im Fall $\alpha^* = \pi_1^* + \cdots + \pi_m^*$ $(m > 1)$ wegen $N(\pi_1^*) < n$ die Relation $\pi_1^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ und daher $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ gelten, und im Fall $\alpha^* = (1, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_s^*)$ folgt aus $N(\alpha_i^*) < n$, daß $\alpha_i^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ für $i = 1, \ldots, s$ und daher wegen $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ wiederum $\alpha^* < (2, 1, \ldots, 1)_{s+1}$ sein muß.

§11. Ähnlichkeit von $\mathfrak{A}_s$ und $[1, 1VII'^{s-1})$.

1. Wir wollen nun zeigen, daß $\mathfrak{A}_s$ als wohlgeordnete Menge dem Abschnitt $[1, 1VII'^{s-1})$ des konstruktiven Algorithmus ähnlich ist. Zu dem Zweck bedienen wir uns unter anderem der Rechenregeln des freien Algorithmus, die in II und III entwickelt sind, was wir unbedenklich tun können, weil die Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus wirklich „Ordnungszahlen" sind. Dabei benützen wir die Abkürzungen

$$J_\nu = I I'^\nu, \qquad J_0 = I \quad (\text{also } J_\nu I' = J_{\nu+1}), \tag{17}$$

indem die letztere Festsetzung im Einklang mit der im freien Algorithmus eingeführten Regel steht, daß ein Operator, der einen Exponenten 0 hat, einfach wegzulassen ist (II, (1), (2_n)). Dann gilt:

(18) $(\alpha W J_\nu^\tau) W J_\nu^{\tau+1} = \alpha W J_\nu^{\tau+1}$, $\tau \geq 0$, $\nu \geq 0$, W ein Operator erster Stufe.

Man hat nämlich für einen beliebigen Operator V von erster Stufe:

$$(\alpha V)\, V I I'^{\nu} = \alpha V I I'^{\nu}, \qquad \nu \geq 0,$$

welche Formel sich für $\nu \geq 1$ aus **III**, § 7, Satz 4 und dem fünften daran anschließenden Absatz, für $\nu = 0$ aber aus **II**, § 6, (22) ergibt. Ersetzt man in ihr V durch $W J_{\nu}^{\tau}$, so kommt (18) [wegen $W J_{\nu}^{\tau+1} = (W J_{\nu}^{\tau}) J_{\nu}$].

Außerdem setzen wir

$$-1 + \alpha = \dot{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha \geq 1. \tag{19}$$

Unsere Behauptung beweisen wir allgemein für $s \geq 3$; für $s = 2$ und $s = 1$ ergibt sie sich dann vermöge Satz 7. Der Beweis besteht in der Herleitung der folgenden Relationen (worin V durch $\alpha V = \alpha \cdot \omega$ erklärt ist):

$$(C_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lambda\big(\ldots((V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) J_{s-3}^{\dot{\alpha}_2}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\dot{\alpha}_p}, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1, \ \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1)_{s-1}. \end{cases}$$

$$(B_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1, \eta+1)_s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1, \eta)_s \big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\dot{\alpha}_p}, \\ \qquad 1 \leq p \leq s-1. \end{cases}$$

$$(\bar{C}_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lambda\big((\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}}\big) J_{s-p-1}^{\lambda}, \\ \qquad 2 \leq p \leq s-1, \quad \lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}). \end{cases}$$

$$(\bar{B}_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta+1, 1, \ldots, 1)_s \\ = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \eta, 1, \ldots, 1)_s \big((\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}}\big) J_{s-p-1}^{\dot{\eta}+1}, \ 2 \leq p \leq s-1. \end{cases}$$

$$(A_p^s) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 1, \ldots, 1)_s = 1\big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\dot{\alpha}_p}, \\ 1 \leq p \leq s-1, \ \alpha_2 < (\alpha_1+1, 1, \ldots, 1)_s, \ldots, \alpha_{s-1} < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-3}, \alpha_{s-2}+1, 1, 1). \end{cases}$$

Man bemerkt, daß (C_p^s), (B_p^s), (A_p^s) für $p < s-1$ als Spezialfälle von (C_{s-1}^s), (B_{s-1}^s), (A_{s-1}^s) angesehen werden können. Aber da wir die vorstehenden Relationen durch Induktion nach p beweisen werden, eignet sich die gewählte Bezeichnungsweise besser zum Zitieren. — Wir können sogleich die Aussage notieren:

Hilfssatz 2. *Sei* (C_p^s) *richtig für ein* $(p-1)$*-tupel* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ *und beliebiges* $\alpha_p \in \mathfrak{A}_s$. *Dann ist* $(\bar{C}_p^s)$ *richtig für das* $(p-1)$*-tupel* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$.

Beweis. Sei $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$. — Nach $(c_p\, a_s)$ wird

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, 1, \ldots, 1)_s = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1, \lambda)_s.$$

Auf den Ausdruck hinter lim ist aber (C_p^s) anwendbar, denn aus $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ folgt $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda_n, 1, \ldots, 1)_{s-1}$. Somit wird der obige Limes gleich $\lim_n \lambda\big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\dot{\lambda}_n} = \lambda\big(\ldots (V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}) \ldots\big) J_{s-p-1}^{\lambda}$.

2. Um mit dem Beweis unserer Relationen (C_p^s) bis (A_p^s) zu beginnen, nehmen wir zunächst an, (C_{s-2}^s) und (B_{s-2}^s) seien richtig für ein bestimmtes $(s-2)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}$ und (C_{s-1}^s) sowie (B_{s-1}^s) seien daraufhin bewiesen

für dieses $(s-2)$-tupel und alle $\alpha_{s-1} < \alpha'_{s-1} \in \mathfrak{A}_s$; die letztere Hypothese trifft zu für $\alpha'_{s-1} = 2$. Wir zeigen, daß stets α'_{s-1} durch $\alpha'_{s-1}+1$ ersetzt werden darf.

1. Fall. $\alpha'_{s-1} = \mu =$ Limeszahl. Für $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu)$ liefert $(c_{s-1}\, c_s)$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu, \lambda) = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu_n, \lambda)$, und das ist nach Induktionsvoraussetzung $= \lim_n \lambda\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_1^{\dot\alpha_{s-2}}\big) J_0^{\dot\mu_n} = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\mu}$, d. h. (C_{s-1}^s) gilt auch für $\alpha_{s-1} = \mu$.

Nach $(c_{s-1}\, b_s)$ wird $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu, \eta+1) = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu_n, \mu')$, wo $\mu' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu, \eta) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \mu_n)$. Der Limes ist also auf Grund der Induktionsannahme $= \lim_n \mu'\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\mu_n} = \mu'\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\mu}$, d. h. (B_{s-1}^s) stimmt auch für $\alpha_{s-1} = \mu$.

2. Fall. $\alpha'_{s-1} = \beta+1$. Für $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1)$ liefert $(b_{s-1}\, c_s)$: $\tilde\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1, \lambda) = \lim_n \sigma_n$, $\sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \sigma_n)$, $\sigma_1 = \lambda$. Um nun weiterzukommen, beweisen wir zunächst die Formel:

$$(20)\quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\nu) = \lambda\big(\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_1^{\dot\alpha_{s-2}}\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\nu} \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu < \tilde\lambda.$$

Für $\nu = 0$ ist (20) richtig nach Induktionsvoraussetzung. Sei (20) richtig für $\nu < \gamma < \tilde\lambda$. Ist $\gamma = \delta+1$, so folgt aus (B_{s-1}^s) nach Annahme: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\delta+1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\delta)\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta} = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\delta+1}$. — Ist γ Limeszahl, so liefert (c_s) mit Rücksicht auf Satz 5 und Satz 2: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\gamma) = \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \lambda+\gamma_n) = \lim_n \lambda\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\gamma_n}$ $= \lambda\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_0^{\dot\beta}\big)^{1+\gamma}$. Damit ist (20) bewiesen.

Nun ergibt sich aus (20): $\sigma_2 = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta}$, und wegen $\lambda + \sigma_n = \sigma_n$ für $n \geqq 2$: $\sigma_{n+1} = \lambda\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_0^{\dot\beta}\big)^{\sigma_n}$. Daher wird $\tilde\lambda = \lim_n \sigma_{n+1} = \lambda\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots) J_0^{\dot\beta}\big) I = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot\alpha_1})\ldots\big) J_0^{\dot\beta+1}$, womit (C_{s-1}^s) auch für $\alpha_{s-1} = \beta+1$ bestätigt ist.

Weiterhin wird vermöge $(b_{s-1}\, b_s)$:

$$\tilde\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1, \eta+1) = \lim_n \sigma_n,\ \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta, \sigma_n),$$
$$\sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta+1, \eta) > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \beta).$$

Nach Satz 5 gilt daher (20) mit $\lambda = \sigma_1$. Mit diesem Wert für λ schließt man nun wörtlich weiter wie im vorhergehenden Absatz und beweist die Richtigkeit von (B_{s-1}^s) auch für $\alpha_{s-1} = \beta+1$.

Nach dem Prinzip der transfiniten Induktion haben wir also daraus, daß (C_{s-2}^s) und (B_{s-2}^s) für ein bestimmtes $(s-2)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}$ als richtig gelten, gefolgert, daß (C_{s-1}^s) und (B_{s-1}^s) richtig sind für dieses $(s-2)$-tupel und alle $\alpha_{s-1} \in \mathfrak{A}_s$. Nach Hilfssatz 2 trifft daher auch $(\bar C_{s-1}^s)$ zu für das $(s-2)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}$; wir zeigen, daß dies auch von $(\bar B_{s-1}^s)$ ausgesagt werden kann. — Nach $(b_{s-1}\, a_s)$ wird

$$\tilde\lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta+1, 1) = \lim_n \sigma_n, \qquad \sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta, \sigma_n),$$
$$\sigma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta, 1).$$

Gemäß Satz 4 ist $\tilde{\lambda}$ die kleinste Zahl, welche $>(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta)$ ist. Analog wie (20) beweist man daher die Formel

$$(21) \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \eta, \nu) = \sigma_1\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots) J_0^{\dot{\eta}}\big)^{\dot{\nu}}, \qquad 1 \leq \nu < \tilde{\lambda}.$$

Vermöge (21) wird $\sigma_{n+1} = \sigma_1\big((\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots) J_0^{\dot{\eta}}\big)^{\sigma_n}$ für $n \geq 1$ und daraus folgt $\tilde{\lambda} = \sigma_1\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_0^{\dot{\eta}+1}$, also $(\overline{\mathrm{B}}_{s-1}^s)$.

3. Jetzt nehmen wir an, es sei für ein $p \leq s-2$ bewiesen, daß aus der Richtigkeit von (C_p^s) und (B_p^s) für ein p-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ die Richtigkeit von (C_{p+1}^s) und (B_{p+1}^s) für dieses p-tupel und beliebiges $\alpha_{p+1} \in \mathfrak{A}_s$ sowie die Richtigkeit von $(\overline{\mathrm{C}}_{p+1}^s)$ und $(\overline{\mathrm{B}}_{p+1}^s)$ für das genannte p-tupel folgt. Wir kommen soeben von dem Nachweis, daß diese Annahme für $p = s-2$ zutreffend ist. Außerdem setzen wir voraus, daß (C_{p-1}^s) und (B_{p-1}^s) für ein $(p-1)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ richtig sind, was für $p = 1$ gar keine Voraussetzung bedeutet. Wir zeigen, daß dann (C_p^s) und (B_p^s) für das gegebene $(p-1)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ und alle $\alpha_p \in \mathfrak{A}_s$ gelten und daß im Fall $p \geq 2$, also $s \geq 4$, auch $(\overline{\mathrm{C}}_p^s)$ und $(\overline{\mathrm{B}}_p^s)$ für das genannte $(p-1)$-tupel stimmen. Damit wird der Induktionsbeweis für die Relationen (C_p^s) bis $(\overline{\mathrm{B}}_p^s)$ beendet sein.

Zunächst folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß (C_p^s) und (B_p^s) richtig sind für das p-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 1$[11]). Seien (C_p^s) und (B_p^s) richtig für alle p-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$ mit $\alpha_p < \alpha_p' \in \mathfrak{A}_s$; wir zeigen die Richtigkeit für $\alpha_p = \alpha_p'$.

1. Fall. $\alpha_p' = \mu =$ Limeszahl. Der Beweis verläuft analog wie in **2**.

2. Fall. $\alpha_p' = \beta + 1$. Für $\lambda > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta+1, 1, \ldots, 1)_{s-1}$ liefert $(\mathrm{b}_p\, \mathrm{c}_s)$:

$$\tilde{\lambda} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta+1, 1, \ldots, 1, \lambda)_s = \lim_n \sigma_n,$$

$$\sigma_{n+1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \qquad \sigma_1 = \lambda.$$

Nun müssen wir ähnlich wie in **2** eine Formel zu Hilfe nehmen:

$$(22) \quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\nu, 1, \ldots, 1)_s = \lambda\big(((\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots) J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}}) J_{s-p-1}^{\dot{\beta}}\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\nu}, \\ 0 \leq \nu < \tilde{\lambda}. \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ ist (22) richtig nach der Induktionsvoraussetzung hinsichtlich $(\overline{\mathrm{C}}_{p+1}^s)$. Sei (22) richtig für alle $\nu < \gamma < \tilde{\lambda}$. Wenn $\gamma = \delta + 1$, so ergibt sich aus $(\overline{\mathrm{B}}_{p+1}^s)$ und (18):

$$\begin{aligned} &(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\delta+1, 1, \ldots, 1)_s \\ &\qquad = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\delta, 1, \ldots, 1)_s\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\delta+1} \\ &\qquad = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\delta+1}. \end{aligned}$$

Wenn γ Limeszahl, so findet man mittels der wegen Satz 5 hier anwendbaren Relation $(\mathrm{c}_{p+1}'\, \mathrm{a}_s)$:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\gamma, 1, \ldots, 1)_s &= \lim_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, \lambda+\gamma_n, 1, \ldots, 1)_s \\ &= \lim_n \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\gamma_n} = \lambda\big(\ldots(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots\big) J_{s-p-2}^{\lambda+\gamma}. \end{aligned}$$

[11]) Im Fall $p = 1$ beachte man $(\mathrm{a}_1\, \mathrm{c}_s)$ und $(\mathrm{a}_1\, \mathrm{b}_s)$!

Damit ist (22) bewiesen. — Wegen $\lambda+\sigma_n=\sigma_n$ für $n>1$ wird auf Grund von (22): $\sigma_{n+1}=\lambda(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-2}^{\sigma_n}$ für $n\geq 1$ $(\sigma_1=\lambda)$. Mit Rücksicht auf III, § 7, 5, (19) wird daher bei Beachtung von (17):

$$\tilde{\lambda}=\lim_n\sigma_{n+1}=\lambda\left((\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-1}^{\dot{\beta}}\right)J_{s-p-2}I'=\lambda(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-1}^{\dot{\beta}+1},$$

womit (C_p^s) auch für $\alpha_p=\beta+1$ bestätigt ist.

Nun zeigen wir dasselbe hinsichtlich (B_p^s). Nach $(b_p\ b_s)$ wird

$$\tilde{\lambda}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta+1,1,\ldots,1,\eta+1)_s=\lim_n\sigma_n,$$

$$\sigma_{n+1}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta,\sigma_n,1,\ldots,1)_s,$$

$$\sigma_1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta+1,1,\ldots,1,\eta)_s>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta).$$

Wegen Satz 5 gilt also (22) mit $\lambda=\sigma_1$; das weitere verläuft genau wie im vorhergehenden Absatz.

Damit sind (C_p^s) und (B_p^s) sowie nach Induktionsannahme auch $(\overline{C}_{p+1}^s)$ und $(\overline{B}_{p+1}^s)$ bestätigt für das gegebene $(p-1)$-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$ und beliebiges $\alpha_p\in\mathfrak{A}_s$. Zu beweisen ist im Fall $p\geq 2$, $s\geq 4$ noch $(\overline{B}_p^s)$ für das genannte $(p-1)$-tupel [die Richtigkeit von $(\overline{C}_p^s)$ ist ja durch den Hilfssatz 2 garantiert]. — Vermöge $(b_p\ a_s)$ gilt

$$\tilde{\lambda}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta+1,1,\ldots,1)_s=\lim_n\sigma_n,\quad \sigma_{n+1}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta,\sigma_n,1,\ldots,1)_s,$$

$$\sigma_1=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta,1,\ldots,1)_s.$$

Nach Satz 4 ist $\tilde{\lambda}$ die kleinste Zahl $>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta)$, woraus sich die Formel ergibt[12]:

$$(23)\quad\begin{cases}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\eta,\nu,1,\ldots,1)_s=\sigma_1\left(((\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p}^{\dot{\alpha}_{p-1}})J_{s-p-1}^{\dot{\eta}}\right)J_{s-p-2}^{\dot{\nu}},\\ 2\leq\nu<\tilde{\lambda};\qquad 2\leq p\leq s-2,\qquad s\geq 4.\end{cases}$$

Denn nach $(\overline{B}_{p+1}^s)$ ist (23) richtig für $\nu=2$, worauf der Beweis ähnlich fortgesetzt wird wie bei (22). — Aus (23) folgt $\sigma_{n+1}=\sigma_1(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-2}^{\sigma_n}$, also $\tilde{\lambda}=\lim_n\sigma_{n+1}=\sigma_1(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-2}I'=\sigma_1(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-1}^{\dot{\eta}+1}$.

4. Jetzt bleiben noch die Relationen (A_p^s) zu beweisen. (A_1^s) ist nach $(a_1\ a_s)$ richtig für $\alpha_1=1$. Wir nehmen an, (A_{p-1}^s) sei richtig für ein $(p-1)$-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$ $(1\leq p\leq s-1)$; dann ist (A_p^s) immer richtig für das p-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},1$. Sei (A_p^s) bereits bewiesen für alle p-tupel $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\alpha_p$ mit $\alpha_p<\alpha_p'<(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-2},\alpha_{p-1}+1,1,\ldots,1)_s$[13].

1. Fall. $\alpha_p'=\mu=$ Limeszahl. Nach Satz 4 ist $\mu\sim>(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})$ für $p>1$; somit kommt vermöge $(c_p'\ a_s)$:

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\mu,1,\ldots,1)_s=\lim_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\mu_n,1,\ldots,1)_s$$

$$=\lim_n 1(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-1}^{\dot{\mu}_n}=1(\ldots(VJ_{s-2}^{\dot{\alpha}_1})\ldots)J_{s-p-1}^{\mu}.$$

---

[12]) Sie läßt sich ebenso für $p=1$ und $s\geq 3$ beweisen, sobald die Relationen (C_p^s) bis $(\overline{B}_p^s)$ alle verifiziert sind. Aber man sieht leicht, daß (23) für $p=1$ mit (A_2^s) äquivalent ist.

[13]) Im Fall $p=1$ ist natürlich nur $\alpha_1'\in\mathfrak{A}_s$ zu fordern.

2. Fall. $\alpha_p' = \beta + 1$. Wenn $p > 1$, so wird vermöge $(\overline{B}^s_p)$ und (18):

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta + 1, 1, \ldots, 1)_s$$
$$= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta, 1, \ldots, 1)_s(\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\beta+1}_{s-p-1} = 1(\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\beta+1}_{s-p-1}.$$

Damit ist bewiesen, daß für $p \geq 2$ aus der Richtigkeit von (A^s_{p-1}) für das $(p-1)$-tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ die Richtigkeit von (A^s_p) für dieses $(p-1)$-tupel und alle $\alpha_p < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}, \alpha_{p-1}+1, 1, \ldots, 1)_s$ hervorgeht. — Sei nun $p = 1$, $\alpha_1' = \beta + 1$. Vermöge $(b_1\, a_s)$ wird

$$\tilde\lambda = (\beta + 1, 1, \ldots, 1)_s = \lim_n \sigma_n, \quad \sigma_{n+1} = (\beta, \sigma_n, 1, \ldots, 1)_s, \quad \sigma_1 = (\beta, 1, \ldots, 1)_s.$$

Nach der vorhergehenden Bemerkung ist vermöge (A^s_2): $\sigma_{n+1} = 1(V J^{\dot\beta}_{s-2}) J^{\sigma_n}_{s-3}$, während nach Induktionsannahme $\sigma_1 = 1 V J^{\dot\beta}_{s-2}$ gilt. Daher ergibt sich mit Rücksicht auf III, § 7, (19):

$$\tilde\lambda = \lim_n \sigma_{n+1} = 1(V J^{\dot\beta}_{s-2}) J_{s-3} I' = 1 V J^{\dot\beta+1}_{s-2}.$$

Hiermit sind die Relationen (A^s_p) bewiesen.

Aus (14) und (A^s_1) findet man jetzt $\Gamma_s = \lim_n 1 V J^{\sigma_n}_{s-2}$, $\sigma_1 = 1V$, $\sigma_{n+1} = 1 V J^{\sigma_n}_{s-2}$, also $\Gamma_s = 1 V J_{s-2} I' = 1 V J_{s-1}$ oder

$$\Gamma_s = 1 V I I'^{s-1}, \tag{24}$$

womit die eingangs dieses Paragraphen ausgesprochene Behauptung zunächst für $s \geq 3$ bestätigt ist. — Aus (16) und (A^3_1) entnimmt man aber: $\Gamma_2 = (2\,1\,1) = 1 V J_1 = 1 V I I'$, und aus Satz 7 vermöge $(\overline{B}^3_2)$: $\Gamma_1 = (2\,1) = (1\,2\,1) = (1V) V J_0 = 1 V I = 1 V I I'^0$ (vgl. auch § 10, **3**, erster Absatz). Deshalb gilt (24) allgemein für $s = 1, 2, 3, \ldots$.

5. Zum Schluß soll noch skizziert werden, wie man für $s \geq 3$ eine Zahl $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ rekursiv in eine reguläre Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus umformen kann; damit ist auch die Umwandlung der Zahlen $\pi_1 + \cdots + \pi_m \in \mathfrak{A}_s$, $m > 1$, gegeben. — Wie in Satz 6 sei $\lambda^{(\nu)}$ die Folge der Zahlen $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$. Dann läßt sich die Formel (20) nach den beiden Interpretationen in **2** so schreiben:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\right)^{1+\gamma}, \quad \nu \geq 1, \\ \lambda^{(\nu)} \leq \alpha_s = \lambda^{(\nu)} + \gamma < \lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\right) J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0. \end{cases} \tag{25}$$

Denn nach Satz 5 ist entweder $\lambda^{(\nu+1)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, \lambda^{(\nu)})$ mit $\lambda^{(\nu)} > (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1)$ oder es ist $\lambda^{(\nu+1)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, \eta+1)$ mit $\lambda^{(\nu)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, \eta)$. Der angegebene Ausdruck für $\lambda^{(\nu+1)}$ in (25) resultiert im ersten Fall aus (C^s_{s-1}) und im zweiten Fall aus (B^s_{s-1}). Daß aber jedes $\alpha_s \in \mathfrak{A}_s$ in der in (25) angegebenen Weise eingeschachtelt werden kann, folgt aus Satz 6 ($\alpha_s \geq \lambda^{(1)}$ vorausgesetzt).

Die Formel (21) kann man in die Form bringen:

$$\begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) = \lambda^{(0)}\left((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\right)^{\dot\alpha_s}, \quad \text{wobei} \\ \lambda^{(0)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1) \text{ und } 1 \leq \alpha_s < \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)}\left((\ldots(V J^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots) J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\right) J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0; \end{cases} \tag{26}$$

der hier angegebene Ausdruck für $\lambda^{(1)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}+1, 1)$ ergibt sich aus $(\overline{B}^s_{s-1})$. — Wenn $\alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ die entsprechenden Bedingungen erfüllen, kann man (A^s_{s-1}) auf $\lambda^{(0)}$ anwenden, so daß (26) liefert:

$$(27)\quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 1\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\right)^{\alpha_s}, \\ \alpha_2 < (\alpha_1+1, 1, \ldots, 1)_s = 1VJ^{\dot\alpha_1+1}_{s-2}, \ldots, \\ \alpha_s < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \alpha_{s-1}+1, 1) = 1\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\right)J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0 \end{cases}$$

Analog wie (20) in (25) kann man (22) umformen in

$$(28_p)\quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, 1, \ldots, 1)_s = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{p-1}}_{s-p}\right)J^{\alpha_p}_{s-p-1}, \quad \nu \geq 1, \\ \lambda^{(\nu)} \leq \alpha_p < \lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{p-2}}_{s-p+1}\right)J^{\dot\alpha_{p-1}+1}_{s-p}; \quad 2 \leq p \leq s-1. \end{cases}$$

Unter $\lambda^{(\nu)}$ ist dabei die Folge der Zahlen $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ zu verstehen; gegenüber (22) ist in (28_p) der Index p durch $p-1$ ersetzt worden. Entsprechend schreiben wir statt (23):

$$(29_p)\quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, 1, \ldots, 1)_s = \lambda^{(0)}\left(\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots\right)J^{\dot\alpha_p}_{s-p-1}, \\ \lambda^{(0)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, 1, \ldots, 1)_s, \\ 2 \leq \alpha_p < \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{p-2}}_{s-p+1}\right)J^{\dot\alpha_{p-1}+1}_{s-p}, \quad 3 \leq p \leq s-1, \ s \geq 4. \end{cases}$$

Die Formeln (28) und (29) benützen wir, um (26) noch weiter umzugestalten, wenn $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ nicht durch (27) ausgedrückt werden kann. Dann muß es einen Index q, $2 \leq q \leq s-1$, geben, so daß wohl $\alpha_i < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}+1, 1, \ldots, 1)_s$ ist für $q < i \leq s$, aber $\alpha_q \geq (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-2}, \alpha_{q-1}+1, 1, \ldots, 1)_s$ ausfällt. Wir zeigen, daß dann, unter $\lambda^{(\nu)}$ die Folge der Zahlen $> (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1})$ verstanden, die Relation gilt:

$$(30)\quad \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{s-1}}_0\right)^{\alpha_s}, \quad \text{wobei} \\ \lambda^{(\nu)} \leq \alpha_q < \lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{q-2}}_{s-q+1}\right)J^{\dot\alpha_{q-1}+1}_{s-q}, \quad 2 \leq q \leq s-1, \\ \alpha_{q+1} < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q+1, 1, \ldots, 1)_s = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{q-1}}_{s-q}\right)J^{\dot\alpha_q+1}_{s-q-1}, \ldots, \\ \alpha_s < (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-2}, \alpha_{s-1}+1, 1) = \lambda^{(\nu)}\left((\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots)J^{\dot\alpha_{s-2}}_1\right)J^{\dot\alpha_{s-1}+1}_0. \end{cases}$$

Wenn $\alpha_{q+1} = \cdots = \alpha_{s-1} = 1$ ist, so ist (30) die unmittelbare Folge von (26) und (28_q) (man beachte $\alpha_q = \dot\alpha_q$). Andernfalls seien $\alpha_{r_1}, \ldots, \alpha_{r_k}$, $q+1 \leq r_1 < \cdots < r_k \leq s-1$ genau die von 1 verschiedenen unter den Zahlen $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_{s-1}$. Nach (29_{r_1}) wird

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}, 1, \ldots, 1)_s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q, 1, \ldots, 1)_s\left(\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots\right)J^{\dot\alpha_{r_1}}_{s-r_1-1},$$

nach (29_{r_2}):

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}, 1, \ldots, 1)_s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}, 1, \ldots, 1)_s\left(\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots\right)J^{\dot\alpha_{r_2}}_{s-r_2-1}$$

usw. und nach (29_{r_k}):

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_k}, 1, \ldots, 1)_s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_{k-1}}, 1, \ldots, 1)_s\left(\ldots(VJ^{\dot\alpha_1}_{s-2})\ldots\right)J^{\dot\alpha_{r_k}}_{s-r_k-1}.$$

Wegen $\dot{\alpha}_{r_1} \geq 1, \ldots, \dot{\alpha}_{r_k} \geq 1$ und $\dot{\alpha}_q = \alpha_q$ ergibt sich, wenn man die rechten Seiten von (28_q) und der vorstehenden Gleichungen sukzessive in die nächstfolgenden einsetzt, vermöge **III**, § 7, Satz 4:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_k}, 1, \ldots, 1)_s$$
$$= \lambda^{(\nu)}\left(\ldots\left(\left(\ldots\left(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}\right)\ldots\right) J_{s-r_1-1}^{\dot{\alpha}_{r_1}}\right)\ldots\right) J_{s-r_k-1}^{\dot{\alpha}_{r_k}} = \lambda^{(\nu)}\left(\ldots\left(V J_{s-2}^{\dot{\alpha}_1}\right)\ldots\right) J_0^{\dot{\alpha}_s - 1}.$$

Führt man den letzten Ausdruck in (26) ein, so kommt wieder (30). Zu zeigen wäre noch, daß die oberen Schranken von $\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_s$ sich in der in (30) angegebenen Weise durch $\lambda^{(\nu)}$ und die J_n ausdrücken lassen. Das folgt aber sofort durch Anwendung der bewiesenen Formel (30).

Mit den Formeln (25), (27) und (30) sind wir offenbar in der Lage, jedes Symbol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathfrak{A}_s$ $(s \geq 3)$ nach und nach in eine reguläre Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus zu verwandeln. (27) liefert bereits eine solche Figur, wenn wir die $J_n^{\dot{\alpha}_s - n - 1}$ mit $\dot{\alpha}_{s-n-1} = 0$ weglassen und die übrigen $\dot{\alpha}_{s-n-1}$ sowie α_s bereits als umgewandelt annehmen. In (25) bzw. (30) ist $\lambda^{(\nu)}$ wieder mittels einer der Formeln (25), (27), (30) zu reduzieren usf. Nach endlich vielen Schritten muß dieses Verfahren mit einer letzten Anwendung von (27) seinen Abschluß finden. Die so von „hinten" her, d.h. von rechts nach links, entstandene Zahlenfigur ist regulär, wenn wir wieder die J_n weglassen, die den Exponenten 0 tragen, und die Exponenten erster Stufe $\neq 0$ bereits umgeformt denken.

Berichtigung.

In **I** [s. [1])] muß es auf S. 412, Zeile 5 von unten heißen: „$I^{(n)}$-Zahlen" statt: „Haupt-$I^{(n)}$-Zahlen", und daselbst, Zeile 4 von unten: „transfiniten Zahlen" statt: „Hauptzahlen". — In **II**, S. 447, Formel (16) sowie den beiden anschließenden Absätzen muß es heißen: „ε_1", „ε_r", „ε_i" statt: „$1 + \varepsilon_1$", „$1 + \varepsilon_r$", „$1 + \varepsilon_i$". — In **III**, S. 13, Formel (37) muß es am Schluß der ersten Zeile heißen: „$\alpha V J \bar{I}'_p$" statt: „$\alpha V J \bar{I}_p$".

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. Mai 1954.)

GUPTA, H. C.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 70—74 (1954)

An operational relation.

By
H. C. GUPTA.

1. Introduction. While the operational image of a function $f(x)$ which admits of a convergent expansion in ascending powers of x may be obtained by termwise interpretation, no such general method is known of finding the image when $f(x)$ admits of a convergent expansion in ascending powers of $1/x$. In this paper we obtain by the method of contour integration one such general formula, viz.

if
$$h(x) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r G(r)/(r!\, x^{\varrho+1+\nu r}),$$
then

$$(1) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r!} \left\{ G(r)\, \Gamma(-\nu r - \varrho)\, p^{\nu r+\varrho+1} + \frac{1}{\nu}\, \Gamma\left(\frac{\varrho-r}{\nu}\right) G\left(\frac{r-\varrho}{\nu}\right) p^{r+1} \right\} \equiv f(p),$$

where

$$(2) \quad G(r) \equiv \prod_{q=1}^{m} \{\Gamma(a_q + \alpha_q r)\} \Big/ \prod_{q=1}^{n} \{\Gamma(b_q + \beta_q r)\},$$

under the restrictions

$$-1 < \Sigma \beta_q - \Sigma \alpha_q = \sigma, \qquad \Sigma |\beta_q| - \Sigma \alpha_q = \delta < 1,$$

$\mathrm{Re}(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0$ and ν, α_q's are positive and real, while β_q's are real.

The formula (1) also holds when $\sigma = -1 = \delta$ if $h(x)$ is defined by its analytic continuation when $x < 1$.

2. A contour integral for $f(p)$. The image function $f(p)$ in (1) can be represented by BARNES's integral [1]

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{-\Gamma(-s)\, \Gamma(-\nu s - \varrho) \prod \{\Gamma(a_q + \alpha_q s)\}}{\prod \{\Gamma(b_q + \beta_q s)\}}\, p^{\nu s+\varrho+1}\, ds, \\ \qquad\qquad \sigma + \nu > -1, \quad \nu > 0, \quad \alpha\text{'s} > 0, \end{cases}$$

the integral being taken round a contour C which embraces the positive half of the real axis and encloses all the poles of the integrand except those of $\prod \{\Gamma(a_q + \alpha_q s)\}$.

Proof. By the asymptotic expansion of the Gamma function [2, p. 223] we know that if $|\arg s| < \pi$ and $|s|$ be large, then

$$(4) \quad |\Gamma(s+\alpha)| \sim |s^{s+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-s}| \sqrt{2\pi}\, I,$$

where I tends uniformly to unity as $|s| \to \infty$.

Hence the integral (3) is absolutely convergent, since $\nu+\sigma+1>0$. By Cauchy's theory of residues it is therefore equal to the sum of the residues at the poles of the integrand inside the contour. Now the residue of $\Gamma(a-\nu s)$ at its pole $\nu s=a+n$ is $(-)^{n-1}/(\nu . n!)$; and the integral is easily seen to be equal to the image function $f(p)$.

3. Asymptotic expansion of $f(p)$. If $s=u+iv$, where u is finite and $|v|$ is large, (4) becomes

$$|\Gamma(s+\alpha)| = \exp\{-\tfrac{1}{2}\pi|v|\}|v^{\alpha+u-\frac{1}{2}}e^{\pm\frac{1}{2}\pi i\alpha}|\sqrt{2\pi}\,I,$$

the $+$ or $-$ sign being taken according as v is positive or negative. Hence the contour integral will vanish when taken round that part of a great circle at infinity for which $R(s)>-k$, where k is any finite positive quantity, provided that

$$|\arg p|<\tfrac{1}{2}\pi\{1+(1-\delta)/\nu\}.$$

If then L is a line parallel to the imaginary axis, passing through the point $-k$ $(k>0)$ on the real axis, such that the lower bound of the poles of the integrand in (3) from the line L, and on the right of it, is a positive number ε (the point $-k$ not being a pole), we shall have

$$f(p) = (-2\pi i)^{-1}\int_L - S,$$

where S denotes the sum of the residues of the integrand at such of its poles as lie between L and C. Also translating the y-axis a distance k to the left, we have

$$-\int_L \equiv p^{\varrho+1-k\nu}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(-s+k)\,\Gamma(-\nu s+\nu k-\varrho)\,\Pi\{\Gamma(a_q-k\alpha_q+s\alpha_q)\}}{\Pi\{\Gamma(b_q-k\beta_q+s\beta_q)\}}\,p^{\nu s}\,ds$$
$$= p^{\varrho+1-k\nu}O(1).$$

Thus it is evident that $f(p)\sim -S+J_k$ such that $|J_k p^{-\varrho-1+\nu(k-\varepsilon)}|$, for any positive value of k, can be made as small as we please by taking $|p|$ sufficiently large. Now the affix of the pole which is on the right of the line L and nearest to it is $-k+\varepsilon=-(a_q+t)/\alpha_q$, say, t being a positive integer. Evaluating the residues and letting k, and consequently t as well, tend to ∞ we have the asymptotic expansion

$$\frac{f(p)}{p}\sim\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{m}\frac{(-)^r\Gamma(R')\,\Gamma(-\varrho+\nu R')\prod_{j=1}^{m}{}'\Gamma(a_j-\alpha_j R')}{\alpha_q . r!\prod_{j=1}^{n}{}'\{\Gamma(b_j-\beta_j R')\}\,p^{-\varrho+\nu R'}}, \tag{5}$$

where $R'\equiv(a_q+r)/\alpha_q$ and the dash on Π indicates that the factor corresponding to $j=q$ is to be left out.

4. Original of $f(p)$. First suppose that $\sigma>-1$ and $\delta<1$. Take a contour [3] Br' within the reflex angle BOA, where

$$\tfrac{1}{2}\pi<\widehat{BOX}=\widehat{XOA}<\tfrac{1}{2}\pi\{1+(1-\delta)/\nu\},$$

and to the left of the line $c\pm i\infty$, enclosing the negative half of the real axis.

Now by the asymptotic expansion (5), it is evident that the integral $\int \exp(px)\, f(p)\, dp/p$, $(x>0)$, will vanish when taken round those parts of a great circle at infinity which connect Br' to the line $c \pm i\infty$, provided that $\mathrm{Re}\,(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0$. Further the integrand has no poles to the right of Br' Hence provided that x is positive and real,

$$F(x) \equiv \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \frac{f(p)}{p}\, dp = \int_{Br'} e^{px} \frac{f(p)}{p}\, dp$$
$$= -(2\pi i)^{-1} \int_C \Gamma(-s)\, \Gamma(-\nu s - \varrho)\, G(s)\, ds \int_{Br'} e^{px} p^{\nu s+\varrho}\, dp,$$

on substituting for $f(p)/p$ from (3) and inverting the order of integration—which is justified by de la Vallée Poussin's theorem [4], since both the s- and p-integrals are absolutely convergent and the double integral exists. Now the p-integral [2, p. 227] is equal to

$$\int_{-\infty}^{(0+)} e^{px} p^{\nu s+\varrho}\, dp = 2\pi i/\Gamma(-\nu s - \varrho)\, x^{\nu s+\varrho+1}.$$

Hence

$$F(x) = -\int_C \Gamma(-s)\, G(s)\, ds/x^{\nu s+\varrho+1}, \tag{6}$$

which is absolutely convergent by virtue of (4) since $1+\sigma>0$. Evaluating the residues of the integrand at its poles $s=0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} \frac{f(p)}{p}\, dp = \frac{F(x)}{2\pi i} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r G(r)}{r!\, x^{\nu r+\varrho+1}} \equiv h(x), \text{ say.} \tag{7}$$

This $h(x)$ is a continuous function of x and its asymptotic expansion as $1/x \to \infty$ can be obtained like that of $f(p)$. It is found that if $\sigma > -1$, then

$$h(x) = O(x^{-\varrho-1+a\nu}), \quad \text{as} \quad x \to 0,$$

where a is the smallest of the numbers a_q/α_q, $q=1, 2, \ldots, m$.

Also as $x \to \infty$, $h(x) = O(x^{-\varrho-1})$.

Therefore $\int_0^{\infty} e^{-px} h(x)\, dx$ is convergent if $\mathrm{Re}\,(a\nu - \varrho) > 0$ and the convergence is absolute. Hence Mellin's theorem applied to (7) shows that

$$p \int_0^{\infty} e^{-px} h(x)\, dx = f(p),$$

which establishes (1) under the restrictions

$$\sigma > -1, \quad \delta < 1, \quad \mathrm{Re}\,(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0; \quad \nu > 0 \quad \text{and} \quad \alpha_q\text{'s} > 0.$$

5. Extension of the range of validity. When β_q's are all positive, $\sigma = \delta$. If then $\sigma = \delta = -1$, the integral (6) is absolutely convergent for $x > 1$, and so is the series for $h(x)$. For $0 < x < 1$, we start with the contour $-c \pm i\infty$, $c>0$ in place of the contour C in (3). The corresponding integral (6) vanishes

when taken round an infinite semicircle to the left of the imaginary axis; and $h(x)$ is seen to be equal to

$$(8)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{m}\frac{(-)^r\,\Gamma(R')\prod_{j=1}^{m}{}'\Gamma(a_j-\alpha_j R')\,x^{\nu R'-\varrho-1}}{\alpha_q\cdot r!\prod_{j=1}^{n}{}'\Gamma(b_j-\beta_j R')},$$

where R' and the dash on $\prod$ have the same meanings as in (5), and the asymptotic expansion of this function is the series for $h(x)$ in (1). Thus the relation (1) holds when $\sigma=-1$, provided that (8) represents $h(x)$ when $x<1$.

6. Particular cases of (1). A few cases of specialisation of (1), when the image function $f(p)$ and the original function $h(x)$ are expressible in terms of known functions, are given below:

(i) Taking $\nu=1$, $m=0=n$, we are led to the relation

$$2p^{1+\frac{1}{2}\varrho}K_\varrho\left(2\sqrt{p}\right)<e^{-\frac{1}{x}}\Big/x^{\varrho+1},$$

which is a special case of GOLDSTEIN's relation [5].

(ii) Put $\nu=1$, $m=1$, $n=0$, $\alpha_1=1$, and $a_1=\lambda+\frac{1}{2}\varrho$; then we find that [6]

$$p^{\frac{1}{2}\varrho+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}p}W_{\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2}\varrho}(p)<x^{\lambda-\frac{1}{2}\varrho-1}/(1+x)^{\lambda+\frac{1}{2}\varrho},\qquad \mathrm{Re}\,(\lambda-\tfrac{1}{2}\varrho)>0.$$

(iii) When $1=\nu=m=n=\alpha_1=\beta_1$ and $a_1=\varrho+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}b_1$, we have [7]

$$2p\,K_\varrho\left(\sqrt{p}\right)I_\varrho\left(\sqrt{p}\right)<(1/x)\exp(-1/2x)\,I_\varrho(1/2x).$$

(iv) Lastly, if $\nu=\frac{1}{2}$, $m=0$, $n=1$, $\beta_1=\frac{1}{2}$ and $b_1=1-\varrho$, we get

$$p^{\varrho+1}J_{-2\varrho}(2p^{\frac{1}{2}})\,K_{2\varrho}(2p^{\frac{1}{2}})<\sqrt{\pi}\,2^{(2\varrho+1)/3}\,x^{-4\varrho/3-7/6}\times$$
$$\times\left[(-)^{(2\varrho+1)/6}J_{-\varrho,-\frac{1}{3}}\{-3(4x)^{-\frac{1}{3}}\}+(-)^{(\varrho+2)/3}J_{\frac{1}{3}-\varrho,-\frac{1}{3}}\{-3(4x)^{-\frac{1}{3}}\}\right],$$

where $J_{m,n}(x)$ is the Humbert function defined as

$$J_{m,n}(x)=(\tfrac{1}{3}x)^{m+n}\,{}_0F_2(m+1,n+1;-\tfrac{1}{27}x^3)/\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1).$$

The expansions in infinite series of the various Bessel functions and Whittaker's function and of their products used in deducing the above particular cases are well-known [8].

The two infinite series in (1) are expressible by one in the cases (*a*) $\nu=1$, $\varrho=-\frac{1}{2}$ and (*b*) $\nu=1$, $\varrho=\frac{1}{2}$. In case (*a*) the image function $f(p)$ becomes

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left((-)^r/r!\right)\{G(r)\,\Gamma(-r+\tfrac{1}{2})\,p^{r+\frac{1}{2}}+\Gamma(-\tfrac{1}{2}-r)\,G(r+\tfrac{1}{2})\,p^{r+1}\}$$
$$=\sqrt{\pi p}\sum_{r=0}^{\infty}\{G(\tfrac{1}{2}r)\,(-2)^r\,p^{\frac{1}{2}r}/r!\};$$

and we are led to the formula

$$(9)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r\,G(r)}{r!\,x^{r+\frac{1}{2}}}>\sqrt{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{G(\frac{1}{2}r)\,(-2)^r\,p^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}}}{r!}.$$

Further, if we take every α and β to be equal to 2 and use the formula

$$\Gamma(2a+2r) = 2^{2r}\,\Gamma(2a)\,(a,r)\,(a+\tfrac{1}{2},r),$$

then either member of (9) can be expressed by only one generalized hypergeometric function and we arrive at the known relation [9]

$$(10)\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,{}_{2m}F_{2n}\left(\begin{matrix} a_q,\ a_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,2,\ldots,m; \\ b_q,\ b_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,2,\ldots,n; \end{matrix} -\frac{2^{2m-2n}}{x}\right) \right\} > \sqrt{p}\,{}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1,\ a_2,\ldots,a_m; \\ b_1,\ b_2,\ldots,b_n; \end{matrix} -2\sqrt{p}\right).$$

By analytic continuation this relation holds for $m \leq n$. In case (*b*) we have corresponding to (9) and (10) the relations

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r\,G(r)}{r!\,x^{r+\frac{3}{2}}} > \sqrt{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-2)^r\,G(\tfrac{1}{2}r-\tfrac{1}{2})\,p^{\frac{1}{2}r+1}}{r!},$$

and

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x^3}}\,{}_{2m}F_{2n}\left(\begin{matrix} a_q,\ a_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,\ldots,m; \\ b_q,\ b_q+\tfrac{1}{2},\ q=1,\ldots,n; \end{matrix} -\frac{2^{2m-2n}}{x}\right) > p\,{}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1-1,\ldots,a_m-1; \\ b_1-1,\ldots,b_n-1; \end{matrix} -2\sqrt{p}\right).$$

Besides the above, the special cases of (1) when $\nu = 1$, 2 and $\frac{1}{2}$ have been obtained by a different method by GUPTA [8]. These occur as Results 18, 19 and 20 and admit of a number of interesting particular cases when the original $h(x)$ can be expressed in terms of known functions.

I am indebted to the referee for pointing out that some general particular cases are to be found in "Tables of Integral Transforms" by ERDÉLYI-MAGNUS-OBERHETTINGER-TRICOMI, Vol. I, p. 220.

Bibliography.

[1] BARNES, E. W.: The asymptotic expansion of integral functions defined by generalised hypergeometric series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **5**, 59—116 (1907). — [2] COPSON, E. T.: Functions of a complex variable. Oxford 1935. — [3] BROMWICH, T. J. I'A.: Normal coordinates in dynamical systems. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15**, 401—448 (1916). See also MCLACHLAN, N. W.: Complex variable and operational calculus, p. 91. Cambridge 1939. — [4] BROMWICH, T. J. I'A.: Theory of infinite series. Macmillan 1942. — [5] GOLDSTEIN, S.: Operational representations of Whittaker's confluent hypergeometric function and Weber's parabolic cylinder function. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **34**, 103—125 (1932). — [6] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: Modern analysis, p. 340. Cambridge 1927. — [7] MITRA, S. C.: On certain integrals and expansions involving Bessel functions. Bull. Calc. Math. Soc. **25**, 81—98 (1933). — [8] GUPTA, H. C.: On operational calculus. Proc. Nat. Inst. of Sci. India **14**, 131—156 (1948). — [9] COSSAR, J., and A. ERDÉLYI: Dictionary of Laplace transforms Pt. 3B, 67 Adm. Comp. Ser. London 1946.

Muslim University, Aligarh (India) and University of Manchester (England).

(Eingegangen am 18. Mai 1953.)

PATI, T.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 75—78 (1954)

A Tauberian theorem for absolute summability.

By
T. PATI.

1.1. *Definition.* Let $\sum_1^\infty a_n$ be a given infinite series, and λ_n a positive, steadily increasing, monotonic function of n, tending to infinity with n. We write

$$A_\lambda(\omega) = A_\lambda^0(\omega) = \sum_{\lambda_n \leq \omega} a_n,$$

and

$$A_\lambda^r(\omega) = \sum_{\lambda_n \leq \omega} (\omega - \lambda_n)^r a_n \quad (r > 0).$$

The series $\sum a_n$ is said to be absolutely summable (R, λ, r), or summable $|R, \lambda, r|$, $r \geq 0$, if $A_\lambda^r(\omega)/\omega^r$ is of bounded variation in (A, ∞), where A is a finite positive number[1]). We may, for example, take $A = \lambda_1$.

It is evident that summability $|R, \lambda, 0|$ is equivalent to absolute convergence.

1.2. The first theorem of consistency for absolute Riesz summability, given by Obrechkoff, runs as follows.

Theorem A[1]). *If an infinite series $\sum a_n$ is summable $|R, \lambda, r|$, $r \geq 0$, then it is summable $|R, \lambda, k|$ for $k > r$.*

It is known that a series which is summable $|R, \lambda, k|$ is not necessarily summable $|R, \lambda, r|$ when $r < k$. The object of this paper is to find additional conditions so that summability $|R, \lambda, k|$, $k > 0$, may imply summability $|R, \lambda, 0|$, which will constitute a Tauberian theorem for absolute Riesz summability.

It may be mentioned that the theorem of this paper includes as a particular case Theorem C of the paper "A criterion for the absolute convergence of a Fourier series", recently published in Proc. London Math. Soc. (2)[2]).

My warmest thanks are due to Dr. B. N. Prasad for his kind encouragement and helpful guidance.

2.1. Theorem. *If* (i) *$\sum a_n$ is summable $|R, \lambda, k|$, $k > 0$,* (ii) *$\{a_n \lambda_n/(\lambda_n - \lambda_{n-1})\}$ is a sequence of bounded variation and* (iii) *$\{\lambda_n/\lambda_{n+1}\}$ is a sequence of bounded variation, then $\sum a_n$ is absolutely convergent.*

2.2. We require the following lemmas for the proof of our theorem.

Lemma 1[3]). *Let $\mu_m > 0$,*

$$\lambda_m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m,$$

and

$$d_m = \frac{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \cdots + \mu_m c_m}{\lambda_m}.$$

[1]) OBRECHKOFF [2] and [3].
[2]) MOHANTY [1].
[3]) MOHANTY [1], Lemma 4.

Then, if the sequence $\{c_m\}$ is of bounded variation, the sequence $\{d_m\}$ is of bounded variation.

Lemma 2. *Let* $\mu_m > 0$,

$$\lambda_m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m,$$

and

$$d_m = \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n (\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa} c_n}{\lambda_{m+1}^{\varkappa+1}},$$

where $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$. *Then, if the sequence $\{c_m\}$ is of bounded variation and the sequence $\{\lambda_m/\lambda_{m+1}\}$ is of bounded variation, the sequence $\{d_m\}$ is of bounded variation.*

Proof. Expanding $(\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa}$ by the binomial theorem, we observe that the lemma will be proved if only we establish that, under the hypotheses of the lemma, the sequence

$$\left\{\frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s c_n}{\lambda_{m+1}^{s+1}}\right\} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

is of bounded variation. Now

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s c_n}{\lambda_{m+1}^{s+1}} = \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s c_n}{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s}{\lambda_{m+1}^{s+1}}.$$

Hence, by virtue of Lemma 1, $\{d_m\}$ will be a sequence of bounded variation, if the sequence

$$(*) \qquad \left\{\frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s}{\lambda_{m+1}^{s+1}}\right\} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

is of bounded variation. We proceed to prove this.

We have, by Abel's transformation,

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} \mu_n \lambda_n^s}{\lambda_{m+1}^{s+1}} = \frac{\sum_{n=1}^{m-1} \Delta\lambda_n \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s+1}} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{m-1} \Delta\lambda_n \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{n+1}^{s}}\right) \lambda_{n+1}^{s}}{\lambda_{m+1}^{s+1}} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}$$

$$= -\frac{\sum_{n=1}^{m-1} (\lambda_{n+1}^{s+1} - \lambda_n^{s+1}) \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{n+1}^{s}}\right) \left(\frac{\lambda_{n+1}^{s}}{\lambda_n^{s} + \cdots + \lambda_{n+1}^{s}}\right)}{\lambda_m^{s+1} - \lambda_1^{s+1}} \cdot \frac{\lambda_m^{s+1} - \lambda_1^{s+1}}{\lambda_{m+1}^{s+1}} +$$

$$+ \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \cdot \frac{\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu \lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}.$$

We observe at this stage that the sequence

$$\left\{\frac{\lambda_{m+1}^{s}}{\lambda_m^s+\lambda_m^{s-1}\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_{m+1}^{s}}\right\}$$

is of bounded variation, since

$$\frac{1}{\lambda_{m+1}^{s}}(\lambda_m^s+\lambda_m^{s-1}\lambda_{m+1}+\cdots+\lambda_{m+1}^{s}) = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^s+\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}\right)^{s-1}+\cdots+\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}}+1$$

is of bounded variation and >1. If, now, we assume that the sequence

$$\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu\lambda_\nu^{s-1}}{\lambda_{m+1}^{s}}\right\}$$

is of bounded variation, then by Lemma 1 and by virtue of the bounded variation of $\{\lambda_m/\lambda_{m+1}\}$ the sequence (*) will be of bounded variation. Repeating the same reasoning, we conclude that the sequence (*) is of bounded variation if only the sequence

$$\left\{\frac{\sum_{\nu=1}^{m}\mu_\nu}{\lambda_{m+1}}\right\},$$

that is, the sequence $\{\lambda_m/\lambda_{m+1}\}$ be of bounded variation, which, by hypothesis, is the case. This completes the proof of Lemma 2.

2.3. Proof of the Theorem.

By virtue of the first theorem of consistency (Theorem A) we can assume, without loss of generality, that k is a positive integer ≥ 1. Let $k=\varkappa+1$, where $\varkappa=0, 1, 2, \ldots$.

We have

$$\begin{aligned}\frac{A_\lambda^{\varkappa+1}(\lambda_{m+1})}{\lambda_{m+1}^{\varkappa+1}} &= \lambda_{m+1}^{-\varkappa}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa a_n - \\ &\quad -\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa\lambda_n a_n \\ &= s_m-\lambda_{m+1}^{-1}\sum_{n=1}^{m}\lambda_n a_n - \\ &\quad -\lambda_{m+1}^{-2}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m-1}-\lambda_n)\lambda_n a_n - \\ &\quad -\cdots- \\ &\quad -\lambda_{m+1}^{-\varkappa}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^{\varkappa-1}\lambda_n a_n - \\ &\quad -\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)}\sum_{n=1}^{m}(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa\lambda_n a_n.\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}\sum |\Delta s_m| &\leq \sum |\Delta \{\lambda_{m+1}^{-1} \sum_{n=1}^{m} \lambda_n a_n\}| + \\ &+ \cdots + \\ &+ \sum |\Delta \{\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)} \sum_{n=1}^{m} (\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa} \lambda_n a_n\}| + \\ &+ \sum |\Delta \{A_{\lambda}^{\varkappa+1}(\lambda_{m+1})/\lambda_{m+1}^{\varkappa+1}\}| \\ &\leq \sum \left|\Delta \left\{\lambda_{m+1}^{-1} \sum_{n=1}^{m} \mu_n \left(\frac{\lambda_n a_n}{\mu_n}\right)\right\}\right| + \\ &+ \cdots + \\ &+ \sum \left|\Delta \left\{\lambda_{m+1}^{-(\varkappa+1)} \sum_{n=1}^{m} \mu_n (\lambda_{m+1} - \lambda_n)^{\varkappa} \left(\frac{\lambda_n a_n}{\mu_n}\right)\right\}\right| + \\ &+ \int_{\lambda_1}^{\infty} \left|\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{A_{\lambda}^{\varkappa+1}(\omega)}{\omega^{\varkappa+1}}\right\}\right| d\omega.\end{aligned}$$

Hence, by Lemma 2 and hypotheses (i) and (ii), $\sum_m |\Delta s_m|$ is convergent, that is, $\sum a_n$ is absolutely convergent. This completes the proof of the theorem.

References.

[1] MOHANTY, R.: A criterion for the absolute convergence of a Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2) **51**, 186—196 (1949). — [2] OBRECHKOFF, N.: Sur la sommation absolue des séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 215—217 (1928). — [3] OBRECHKOFF, N.: Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen. Math. Z. **30**, 375—386 (1929).

Dept. of Math., University of Allahabad (India).

(Eingegangen am 8. Mai 1954.)

SIDDIQI, J. A.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 79—81 (1954)

On a theorem of Fejér.

By
JAMIL A. SIDDIQI.

1. Let $f(x)$ be a function integrable in the sense of Lebesgue and periodic with period 2π and let the series conjugate to its Fourier series be

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\,x - a_n \sin n\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x). \tag{1}$$

FEJÉR [1][1]) (see also ZYGMUND [3] p. 62) has proved that if $f(x)$ is of bounded variation, then the sequence $n\,c_n(x)$ is summable (C, r) $(r>0)$ [2]) to $\pi^{-1}\{f(x+0) - f(x-0)\} = \pi^{-1}D(x)$ at every point of jump of the function $f(x)$. In this note we extend this result to certain general regular triangular methods of summability which contain that of Cesàro as a particular case. As an immediate corollary of our theorem we obtain that under the same hypothesis as that of Fejér's theorem, $n\,c_n(x)$ is summable by harmonic means to $\pi^{-1}D(x)$. This sharpens the theorem of Fejér in view of the fact that whenever a sequence is summable by harmonic means it is summable (C, r) for every $r > 0$ but not conversely, a result due to M. RIESZ [2].

2. Let

$$\Lambda = (\lambda_{n,k}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda_{n,0} = 1)$$

be a triangular matrix of real or complex numbers. The sequence (s_n) is said to be summable (Λ) if

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_{n,k}\, s_k \qquad (\Delta\lambda_{n,k} = \lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})$$

exists. The conditions of regularity are

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = 1 \qquad \text{for every fixed } k; \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta\lambda_{n,k}| \leq M \qquad \text{independently of } n. \tag{3}$$

We prove the following

Theorem. *Let $f(x)$ be a function of bounded variation in $[0, 2\pi]$ and periodic with period 2π. If (Λ) is regular and if*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |\Delta^2\lambda_{n,k}| = 0, \qquad (\Delta^2\lambda_{n,k} = \Delta\lambda_{n,k} - \Delta\lambda_{n,k+1}) \tag{4}$$

the sequence $n\,c_n(x)$ is summable (Λ) to $D(x)/\pi$ at every point x of jump of $f(x)$.

[1]) The numbers within the paranthesis refer to the bibliography at the end.

[2]) Fejér has proved the theorem for $r = 1$ only but its extension for $r > 0$ is direct and already known.

Proof. Let $x \in [0, 2\pi]$ be a point of jump of the function $f(x)$. Consider

$$\sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k}\, k\, (b_k \cos k\,x - a_k \sin k\,x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t)\, k \sin k\,t\, dt$$

$$= \frac{D(x)}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} \cos k\,t\, d\psi_x(t)$$

$$= \frac{D(x)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t),$$

where $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t)$ and $K_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Delta \lambda_{n,k} \cos k\,t$. We have to prove that under the conditions of the theorem

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t) = 0.$$

Since $\psi_x(t)$ is of bounded variation in $[0, \pi]$, given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that

$$\int_0^{\delta} |\, d\psi_x(t)| < \varepsilon,$$

and, therefore, by virtue of (3),

$$\left| \int_0^{\delta} K_n(t)\, d\psi_x(t) \right| \leq A\, \varepsilon.$$

By Abel's transformation we have

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^2 \lambda_{n,k} \frac{\sin (k + \frac{1}{2})\, t}{2 \sin \frac{1}{2} t} + \frac{1}{2} \Delta \lambda_{n,0}$$

and, therefore, since (2) and (4) hold, for fixed δ, we can choose $n_0 = n_0(\varepsilon)$ such that for $n \geq n_0$,

$$\max_{(\delta, \pi)} |\, K_n(t)| < \varepsilon.$$

It follows that for $n \geq n_0$

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t) \right| \leq B\, \varepsilon.$$

Consequently, we have for $n \geq n_0$,

$$\left| \int_0^{\pi} K_n(t)\, d\psi_x(t) \right| \leq (A + B)\, \varepsilon,$$

and the proof of the theorem is thus completed.

3. If we choose $\lambda_{n,k}=\frac{P_{n-k}}{P_n}$ and put $p_n=P_n-P_{n-1}$, $p_0=P_0$, the (A) method of summability reduces to Nörlund's (N, p_n) method of summability. It is easily seen that the regularty conditions reduce to

$$\lim_{n\to\infty} p_n/P_n=0, \tag{2'}$$

$$\sum_{k=0}^{n}|p_k|\leq M|P_n| \quad \text{independently of } n, \tag{3'}$$

and, therefore, for regular (N, p_n) methods our theorem holds provided

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}|\Delta p_k|/|P_n|\right\}=0, \quad \lim_{n\to\infty}|P_n|=\infty \quad (\Delta p_k=p_k-p_{k-1}). \tag{4'}$$

The (C, r) $(r>0)$ and the harmonic methods which correspond respectively to the choices $p_n=\binom{n+r-1}{r}$ and $p_n=\frac{1}{n+1}$, are regular methods of summability and it can easily be verified that they satisfy the condition (4'). Our theorem, thus, includes that of Fejér as a special case and, as we have remarked in § 1, it sharpens it because, if $f(x)$ is periodic and of bounded variation, the sequence $n\,c_n(x)$ is summable $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ and the summability $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ implies the summability (C, r) for every $r>0$, but not conversely.

References.

[1] Fejér, L.: J. reine angew. Math. **142**, 165—188 (1913). — [2] Riesz, M.: Proc. London Math. Soc. **22**, 412—419 (1924). — [3] Zygmund, A.: Trigonometrical Series, Warszawa-Lwów, 1935.

Dept. of Math., Muslim University, Aligarh (India).

(Eingegangen am 26. Juni 1954.)

WEIER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 82—93 (1954)

Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl.

Von
JOSEF WEIER.

Sind P eine endliche simplizial zerlegbare Mannigfaltigkeit und g, h homotope Abbildungen von P in sich, deren jede höchstens endlich viele Fixpunkte hat, so stimmen die Summen der Indizes der Fixpunkte von g und h überein. Dieser Satz behauptet die Homotopieinvarianz der Indexsummen; man kann ihn mit Hilfe der LEFSCHETZschen Zahl oder der HOPFschen Spureninvariante beweisen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Beweis angegeben, der ohne die in Rede stehenden Konstanten auskommt und überdies auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten gilt.

Wie Abschnitt 3 zeigt, läßt sich das vorerwähnte Invarianztheorem leicht auf folgenden einfacheren Satz zurückführen: *Es seien U eine in P offene Menge und g, h stetige Abbildungen von P in sich mit*

$$p \neq g(p) = h(p), \quad \text{wenn} \quad p \in P - U,$$

und den Eigenschaften: für $p \in \overline{U}$ sind $\varrho(p, g(p))$ und $\varrho(p, h(p))$ hinreichend klein; g und h haben nur endlich viele Fixpunkte. Dann stimmen die Indexsummen von g und h überein. — Dabei bezeichnet $\overline{U}$ die abgeschlossene Hülle von U und $\varrho(a, b)$ die Entfernung der Punkte a und b. Dem Beweis des letzten Satzes dienen die Abschnitte 1 und 2: Abschnitt 1 durch Herleitung eines Satzes im Kleinen, Abschnitt 2 durch Rückführung des in Rede stehenden Satzes auf den Satz im Kleinen.

Die weiterhin behandelten kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten sind sämtlich als in einem Euklidischen Zahlenraum liegend vorausgesetzt. Dies bedeutet wegen des MENGER-NÖBELINGschen Einbettungssatzes keine Einschränkung gegenüber dem Fall beliebiger kompakter topologischer Mannigfaltigkeiten.

Der über die HOPFsche Spurformel führende Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten von endlichen simplizial zerlegbaren Mannigfaltigkeiten auf endliche homogene Polyeder und von den letzteren auf beliebige endliche Polyeder[1]) ausdehnen. Hingegen erfordert eine Verallgemeinerung des hier gegebenen Beweises auf beliebige endliche Polyeder Zusätze, die die Überlegungen wesentlich verschärfen.

1. Ein Satz im Kleinen.

Der in diesem Abschnitt herzuleitende Satz enthält, obschon sein Inhalt durch keinen überraschenden oder einprägsamen Sachverhalt ins Auge springt,

[1]) WECKEN, F.: Fixpunktklassen. I. Math. Ann. **117**, 659—671 (1941).

bereits wesentliche Stücke aus dem unten geführten Invarianzbeweis für die algebraische Fixpunktzahl.

Zunächst einige Bemerkungen zur Bezeichnungsweise. Ist jedem Punkt p einer Menge genau ein Punkt $f(p)$ einer anderen Menge zugeordnet, so bedeutet $f(p)$ stets den Punkt, während die ganze Zuordnungsvorschrift mit f, nirgends mit $f(p)$ bezeichnet wird. In einem Euklidischen Zahlenraum gelegene Simplexe sind stets offen und gradlinig gemeint. Eine in einem Euklidischen Zahlenraum liegende topologische Mannigfaltigkeit ist eine Menge P dieses Raumes derart, daß eine natürliche Zahl r und zu jedem Punkt p von P eine in P offene zum R^r homöomorphe Menge $\ni p$ existiert. Sind $a=(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und $b=(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ Punkte des r-dimensionalen Euklidischen Zahlenraumes R^r, so bedeutet $a+b$ den Punkt $(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_r+\beta_r)$ und $\varrho(a, b)$ die Entfernung der Punkte a, b.

Ist r eine natürliche Zahl, V eine offene r-dimensionale Vollkugel im R^r, ferner q ein Punkt aus V und f eine affine Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r mit q als einzigem Fixpunkt, so ist die durch $f'(p)=f(p)-p$, $p\in\overline{V}$, bestimmte Abbildung f' von $\overline{V}$ in den R^r nicht ausgeartet affin. Je nachdem f' positiv oder negativ, heißt $+1$ oder -1 der „*Index*" von q bei f. Wir bezeichnen q als einen „*affinen*" Fixpunkt von f.

Die Bedeutung von r, V und q sei die gleiche wie im letzten Absatz. Ist f eine beliebige stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r mit q als einzigem Fixpunkt, so kann man den „*Index*" von q bei f wie folgt erklären. Es sei f' eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^r mit $f'(p)=f(p)$, $p\in\overline{V}-V$, und den Eigenschaften: f' hat nur endlich viele Fixpunkte; zu jedem Fixpunkt a von f' existiert eine offene r-dimensionale Vollkugel V_a, so daß $a\in V_a\subset V$ und f' auf $\overline{V}_a$ affin ist. Dann heißt die Summe der Indizes der Fixpunkte von f' der „*Index*" von q bei f.

Die vorstehende Erklärung des Fixpunktindexes ist, wie aus bekannten Sätzen folgt, eindeutig. Es gilt also, wobei wieder r eine natürliche Zahl und V eine offene r-dimensionale Vollkugel im R^r bezeichnet, der folgende

spezielle Eindeutigkeitssatz. *Bedeuten g und h stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in den R^r mit $p\neq g(p)=h(p)$, $p\in\overline{V}-V$, und der Eigenschaft, daß jeder Fixpunkt von g und ebenso jeder solche von h affin, so sind die Summe der Indizes der Fixpunkte von g und diejenige von h gleich.*

Wie bekannt, ist der Index topologisch invariant und daher, wenn f eine stetige Abbildung einer topologischen Mannigfaltigkeit in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten bedeutet, in jedem Fixpunkt von f der „*Index*" erklärt. Als „*Indexsumme*" von f bezeichnen wir, wenn f keinen Fixpunkt hat, die Zahl 0, sonst die Summe der Indexe der Fixpunkte von f.

Wir beginnen unsere weiteren Überlegungen mit einem

Hilfssatz. *Es seien r eine natürliche Zahl, S ein Simplex einer Dimension $<r$ im R^r, K der aus dem Simplex S und seinen Seiten bestehende Komplex, weiter $S_1, \ldots, S_m$ Simplexe $\neq S$ von K, V und X beschränkte offene Mengen mit*

$$\overline{S}-(\overline{S}_1+\cdots+\overline{S}_m)\subset V \quad \text{und} \quad \overline{S}_1+\cdots+\overline{S}_m\subset X,$$

ferner g und h stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und

$$p \neq g(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{X} \cdot \overline{V}.$$

Dann gibt es eine $\overline{S}$ enthaltende offene Menge Y und stetige Abbildungen g', h' von $\overline{V}$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften:

$$g'(p) = g(p) \quad \text{und} \quad h'(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{V} - V;$$
$$p \neq g'(p) = h'(p) \cdot \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y} \cdot \overline{V};$$

die Indexsummen von g und g', ebenso die von h und h' sind gleich.

Beweis. Ist q ein auf $\overline{S}$ gelegener Fixpunkt von g, so ist $q \notin \overline{X}$, und daher gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß alle Punkte p des R^r mit $\varrho(p, q) < \varepsilon$ in V liegen und zu $\overline{X}$ fremd sind.

Durch eine kleine Verschiebung der auf $\overline{S}$ liegenden Fixpunkte von g kann man daher eine Abbildung g' von $\overline{V}$ in den R^r gewinnen, über die gilt: es hat g' höchstens endliche viele Fixpunkte;

$$g'(p) = g(p) \quad \text{für} \quad p \in (\overline{V} - V) + \overline{X} \cdot \overline{V};$$

auf $\overline{S}$ befindet sich kein Fixpunkt von g'; die Indexsummen von g und g' stimmen überein.

Da $\overline{S - X}$ in V liegt und S eine Dimension $< r$ hat, gibt es ein r-dimensionales Simplex U derart, daß

$$\overline{S - X} < U, \quad \overline{U} < V \quad \text{und} \quad p \neq h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{U} - U.$$

Es bedeute T eine offene Menge, so daß $\overline{S - X} < T$, $\overline{T} < U$ und $p \neq g'(p)$ für $p \in \overline{T}$. Dann sei

$$h'(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in (\overline{V} - U) + \overline{X} \cdot \overline{U}, \quad h'(p) = g'(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{T}.$$

Zum Beweis, daß h' auf $(\overline{V} - U) + \overline{X} \cdot \overline{U} + \overline{T}$ stetig, genügt es, die Stetigkeit von h' auf $\left((\overline{V} - U) + \overline{X} \cdot \overline{U}\right) \cdot \overline{T}$ und wegen $\overline{T} < U$ also auf $\overline{X} \cdot \overline{U} \cdot \overline{T}$ zu prüfen: Wenn q ein Punkt der letzteren Menge, so ist $g'(q) = g(q)$, nach Voraussetzung weiter $g(q) = h(q)$, daher $h(q) = g'(q)$.

Jetzt ist noch die Abbildung h' über $U - (\overline{X} + \overline{T})$ stetig und mit höchstens endlich vielen Fixpunkten fortzusetzen. Dies ist aber, da $p \neq h'(p)$ für alle Punkte p aus $(\overline{U} - U) + (\overline{X} + \overline{T}) \cdot \overline{U}$, leicht möglich.

Wegen $p \neq h'(p) = h(p)$, $p \in \overline{U} - U$, und dem oben angegebenen speziellen Eindeutigkeitssatz sind die Indexsummen von h und h' auf U gleich. Mithin sind weiter, da $h'(p) = h(p)$ für $p \in \overline{V} - U$, die Indexsummen von h und h' gleich. — In jedem Punkt p von $\overline{Y} \cdot \overline{V}$, wobei $Y = X + T$, ist $p \neq g'(p) = h'(p)$.

Hier schließt der Beweis des Hilfssatzes. Wir können nun zeigen:

Satz im Kleinen. *Es seien r eine natürliche Zahl und U eine beschränkte offene Menge im R^r, M eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{U} - U$, W und X beschränkte offene Mengen im R^r mit*

$$\overline{U} - M < W \quad \text{und} \quad M < X;$$

ferner g und h stetige Abbildungen von $\overline{W}$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und

$$p \neq g(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{X} \cdot \overline{W}.$$

Dann gibt es offene Mengen V und Y mit

$$U \subset V, \quad \overline{V} - M \subset W, \quad \overline{V} - V \subset Y$$

sowie stetige Abbildungen g' und h' von $\overline{W}$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften:

$$g'(p) = g(p) \quad \text{und} \quad h'(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{W} - W;$$
$$p \neq g'(p) = h'(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y} \cdot \overline{W};$$

auf V stimmen die Indexsummen von g' und h' überein; die Indexsummen von g und g', ebenso die von h und h' stimmen überein.

Beweis. Da M kompakt und X eine offene Menge $\supset M$ ist, existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß die 2ε-Umgebung von M, die wir Z nennen, in X liegt. Die ε-Umgebung von M nennen wir Z_1.

Da $\overline{U} - Z_1$ eine kompakte in W liegende Menge, gibt es, wenn K eine hinreichend feine simpliziale Zerlegung des R^r bedeutet, in K endlich viele Grundsimplexe U_i mit den Eigenschaften: die Durchmesser der U_i sind sämtlich $< \varepsilon$; bezeichnet T das Innere des Polyeders $\sum \overline{U}_i$, so ist

$$\overline{U} - Z_1 \subset T \quad \text{und} \quad \overline{T} \subset W. \tag{1}$$

Wir bezeichnen den Komplex aller in $\overline{T}$ liegenden Simplexe von K mit L; mit S_{0i}, $i = 1, \ldots, m_0$, diejenigen $(r-1)$-dimensionalen Simplexe von L, die zu Z_1 nicht fremd; mit S_i, $i = 1, \ldots, m$, die übrigen $(r-1)$-dimensionalen Simplexe von L.

Für $i = 1, \ldots, m$ ist

$$S_i \cdot (\overline{U} - T) = 0. \tag{2}$$

Wäre nämlich (2) für das Simplex S_i nicht richtig, so läge S_i in $\overline{T} - T$, und es gäbe einen Punkt q aus $S_i \cdot (\overline{U} - T)$. Wegen $q \in S_i$ und der Bedeutung von S_i wäre $q \notin Z_1$; wegen $q \in \overline{U}$, $q \notin Z_1$ und (1) also $q \in T$; ein Widerspruch.

Nach (1) ist $\overline{U} - T \subset Z_1$, wegen $Z_1 \subset X$ also $\overline{U} - T \subset X$. Da $\varrho(S_{0i}, M) < \varepsilon$ und der Durchmesser von S_{0i} kleiner als ε, ist S_{0i} in Z, also in X gelegen. Mithin

$$(\overline{U} - T) + \sum \overline{S}_{0i} \subset X. \tag{3}$$

Wir bezeichnen mit S_0 die leere Menge, mit j eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$, die kompakte Menge $(\overline{U} - T) + \sum \overline{S}_{0i} + \overline{S}_0 + \cdots + \overline{S}_j$ mit T_j und machen die Annahme: es gibt eine T_j enthaltende offene Menge X_j und stetige Abbildungen g_j, h_j von $\overline{W}$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften I_j bis III_j.

I_j. Für $p \in \overline{W} - W$ ist $g_j(p) = g(p)$ und $h_j(p) = h(p)$.

II_j. Es ist $p \neq g_j(p) = h_j(p)$ für $p \in \overline{X}_j \cdot \overline{W}$.

III_j. Die Indexsummen der Abbildungen g_j und g stimmen überein, ebenso die der Abbildungen h_j und h.

Dann bedeute V_0 eine offene Menge im R^r derart, daß sich auf der Begrenzung $\overline{V}_0 - V_0$ von V_0 kein Fixpunkt der Abbildung g_j und ebenso kein solcher der Abbildung h_j befindet sowie

$$\overline{S}_{j+1} - T_j \subset V_0 \subset W \quad \text{und} \quad \overline{S}_{j+1} \cdot T_j = \overline{V}_0 \cdot T_j \tag{4}$$

ist. Eine solche Menge existiert. Denn es sind $\overline{S}_{j+1}$ und T_j kompakte Mengen, und wegen (2) ist jeder Punkt der Menge $\overline{S}_{j+1} \cdot T_j$ Häufungspunkt der Menge $\overline{S}_{j+1} - T_j$. Hieraus folgt, wie im nächsten Absatz erläutert wird, leicht die Existenz von V_0.

Wir bezeichnen für jeden Punkt p aus $\overline{S}_{j+1} - T_j$ mit ε_p die positive Zahl $\varrho(p, T_j)$ und mit U_p die $\varepsilon_p/2$-Umgebung von p; weiter die Menge $\sum U_p \cdot W$, $p \in \overline{S}_{j+1} - T_j$, mit V_0'. Dann gilt (4), wenn man darin V_0 durch V_0' ersetzt. Da sich ferner auf T_j kein Fixpunkt von g_j und kein solcher von h_j befindet, gibt es eine Teilmenge V_0^* von V_0' derart, daß $V_0' - \overline{V}_0^*$ eine Menge V_0 der verlangten Art.

Wegen $T_j \subset X_j$ und II_j ist $\overline{S}_{j+1} \cdot T_j \subset X_j$ und $p \neq g_j(p) = h_j(p)$ für die Punkte p aus $\overline{X}_j \cdot \overline{V}_0$. Eine Anwendung des obigen Hilfssatzes liefert dann eine offene Menge $Y \supset \overline{S}_{j+1}$ sowie stetige Abbildungen g_{j+1} und h_{j+1} von $\overline{W}$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften:

$$g_{j+1}(p) = g_j(p) \quad \text{und} \quad h_{j+1}(p) = h_j(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{W} - V_0; \tag{5}$$

$$p \neq g_{j+1}(p) = h_{j+1}(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y} \cdot \overline{V}_0; \tag{6}$$

die Indexsummen von g_j und g_{j+1}, ebenso die von h_j und h_{j+1} stimmen überein.

Aus I_j und (5) folgt I_{j+1}. Es folgt III_{j+1} aus III_j und der Erklärung der Abbildungen g_{j+1} und h_{j+1}.

Zur Bestätigung von II_{j+1} genügt, wenn q einen Punkt der Menge $T_j + \overline{S}_{j+1}$ bedeutet, der Nachweis: es gibt eine offene Menge $\ni q$ derart, daß

$$p \neq g_{j+1}(p) = h_{j+1}(p) \tag{*}$$

in allen Punkten p dieser Menge. *Erstens* sei $q \notin \overline{V}_0$. Dann ist $q \in T_j$ und $\varrho(q, V_0) > 0$, daher die Behauptung wegen II_j richtig. Wenn *zweitens* $q \in V_0$, so ist $q \in \overline{S}_{j+1} - T_j$ wegen (4), daher $q \in Y$, also $q \in Y \cdot V_0$, mithin die Behauptung wegen (6) richtig. Ist *drittens* q ein Punkt aus $\overline{V}_0 - V_0$, so liegt q wegen (4) in $\overline{S}_{j+1} \cdot T_j$. Es liegt q wegen $q \in \overline{S}_{j+1}$ in Y, wegen $q \in T_j$ in X_j, also in $X_j \cdot Y$. Bedeutet dann p einen Punkt aus $X_j \cdot Y \cdot W - V_0$, so ist $g_{j+1}(p) = g_j(p)$ und $h_{j+1}(p) = h_j(p)$, daher (*) wegen $p \in X_j \cdot W$ und II_j richtig. Ist p in $X_j \cdot Y \cdot W \cdot V_0$ gelegen, so folgt (*) aus $p \in Y \cdot V_0$ und (6). Mithin ist $X_j \cdot Y \cdot W$ eine Menge $\ni q$ der verlangten Art.

Wegen (3) ist unsere Annahme für $j = 0$, $g_0 = g$, $h_0 = h$ und $X_0 = X$ richtig. Daher gibt es stetige Abbildungen g_m und h_m von $\overline{W}$ in den R^r, über die I_m bis III_m gilt.

Dann haben $V = T + U$, $Y = X_m$, $g' = g_m$ und $h' = h_m$ die geforderten Eigenschaften:

Es ist $\overline{V} - M \subset \overline{T} + (\overline{U} - M)$. Nach (1) ist $\overline{T} \subset W$, ferner $\overline{U} - M \subset W$ nach Voraussetzung, also $\overline{V} - M$ in W gelegen. — Wegen $\overline{V} - V \subset (\overline{T} - T) + (\overline{U} - U)$, $\overline{T} - T \subset \sum \overline{S}_{0i} + \sum \overline{S}_i$ und $T \subset V$ ist $\overline{V} - V \subset \sum \overline{S}_{0i} + \sum \overline{S}_i + (\overline{U} - T)$, daher $\overline{V} - V \subset Y$.

Auf V stimmen die Indexsummen von g' und h' überein, da $p \neq g'(p) = h'(p)$ in den Punkten p von $U - T$; die Übereinstimmung der Indexsummen von g' und h' auf T folgt aus $p \neq g'(p) = h'(p)$, $p \in \sum \overline{S}_{0i} + \sum \overline{S}_i$, und dem oben angeführten speziellen Eindeutigkeitssatz.

Damit ist der Beweis beendet.

Es folgen zwei Bemerkungen.

Bemerkung 1. *Sind P eine r-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit, $r > 0$, in einem Euklidischen Zahlenraum und n eine natürliche Zahl, so existieren Zahlen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ mit $0 < \alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, und der folgenden für $i = 0, \ldots, n-1$ geltenden Eigenschaft: jede Menge aus P, die einen Durchmesser $< 3\alpha_i$ hat, ist in einer Menge aus P, die zum R^r homöomorph ist und einen Durchmesser $< \alpha_{i+1}$ hat, gelegen.*

Beweis. Es sei erstens α_n der Durchmesser von P. Da P kompakt, gibt es in P offene zum R^r homöomorphe Mengen U_i^n, $i = 1, \ldots, m^n$, mit $\sum U_i^n = P$. Hierauf existiert eine Zahl α_{n-1} mit $0 < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ derart, daß jede Menge aus P, deren Durchmesser $< 3\alpha_{n-1}$ ist, in mindestens einer der Mengen U_i^n, $i = 1, \ldots, m^n$, liegt.

Zweitens seien U_i^{n-1}, $i = 1, \ldots, m^{n-1}$, in P offene zum R^r homöomorphe Mengen, deren jede einen Durchmesser $< \alpha_{n-1}$ hat, mit $\sum U_i^{n-1} = P$. Dann gibt es eine Zahl α_{n-2} mit $0 < \alpha_{n-2} < \alpha_{n-1}$ so beschaffen, daß jede Menge aus P, deren Durchmesser $3\alpha_{n-2}$ ist, in mindestens einer der Mengen U_i^{n-1}, $i = 1, \ldots, m^{n-1}$, liegt.

So fortfahrend bestätigt man Bemerkung 1.

Bemerkung 2. *Sind M eine beschränkte Teilmenge im R^n, $n > 0$, und ε eine positive Zahl, so gibt es offene Mengen S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, im R^n mit den Eigenschaften: es ist $M \subset \sum\sum S_i^k$; der Durchmesser eines jeden S_i^k ist $< \varepsilon$; für alle (i_1, i_2, k) mit $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{S}_{i_1}^k$ und $\overline{S}_{i_2}^k$ zueinander fremd.*

Beweis. Es seien P ein n-dimensionales endliches Polyeder $\supset M$ und K eine simpliziale Zerlegung von P mit Simplexdurchmessern $< \varepsilon$; ferner T_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, für $k = 0, \ldots, n$ die k-dimensionalen Simplexe von K.

Wir bezeichnen mit j eine der Zahlen $0, \ldots, n-1$ und machen die folgende Annahme, die, wie man sich leicht überlegt, für $j = 0$ richtig ist. Es sind S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, j$, offene Mengen im R^r mit $\sum \overline{T}_i^j \subset \sum S_i^0 + \cdots + \sum S_i^j$ und den folgenden für $k = 0, \ldots, j$ geltenden Eigenschaften: für $i = 1, \ldots, m^k$ ist der Durchmesser von S_i^k kleiner als ε; die abgeschlossenen Mengen $\overline{S}_i^k$, $i = 1, \ldots, m^k$, sind paarweis zueinander fremd.

Dann existieren $(j+1)$-dimensionale Simplexe U_i^{j+1}, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, derart, daß

(*) $$\overline{U}_i^{j+1} \subset T_i^{j+1} \quad \text{und} \quad T_i^{j+1} - U_i^{j+1} \subset \sum S_i^0 + \cdots + \sum S_i^j.$$

Da die $\overline{U}_i^{j+1}$, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, paarweis zueinander fremd, kompakt und von einem Durchmesser $<\varepsilon$ sind, gibt es offene Mengen S_i^{j+1}, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, mit den Eigenschaften: der Durchmesser eines jeden S_i^{j+1} ist $<\varepsilon$; es ist $\overline{U}_i^{j+1}$ in S_i^{j+1} gelegen; die $\overline{S}_i^{j+1}$, $i=1,\ldots,m^{j+1}$, sind paarweis zueinander fremd.

Wegen (*) ist $\sum \overline{T}_i^{j+1} \subset \sum S_i^0 + \cdots + \sum S_i^{j+1}$; wenn $j=n-1$, also $M \subset P = \sum \overline{T}_i^n \subset \sum\sum S_i^k$, womit die Bemerkung bewiesen.

2. Eindeutigkeit der algebraischen Fixpunktzahl.

Bis zum Ende dieses Abschnitts seien r und n natürliche Zahlen, P eine r-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit in dem n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum R^n, f eine stetige Abbildung von P in sich, Q die Menge der Fixpunkte von f.

Ist α_0 eine hinreichend kleine positive Zahl, so existieren nach Bemerkung 1 Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ mit $0<\alpha_i<\alpha_{i+1}$, $i=0,\ldots,n-1$, und der Eigenschaft: für $i=0,\ldots,n-1$ liegt jede Teilmenge von P, die einen Durchmesser $<3\alpha_i$ hat, in einer in P offenen Menge, die zum R^r homöomorph ist und einen Durchmesser $<\alpha_{i+1}$ hat. — Dann bezeichne bis zum Ende des Abschnittes α die obere Grenze der Zahlen α_0.

Definition. *Wenn die Abbildung f keinen Fixpunkt hat, ist ihre „algebraische Fixpunktzahl" Null. Sonst sei U eine in P offene Menge mit $\varrho(p, f(p)) < \alpha$, $p \in \overline{U}$, und $Q \subset U$; ferner f' eine stetige Abbildung von P in sich mit*

$$f'(p) = f(p), \quad p \in P - U, \quad \text{sowie} \quad \varrho(p, f'(p)) < \alpha, \quad p \in U,$$

und höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann heißt die Indexsumme von f' die „algebraische Fixpunktzahl" von f.

Zum Zweck, die vorstehende Erklärung als eindeutig nachzuweisen, seien U^1, U^2 in P offene Mengen und f^1, f^2 stetige Abbildungen von P in sich mit den folgenden für $i=1,2$ geltenden Eigenschaften; es ist $Q \in U^i$ und $\varrho(p, f(p)) < \alpha$ für $p \in \overline{U}^i$, ferner

$$f^i(p) = f(p) \quad \text{für} \quad p \in P - U^i, \qquad \varrho(p, f^i(p)) < \alpha \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}^i,$$

und die Abbildung f^i hat höchstens endlich viele Fixpunkte.

Dann sind $U^1 + U^2$ eine in P offene Menge U und f^1, f^2 stetige Abbildungen von P in sich, über die gilt: $Q \subset U$ und $\varrho(p, f(p)) < \alpha$ für $p \in \overline{U}$; für $p \in P - U$ ist $f^i(p) = f(p)$; für $p \in \overline{U}$ ist $\varrho(p, f^i(p)) < \alpha$. Die Übereinstimmung der Indexsummen von f^1 und f^2 ergibt sich daher aus folgendem

Eindeutigkeitssatz. *Es seien U eine in P offene Menge und g, h stetige Abbildungen von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den weiteren Eigenschaften:*

$$p \neq g(p) = h(p) \quad \text{für} \quad p \in P - U;$$

für $p \in \overline{U}$ ist $\varrho(p, g(p)) < \alpha$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha$. Dann stimmen die Indexsummen von g und h überein.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von $\overline{U}$ und der Bedeutung von α gibt es Zahlen $\alpha^0, \ldots, \alpha^n$ mit $0 < \alpha^0 \leq \alpha$, $\alpha^k < \alpha^{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$, und den Eigenschaften: es ist sogar

$$\varrho(p, g(p)) < \alpha^0 \quad \text{und} \quad \varrho(p, h(p)) < \alpha^0 \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}; \tag{1}$$

für $k = 0, \ldots, n-1$ ist jede Teilmenge von P, deren Durchmesser $< 3\alpha^k$, in einer in P offenen Menge, die zum R^r homöomorph ist und einen Durchmesser $< \alpha^{k+1}$ hat, gelegen. Statt α^0 schreiben wir auch α^{-1}.

Weiter existiert wegen (1) und der Kompaktheit von $\overline{U}$ eine in P offene Menge U' mit $\overline{U} \subset U'$ und der Eigenschaft, daß $\varrho(p, g(p)) < \alpha^0$ und $\varrho(p, h(p)) < \alpha^0$ sogar für $p \in \overline{U}'$.

Wegen Bemerkung 2 gibt es in P offene Mengen S_i^k, $i = 1, \ldots, m^k$, $k = 0, \ldots, n$, mit $\sum\sum S_i^k = U'$ und den Eigenschaften: für $i_1 \neq i_2$ sind $\overline{S}_{i_1}^k$ und $\overline{S}_{i_2}^k$ zueinander fremd; der Durchmesser von S_i^k ist $< \alpha^0$. Wir bezeichnen die leere Menge mit S_1^{-1} und mit j eine der Zahlen $-1, 0, \ldots, n-1$.

Unter der Voraussetzung, es seien U^j eine in P offene Menge mit $U^j + \sum S_i^{j+1} + \cdots + \sum S_i^n = U'$, ferner g^j und h^j stetige Abbildungen von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften I^j bis III^j, wollen wir die Existenz einer in P offenen Menge U^{j+1} mit $U^{j+1} + \sum S_i^{j+2} + \cdots + \sum S_i^n = U'$, ferner stetiger Abbildungen g^{j+1}, h^{j+1} von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften I^{j+1} bis III^{j+1} nachweisen.

I^j. Die Indexsumme von g^j auf U' stimmt mit der von g auf U' überein, ebenso diejenige von h^j auf U' mit der von h auf U'.

II^j. Es existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß $p \neq g^j(p) = h^j(p)$ in allen Punkten p aus P, deren Entfernung von $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j)$ kleiner als ε ist. Auf U^j haben g^j und h^j die gleiche Indexsumme.

III^j. Für $p \in \overline{U}'$ ist $\varrho(p, g^j(p)) < \alpha^j$ und $\varrho(p, h^j(p)) < \alpha^j$.

Wir bezeichnen mit $\delta > 0$ eine Zahl, von der gilt: für $i_1 \neq i_2$ sind die Mengen $S_{i_1}^{j+1}$ und $S_{i_2}^{j+1}$ um mehr als 2δ voneinander entfernt; für $i = 1, \ldots, m^{j+1}$ hat die Menge aller Punkte p aus P mit $\varrho(p, S_i^{j+1}) < \delta$ einen Durchmesser $< \alpha^0$.

Es bedeute l eine der Zahlen $1, \ldots, m^{j+1}$.

Statt S_l^{j+1} schreiben wir auch S, statt $S - \overline{U}^j$ auch T. Wir bezeichnen mit M die Menge $(\overline{T} - T) \cdot ((\overline{U}' - U') + (\overline{U}^j - U^j))$.

Dann existieren, wie wir im nächsten Absatz zeigen, in P offene Mengen W und Z mit den Eigenschaften:

$$\overline{W} + g^j(\overline{W}) + h^j(\overline{W}) \subset Z; \tag{2}$$

$$\overline{T} - M \subset W \subset U' - \overline{U}^j, \quad \overline{W} - W \subset (U' - \overline{U}^j) + M; \tag{3}$$

$$p \neq g^j(p) \quad \text{und} \quad p \neq h^j(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{W} - W; \tag{4}$$

es liegt $\overline{W}$ in der δ-Umgebung von S; der Durchmesser von Z ist $< \alpha^{j+1}$; man kann Z topologisch auf den R^r abbilden.

Wegen III^j ist der Durchmesser von $\overline{T}+g^j(\overline{T})+h^j(\overline{T})$ kleiner als $3\alpha^j$. Daher existiert eine in P offene zum R^r homöomorphe Menge Z mit $\overline{T}+g^j(\overline{T})+h^j(\overline{T})\subset Z$ und einem Durchmesser $<\alpha^{j+1}$. Dann sei B die Begrenzung der offenen Menge $U'-\overline{U}^j$, ferner δ_p für jeden Punkt p aus $\overline{T}-M$ die Zahl $\varrho(p, B)/2$ und U_p die Menge aller Punkte p' aus $U'-\overline{U}^j$ mit $\varrho(p, p')<\delta_p$. Bezeichnen wir hierauf die Menge $\sum U_p$, $p\in\overline{T}-M$, mit W^0, so gilt (3), wenn man darin W durch W^0 ersetzt. Und mit Hilfe von W^0 findet man leicht W.

Nach dem in Abschnitt 1 hergeleiteten Satz im Kleinen gibt es in P offene Mengen V und Y mit

$$T\subset V,\quad \overline{V}-M\subset W,\quad \overline{V}-V\subset Y \tag{5}$$

sowie stetige Abbildungen g' und h' von $\overline{W}$ in Z mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften:

$$g'(p)=g^j(p)\quad\text{und}\quad h'(p)=h^j(p)\quad\text{für}\quad p\in\overline{W}-W; \tag{6}$$

$$p\neq g'(p)=h'(p)\quad\text{für}\quad p\in\overline{Y}\cdot\overline{W}; \tag{7}$$

auf V stimmen die Indexsummen von g' und h' überein; auf W stimmen g' und g^j, ebenso h' und h^j in ihren Indexsummen überein.

Hierauf sei $g^{j+1}(p)=g^j(p)$ und $h^{j+1}(p)=h^j(p)$ für $p\in P-\sum W_i^{j+1}$, ferner

$$g^{j+1}(p)=g'(p)\quad\text{und}\quad h^{j+1}(p)=h'(p)\quad\text{für}\quad p\in\overline{W}. \tag{8}$$

Die so erklärten Abbildungen g^{j+1} und h^{j+1} sind wegen (6) stetig.

Zum Beweis, daß die Menge

$$U^{j+1}=U^j+\sum V_i^{j+1}+(\overline{U}^j-U^j)\cdot\sum S_i^{j+1} \tag{9}$$

in P offen ist, genügt es, da U^j und V in P offen, zu zeigen, daß die Menge $(\overline{U}^j-U^j)\cdot S$ in einer bezüglich P offenen Teilmenge von U^{j+1} liegt: Die Menge $U^j+(S-\overline{U}^j)+(\overline{U}^j-U^j)\cdot S$ ist wegen $S-\overline{U}^j=T\subset V$ Teilmenge von U^{j+1} und gleich

$$U^j+(S-(\overline{U}^j-U^j)\cdot S)+(\overline{U}^j-U^j)\cdot S=U^j+S,$$

also in P offen.

Wir wollen zeigen:

II_1^{j+1}. Es ist $p\neq g^{j+1}(p)=h^{j-1}(p)$ für alle Punkte p einer Menge, die $(\overline{U}'-U')+(\overline{U}^{j+1}-U^{j+1})$ enthält und in P offen ist.

Beweis von II_1^{j+1}. Da U^{j+1} in P offen und keine in P offene Menge Teilmenge von $\overline{U}^j-U^j$ ist, folgt aus (9), daß

$$\overline{U}^{j+1}-U^{j+1}\subset(\overline{U}^j-U^j)+\sum(\overline{V}_i^{j+1}-V_i^{j+1}). \tag{*}$$

Zum Beweis von II_i^{j+1} genügt es zu zeigen: zu jedem Punkt q aus $(\overline{U}'-U')+(\overline{U}^j-U^j)+\sum(\overline{V}_i^{j+1}-V_i^{j+1})$ gibt es eine in P offene Menge $\ni q$ derart, daß

$$p\neq g^{j+1}(p)=h^{j+1}(p) \tag{**}$$

in allen Punkten $\mathfrak{p}$ dieser Menge. Der Fall, daß $q \in \overline{W} - \overline{V}$, ist nicht möglich. Denn dann wäre q in $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^i - U^i)$ gelegen, wegen (3) weiter in M, daher in $\overline{V}$: ein Widerspruch. Ist nun *erstens* q zu $\sum \overline{W}_i^{j+1}$ fremd, so folgt aus II^j die Behauptung. Wenn *zweitens* q in $(\overline{V} - V) - M$ liegt, so ist $q \in Y \cdot W$, also die Behauptung wegen (7) richtig. *Drittens* sei $q \in M$. Dann gibt es, da M Teilmenge von $(\overline{U}' - U') + (\overline{U}^i - U^i)$ ist, eine in P offene Menge $X \ni q$ derart, daß X für alle $i \neq l$ zu W_i^{j+1} fremd und $\mathfrak{p} \neq g^j(\mathfrak{p}) = h^j(\mathfrak{p})$ für $\mathfrak{p} \in X$ ist. Bedeutet hierauf $\mathfrak{p}$ einen Punkt aus $X \cdot Y - W$, so ist $g^{j+1}(\mathfrak{p}) = g^j(\mathfrak{p})$ und $h^{j+1}(\mathfrak{p}) = h^j(\mathfrak{p})$, also $(\overset{*}{*})$ wegen $\mathfrak{p} \in X$ richtig. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $X \cdot Y \cdot W$, so ist $g^{j+1}(\mathfrak{p}) = g'(\mathfrak{p})$ und $h^{j+1}(\mathfrak{p}) = h'(\mathfrak{p})$, daher $(\overset{*}{*})$ wegen $\mathfrak{p} \in Y \cdot W$ und (7) richtig. Mithin ist $X \cdot Y$ eine Menge $\ni q$ der geforderten Art.

Weiter gilt:

II_2^{j+1}. Auf U^{j+1} haben g^{j+1} und h^{j+1} die gleiche Indexsumme.

Beweis von II_2^{j+1}. Da W zu U^j fremd, ist $g^{j+1}(\mathfrak{p}) = g^j(\mathfrak{p})$ und $h^{j+1}(\mathfrak{p}) = h^j(\mathfrak{p})$ für $\mathfrak{p} \in U^j$, wegen II^j daher erstens die Indexsumme von g^{j+1} auf U^j gleich der von h^{j+1} auf U^j. Wegen der Erklärung der Abbildungen g' und h' stimmen zweitens g^{j+1} und h^{j+1} auf $\sum V_i^{j+1}$ in ihren Indexsummen überein. Drittens haben g^{j+1} und h^{j+1} auf $\overline{U}^j - U^j$ keinen Fixpunkt. Daher folgt II_2^{j+1} aus (9) und $U^j \cdot \sum V_i^{j+1} = 0$.

Zum Beweis, daß

$$U^{j+1} + \sum S_i^{j+2} + \cdots + \sum S_i^n = U', \tag{10}$$

genügt es wegen $U^j + \sum S_i^{j+1} + \cdots + \sum S_i^n = U'$ und $U^{j+1} \subset U'$ zu zeigen, daß $U^j + \sum S_i^{j+1}$ in U^{j+1} liegt: Es ist $S - \overline{U}^j = T \subset V$, nach (9) also die Menge $U^j + \sum (S_i^{j+1} - \overline{U}^j) + (\overline{U}^j - U^j) \cdot \sum S_i^{j+1}$, die aber mit $U^j + \sum S_i^{j+1}$ zusammenfällt, in U^{j+1} gelegen.

Über U^{j+1}, g^{j+1} und h^{j+1} gilt I^{j+1} bis III^{j+1}:

Zu I^{j+1}. Wegen $g^{j+1}(\mathfrak{p}) = g^j(\mathfrak{p})$ und $h^{j+1}(\mathfrak{p}) = h^j(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \notin \sum W_i^{j+1}$, sowie I^j und (4) genügt es zum Beweis von I^{j+1} zu zeigen: auf W stimmen die Indexsummen von g^{j+1} und g^j, ebenso die von h^{j+1} und h^j überein. Dies folgt aber aus der Erklärung der Abbildungen g' und h'.

Es folgt II^{j+1} aus II_1^{j+1} und II_2^{j+1}.

Da der Durchmesser von Z kleiner als α^{j+1}, folgt III^{j+1} aus III^j.

Für $j = -1$, $g^{-1} = g$, $h^{-1} = h$ und U^{-1} als leerer Menge gilt I^j bis III^j. Daher existieren stetige Abbildungen g^n und h^n von P in sich mit den folgenden Eigenschaften I und II. I. Auf U' stimmt die Indexsumme von g^n mit der von g überein, ebenso diejenige von h^n mit der von h. II. Auf U' haben g^n und h^n die gleiche Indexsumme.

Aus I und II folgt die Behauptung.

3. Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl.

Die Bedeutung von r, n, P, Q, f, α und U sei die in Abschnitt 2 erklärte. Dann gilt folgender

Existenzsatz. *Es gibt eine stetige Abbildung f' von P in sich, die höchstens endlich viele Fixpunkte hat und von der*

$$f'(p) = f(p), \quad p \notin U, \quad \text{sowie} \quad \varrho(p, f'(p)) < \alpha, \quad p \in \overline{U},$$

gilt.

Beweis. Wegen $\varrho(p, f(p)) < \alpha$, $p \in \overline{U}$, sowie $p \neq f(p)$, $p \in P - U$, und der Kompaktheit von $\overline{U}$, $P - U$ existieren eine in P offene Menge V mit $\overline{V} \subset U$ und positive Zahlen ζ, η derart, daß sogar

$$\varrho(p, f(p)) < \alpha - \zeta \quad \text{für} \quad p \in \overline{U}, \quad \varrho(p, f(p)) > \eta \quad \text{für} \quad p \in P - V.$$

Nach dem in meiner Arbeit „Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten", Math. Z. **59**, 171–190 (1953), bewiesenen Approximationssatz existiert eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \min(\zeta, \eta)$, $0 \leq \tau \leq 1$, und der Eigenschaft, daß f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Für $p \in P$ werde die Zahl $\varrho(p, P - U)/(\varrho(p, P - U) + \varrho(p, \overline{V}))$ mit $\lambda(p)$ bezeichnet. Hierauf ist die durch $f'(p) = f^{\lambda(p)}(p)$, $p \in P$, bestimmte Abbildung f' von der verlangten Art.

Die obige Erklärung der algebraischen Fixpunktzahl ist damit als eindeutig und möglich erwiesen. Und aus dem nachstehenden Deformationssatz folgt, daß *in P die algebraische Fixpunktzahl homotopieinvariant:* Bedeutet $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich, so gibt es zu jeder Zahl τ aus $[0, 1]$ eine Zahl $\varepsilon^\tau > 0$ derart, daß für alle σ mit $|\sigma - \tau| < \varepsilon^\tau$ die Abbildungen f^σ und f^τ in ihren algebraischen Fixpunktzahlen übereinstimmen. Bereits von endlich vielen der Intervalle $(\tau - \varepsilon^\tau, \tau + \varepsilon^\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, wird das Intervall $[0, 1]$ überdeckt.

Unsere Untersuchungen schließen mit dem folgenden

Deformationssatz. *Ist $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich, so existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß jede Abbildung f^τ mit $\tau < \varepsilon$ die gleiche algebraische Fixpunktzahl wie f^0 hat.*

Beweis. Es sei Q^0 die Menge der Fixpunkte von f^0, U^0 eine in P offene Menge $\supset Q^0$, g^0 eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten und den Eigenschaften: für $p \in P - U^0$ ist $g^0(p) = f^0(p)$, für $p \in \overline{U}^0$ ist $\varrho(p, f^0(p)) < \alpha$ und $\varrho(p, g^0(p)) < \alpha$. Dann ist die Indexsumme von g^0 die algebraische Fixpunktzahl von f^0.

Wenn *erstens* $U^0 = P$, so ist U^0 kompakt. Es gibt daher eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß sogar $\varrho(p, f^0(p)) < \alpha - \delta$ für $p \in P$. Hierauf ist $\varepsilon > 0$ eine Zahl der verlangten Art, falls $\varrho(f^0, f^\tau) < \delta$ für alle $\tau < \varepsilon$.

Zweitens sei $U^0 \neq P$. Aus $\varrho(p, f^0(p)) < \alpha$, $p \in \overline{U}^0$, sowie $p \neq f^0(p)$, $p \in P - U^0$, und der Kompaktheit von $\overline{U}^0$, $P - U^0$ folgt die Existenz einer in P offenen Menge $U \supset \overline{U}^0$ und einer Zahl $\delta > 0$, so daß sogar

(1) $\varrho(p, f^0(p)) < \alpha - \delta$ für $p \in \overline{U}$, $\varrho(p, f^0(p)) > \delta$ für $p \in P - U^0$.

Dann bedeute $\varepsilon > 0$ eine Zahl derart, daß für $0 < \tau < \varepsilon$ alle Fixpunkte der Abbildung f^τ in U^0 liegen und $\varrho(f^0, f^\tau) < \delta$ ist; ferner ζ eine Zahl aus $(0, \varepsilon)$.

Zum Beweis, daß die Abbildungen f^0 und f^ζ die gleiche algebraische Fixpunktzahl haben, sei

$$\lambda(p) = \varrho(p, \overline{U}^0)/\big(\varrho(p, \overline{U}^0) + \varrho(p, P - U)\big) \quad \text{für} \quad p \in P, \tag{2}$$

hierauf g^ζ die durch

$$g^\zeta(p) = g^0(p), \quad p \in \overline{U}^0, \quad \text{und} \quad g^\zeta(p) := f^{\zeta\lambda(p)}(p), \quad p \in P - U^0, \tag{3}$$

bestimmte Abbildung von P in sich.

Aus $\varrho(f^0, f^\tau) < \delta$, $0 \leq \tau \leq \zeta$, und (1) bis (3) folgt: für $p \in \overline{U}$ ist $\varrho\big(p, f^\zeta(p)\big) < \alpha$ und $\varrho\big(p, g^\zeta(p)\big) < \alpha$, für $p \in P - U^0$ ist $p \neq g^\zeta(p)$. Mithin: die Abbildung g^ζ hat höchstens endlich viele Fixpunkte, und ihre Indexsumme ist die algebraische Fixpunktzahl von f^ζ; die Indexsummen von g^0 und g^ζ stimmen überein.

Der Beweis ist damit beendet.

Fulda, Marienstr. 9.

(Eingegangen am 11. Mai 1954.)

HUPPERT, B., und N. ITÔ
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 94—99 (1954)

Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II.

Von
BERTRAM HUPPERT und NOBORU ITÔ.

In einer früheren Arbeit des gleichen Titels (HUPPERT [4]) waren folgende Sätze bewiesen worden:

Satz 1. Das Produkt einer Diedergruppe mit einer abelschen Gruppe ist auflösbar.

Satz 2. Das Produkt einer Diedergruppe mit einer p-Gruppe ist auflösbar.

Es liegt nahe, diese beiden Sätze zu verallgemeinern zu der Aussage: Das Produkt einer Diedergruppe mit einer nilpotenten Gruppe ist auflösbar. Beim Beweis werden nicht alle Eigenschaften der Diedergruppen benötigt, sondern nur die Existenz eines zyklischen Normalteilers vom Index 2. Wir formulieren also, indem wir die Numerierung aus [4] fortsetzen:

Satz 4. *Die Gruppe* $\mathfrak{L}$ *habe einen zyklischen Normalteiler* $\mathfrak{Z}$ *vom Index* 2. *Dann ist das Produkt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{L}$ *mit einer nilpotenten Gruppe* $\mathfrak{N}$ *auflösbar.*

Satz 4 ist nicht mehr richtig, wenn wir von $\mathfrak{L}$ nur fordern, daß es einen zyklischen Normalteiler von Primzahlindex hat. Dies zeigt das von N. ITÔ angegebene Beispiel der Zerlegung der einfachen Gruppe der Ordnung 168 in das Produkt einer Diedergruppe der Ordnung 8 mit einer Gruppe der Ordnung 21, welche einen Normalteiler der Ordnung 7 besitzt.

Neben Satz 4 beweisen wir noch einen sehr „unsymmetrischen" Auflösbarkeitssatz.

Definition. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt p-nilpotent, wenn sie einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ besitzt, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ isomorph ist zu einer (und dann jeder) p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$, d.h. wenn $\mathfrak{G}$ ein invariantes p-Komplement besitzt (s. etwa ITÔ [7]).

Satz 5. $\mathfrak{U}$ *sei 2-nilpotent. Ferner sei die Kommutatorgruppe* $\mathfrak{U}'$ *nilpotent. Dann ist das Produkt von* $\mathfrak{U}$ *mit einer zyklischen Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *von ungerader Ordnung auflösbar.*

Insbesondere erfaßt Satz 5 den Fall, daß $\mathfrak{U}$ eine überauflösbare Gruppe ist (Definition und Eigenschaften der überauflösbaren Gruppen in HUPPERT [5]). Die 2-Nilpotenz kann nicht durch p-Nilpotenz mit einem beliebigen p ersetzt werden, denn die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_5$ erlaubt die Zerlegung in das Produkt einer alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_4$ mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 5. Auch die Voraussetzung, daß $\mathfrak{Z}$ ungerade Ordnung hat, ist nicht überflüssig. Hat $\mathfrak{Z}$ gerade Ordnung, so treten schon für Gruppen $\mathfrak{U}$ mit sehr übersichtlicher Struktur Gegenbeispiele auf. Zum Beispiel erlaubt die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_5$ in 5 Symbolen die Zerlegung $\mathfrak{S}_5 = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{U}$, wobei

$\mathfrak{Z}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 6 und $\mathfrak{U}$ der überauflösbare Normalisator der 5-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{S}_5$ ist.

Bezeichnungen. $(\mathfrak{G})$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}_p$ = p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$; ${}_p\mathfrak{G}$ = p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}$ (s. HALL [3]); $\mathfrak{G}'(p)$ = p-Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ (s. ZASSENHAUS [14], S. 122); $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$ = Normalisator der Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U}^X = X^{-1}\,\mathfrak{U}\,X$; ist $p^\alpha \mid m$, aber $p^{\alpha+1} \nmid m$, so schreiben wir $p^\alpha \top m$.

Beweis von Satz 4. Wir führen eine Induktion nach der Gruppenordnung $(\mathfrak{G})$ durch. Es genügt der Nachweis eines auflösbaren Normalteilers, der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ verschieden ist. Sei $(\mathfrak{Z}) = n$.

a) Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, so haben wir $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{L}$. Nach ORE [8] oder SZÉP-RÉDEI [11] gibt es dann einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{K} < \mathfrak{N}$. Als Untergruppe von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{K}$ auflösbar. Ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}$, so gilt also $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{N}$, und $\mathfrak{G}$ ist nach ITÔ [6] auflösbar. Wir dürfen daher $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{E}$ annehmen.

b) Sei $\mathfrak{N}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Falls $(\mathfrak{N}) = 2^\alpha$, so ist $\mathfrak{G}$ wegen $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{G}_2$ nach ITÔ [6] auflösbar. Daher können wir annehmen, daß es eine Primzahl $p \neq 2$ mit $p \mid (\mathfrak{N})$ gibt. Ist $\mathfrak{N}_p \neq \mathfrak{G}_p$, so gilt $p \mid (\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p)/\mathfrak{N}_p)$ (s. ZASSENHAUS [14], S. 105, Satz 10). Also ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p)$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{N}$, woraus $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{G}$, d.h. $\mathfrak{N}_p \lhd \mathfrak{G}$ folgt. Sei also $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{N}$.

Ist $\mathfrak{G}$ p-normal, so gilt nach einem Satz von GRÜN (GRÜN [2], ZASSENHAUS [14], S. 135) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(p) \cong \mathfrak{N}/\mathfrak{N}'(p) \neq \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'(p)$. Wegen $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{G}_p$ ist $p \nmid (\mathfrak{L})$, woraus $\mathfrak{L} < \mathfrak{G}'(p)$ folgt. Daher hat $\mathfrak{G}'(p)$ die Gestalt $\mathfrak{G}'(p) = \mathfrak{L} \cdot \overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$, ist somit nach unserer Induktionsannahme auflösbar.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht p-normal, so gilt für ein geeignetes $X \in \mathfrak{G}$ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p) < \mathfrak{G}_p^X$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p) \not< \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p^X)$. Dann ist $X \notin \mathfrak{N}$. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p))$ umfaßt nun $\mathfrak{N}$ und das p-Komplement ${}_p\mathfrak{N}^X$ von $\mathfrak{N}^X$. Ist ${}_p\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) \neq \mathfrak{G}$, so folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) = \mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}, {}_p\mathfrak{N}^X\}$, also ${}_p\mathfrak{N}^X = {}_p\mathfrak{N}$ und dann $\mathfrak{N}({}_p\mathfrak{N}) > \{\mathfrak{N}, X\} = \mathfrak{G}$ (wegen $X \notin \mathfrak{N}$). Der Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)) = \mathfrak{G}$ ist trivial. Sei nun ${}_p\mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, also $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$.

Ist $2 \mid n$, so gilt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{E}$, denn $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L}_2) \cap \mathfrak{Z}$ ist sicher verschieden von $\mathfrak{E}$ und liegt in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L})$. Die Anzahl der Konjugierten eines von E verschiedenen Elementes von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{L})$ ist eine Potenz von p. Nach einem bekannten Satz von BURNSIDE (SPEISER [10], S. 193) besitzt dann $\mathfrak{G}$ einen eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$, so haben wir $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{L}} \cdot \mathfrak{N}$ mit $\overline{\mathfrak{L}} < \mathfrak{L}$, und $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N}$ ist nach unserer Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] auflösbar. Dann ist auch $\mathfrak{K}$ auflösbar, und wir sind fertig. Sei daher $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$. Wegen $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$ folgt daraus $(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}) = p^\beta$. Infolge der Teilerfremdheit von $2n$ und p ist $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{L} \neq \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{N}} \cdot \mathfrak{L}$ (mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$) nach Induktionsannahme auflösbar, und dann $\mathfrak{K}$ ebenfalls.

Sei schließlich $2 \nmid n$. Dann ist $2 \top (\mathfrak{G})$, also ${}_2\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{Z} \lhd \mathfrak{G}$. Gemäß ITÔ [6] ist ${}_2\mathfrak{G}$ auflösbar.

c) Sei $\mathfrak{N}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{R} < \mathfrak{L}$. Falls $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{L}$, und es gibt

nach ORE [8] oder SZÉP-RÉDEI [11] einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{K} < \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$. Nach unserer Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] ist $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$ auflösbar, also $\mathfrak{K}$ ebenfalls. Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$, also $(\mathfrak{N}) = 2$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{Z}$ gilt. Somit besitzt $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{L}$ die Gruppe $\mathfrak{R}$ als Vertretergruppe. Bei der weiteren Untersuchung sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

d) Sei $2 \mid n$ und $2 \mid (\mathfrak{N})$. Die maximale Untergruppe $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}$. Nach WIELANDT [13] ist $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{N}_2$ eine 2-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{J}$. Wegen $2 \mid n$ gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{S} \rhd \mathfrak{J}_2 \rhd \mathfrak{N}_2$ und $(\mathfrak{S}/\mathfrak{J}_2) = 2$; denn wegen $\mathfrak{J}_2 \neq \mathfrak{G}_2$ gilt $\mathfrak{J}_2 \neq \mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{N}(\mathfrak{J}_2)$ (s. ZASSENHAUS [14], S. 105, Satz 10). Nun stellen wir $\mathfrak{S}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{N}_2$, also als Permutationsgruppe in 4 Symbolen. Dabei wird ein Normalteiler $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} < \mathfrak{N}_2$ und $(\mathfrak{N}_2/\mathfrak{T}) \mid 2$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Ist $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{E}$, so haben wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}) > \{\mathfrak{S}, {}_2\mathfrak{N}\} = \mathfrak{G}$. Sei daher $\mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, also $2 \top (\mathfrak{N})$. Dann besitzt $\mathfrak{S}$ eine treue Darstellung vom Grad 4. Ist $2^2 \mid n$, so stellen wir $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{J}_2$ (s. WIELANDT [13]) dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{Z}_2$. Dann enthält $\mathfrak{Z}_2$ einen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen Normalteiler von $\mathfrak{G}_2$, enthält daher auch mindestens ein von E verschiedenes Zentrumselement C von $\mathfrak{G}_2$. Es folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2) > \{\mathfrak{N}, C\}$. Da nach c) keine von $\mathfrak{G}$ verschiedene Obergruppe von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{Z}$ Elemente $\neq E$ gemeinsam hat, folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2) = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{N}_2 \lhd \mathfrak{G}$. Wir können uns daher beschränken auf den Fall $2 \top n$ mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}_2$. Da $\mathfrak{G}_2$ eine treue Darstellung als Permutationsgruppe vom Grad 4 besitzt, ist $\mathfrak{G}_2$ isomorph zur Diedergruppe $\mathfrak{D}_{2 \cdot 4}$ der Ordnung 8. Es gilt $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{N}_2$. Unter Beachtung von $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{D}_{2 \cdot 4})) = 2$ folgt daraus $\mathfrak{R} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_2)$.

Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{J} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{N}$. Dabei wird $\mathfrak{Z}$ regulär dargestellt und enthält wegen $2 \mid n$ ungerade Permutationen. Die geraden Permutationen bilden daher einen eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{K}$ vom Index 2 in $\mathfrak{G}$. Es ist $\mathfrak{Z} \not\lhd \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N} < \mathfrak{K}$ wegen $\mathfrak{G}_2 \cap \mathfrak{K} \lhd \mathfrak{G}_2$. Ist $\mathfrak{N}_2 < \mathfrak{K}$, so folgt $\mathfrak{N} < \mathfrak{K}$, und $\mathfrak{K} = \mathfrak{N} \cdot \overline{\mathfrak{L}}$ ist nach Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] auflösbar. Sei daher $\mathfrak{N}_2 \not\lhd \mathfrak{K}$. Mit $\mathfrak{N}_2 = \{N\}$ und $\mathfrak{Z}_2 = \{Z\}$ gilt dann $L = N Z \in \mathfrak{K}$. Da N und Z nicht vertauschbar sind (sonst wäre $\mathfrak{D}_{2 \cdot 4}$ abelsch), ist $L^2 \neq E$, $L^4 = E$; denn das Produkt von zwei nicht vertauschbaren Elementen der Ordnung 2 von $\mathfrak{D}_{2 \cdot 4}$ hat die Ordnung 4. Also ist $\mathfrak{K}_2$ zyklisch und liegt daher im Zentrum seines Normalisators. Nach einem Satz von BURNSIDE (ZASSENHAUS [14], S. 133) folgt $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}'(2) \cong \mathfrak{K}_2$, also $\mathfrak{K}'(2) = {}_2\mathfrak{L} \cdot {}_2\mathfrak{N}$. Da ${}_2\mathfrak{L}$ zyklisch ist, ist $\mathfrak{K}'(2)$ nach ITÔ [6] auflösbar. Daraus folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{G}$.

e) Sei $2 \mid n$, aber $2 \nmid (\mathfrak{N})$. Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{N}$. Dabei wird $\mathfrak{Z}$ durch ungerade Permutationen dargestellt. $\mathfrak{G}$ besitzt deshalb einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ vom Index 2. Wegen $2 \nmid (\mathfrak{N})$ ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{K}$, also $\mathfrak{K} = \mathfrak{N} \cdot \overline{\mathfrak{L}}$ mit $\overline{\mathfrak{L}} < \mathfrak{L}$ nach Induktionsannahme oder nach ITÔ [6] auflösbar.

f) Schließlich behandeln wir den Fall $2 \nmid n$. Dann gilt $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{J}_2$. Ist $2 \nmid (\mathfrak{N})$, so haben wir $2 \top (\mathfrak{G})$, also $\mathfrak{G}'(2) = {}_2\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar.

Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{J}$. Dabei dürfen wir annehmen, daß diese Darstellung treu ist; denn andernfalls hätten

wir einen von $\mathfrak{E}$ verschiedenen, in $\mathfrak{J}$ liegenden Normalteiler von $\mathfrak{G}$ aufgefunden, der als Untergruppe von $\mathfrak{J}$ auflösbar wäre. Da $\mathfrak{J}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist die betrachtete Darstellung von $\mathfrak{G}$ primitiv. $\mathfrak{Z}$ wird dabei regulär dargestellt. Ist n keine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ nach einem Satz von SCHUR zweifach transitiv (SCHUR [9], WIELANDT [12]). Ist n eine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ nach einem Satz von BURNSIDE zweifach transitiv oder auflösbar (BURNSIDE [1], S. 341). In jedem Falle können wir also annehmen, daß $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist, also $\mathfrak{J}$ geeignete $n-1$ Symbole noch transitiv permutiert.

Zunächst betrachten wir den Fall $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)=\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_2)<\mathfrak{N}_2$. Dann ist der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))=\mathfrak{J}$ gleich dem Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$ von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$. Sei zuerst $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal. Dann gibt es ein $X\in\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X<\mathfrak{J}_2$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X\not<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$, woraus $X\notin\mathfrak{J}$ folgt. Sei $X=J\,Z$ mit $E\neq Z\in\mathfrak{Z}$ und $J\in\mathfrak{J}$. Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^Z<\mathfrak{J}_2$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}_2^{Z^{-1}}<\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}\cap\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$. Ferner ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)\lhd\mathfrak{J}$ wegen $\mathfrak{J}=\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$. Da aber $\mathfrak{J}$ noch in $n-1$ Symbolen transitiv ist, kann der Normalteiler $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ von $\mathfrak{J}$ nur ein Symbole fest lassen, liegt daher sicher nicht in $\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$. Das ist ein Widerspruch. Die Annahme, daß $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal ist, ist daher zu verwerfen.

Ist $\mathfrak{G}$ 2-normal, so folgern wir aus dem Satz von GRÜN (GRÜN [2], ZASSENHAUS [14], S. 135) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2)\cong\mathfrak{J}/\mathfrak{J}'(2)$. Aus $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'(2)\cdot\mathfrak{J}$ erhalten wir

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2)\cong\mathfrak{J}/\mathfrak{J}'(2)\cong\mathfrak{J}/\mathfrak{J}\cap\mathfrak{G}'(2),$$

also $\mathfrak{G}'(2)\cap\mathfrak{J}=\mathfrak{J}'(2)<\mathfrak{N}$. Sicher gilt $\mathfrak{Z}<\mathfrak{G}'(2)$ und ${}_2\mathfrak{N}<\mathfrak{G}'(2)$. Ferner gibt es eine 2-SYLOW-Gruppe $\mathfrak{G}'(2)_2$ von $\mathfrak{G}'(2)$ mit $\mathfrak{G}'(2)_2<\mathfrak{J}_2$, also $\mathfrak{G}'(2)_2<\mathfrak{G}'(2)\cap\mathfrak{J}<\mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{G}'(2)=\mathfrak{Z}\cdot{}_2\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{G}'(2)_2$ hat $\mathfrak{G}'(2)$ die Gestalt $\mathfrak{Z}\cdot\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}}<\mathfrak{N}$, ist daher nach ITÔ [6] auflösbar.

Sei nun $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)\not<\mathfrak{N}_2$. Dann gibt es ein Element $C=R\,N\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ mit $E\neq R\in\mathfrak{N}$ und $N\in\mathfrak{N}$. Sei ferner $Y\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)$. Dann ist $C^Y=C$, also $R\,N=(R\,N)^Y=R^Y N$, somit $R^Y=R$. Daher liegt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$.

Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))\not<\mathfrak{J}$, so existiert ein Element $Z\,J\in\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$ mit $E\neq Z\in\mathfrak{Z}$ und $J\in\mathfrak{J}$. Aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^{Z\,J}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)^Z<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^Z=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^{J^{-1}}<\mathfrak{J}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)<\mathfrak{J}^{Z^{-1}}\cap\mathfrak{J}$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)\lhd\mathfrak{J}$ ist dies wie oben im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\mathfrak{J}$ noch geeignete $n-1$ Symbole transitiv permutiert.

Sei schließlich $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))<\mathfrak{J}$. Ist $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal, so existiert ein $X\in\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X<\mathfrak{J}_2$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X\not<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$. Angenommen, es sei $X=A\,B\in\mathfrak{J}$ mit $A\in\mathfrak{J}_2$ und $B\in{}_2\mathfrak{J}$. Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^B<\mathfrak{J}_2$. Für jedes $C\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$ folgt wegen ${}_2\mathfrak{J}\lhd\mathfrak{J}$ die Beziehung $B\,C\,B^{-1}C^{-1}\in\mathfrak{J}_2\cap{}_2\mathfrak{J}=\mathfrak{E}$, also $B\,C=C\,B$ und dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^B=\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$, im Widerspruch zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^X\neq\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)$. Daher liegt X nicht in $\mathfrak{J}$, und es gilt $X=Z\,J$ mit $E\neq Z\in\mathfrak{Z}$ und $J\in\mathfrak{J}$. Nun erhalten wir $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)^Z<\mathfrak{J}_2^{J^{-1}}<\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$ und dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)<\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2)<\mathfrak{J}\cap\mathfrak{J}^{Z^{-1}}$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_2)\lhd\mathfrak{J}$ ist dies der schon zweimal aufgetretene Widerspruch.

Ist aber $\mathfrak{G}$ 2-normal, so liefert der Satz von GRÜN uns $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2)\cong\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))/\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))'(2)\neq\mathfrak{E}$. Die frühere Betrachtung läßt sich wegen $\mathfrak{J}_2<\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))<\mathfrak{J}$ nun mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}_2))$ an Stelle von $\mathfrak{J}$ durchführen und ergibt

für $\mathfrak{G}'(2)$ die Gestalt $\mathfrak{G}'(2) = \mathfrak{Z} \cdot \overline{\mathfrak{N}}$ mit $\overline{\mathfrak{N}} < \mathfrak{N}$, also nach ITÔ [6] die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}'(2)$.

Damit ist der Beweis von Satz 4 beendet.

Beweis von Satz 5 durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Wieder genügt der Nachweis eines eigentlichen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$. Sei $(\mathfrak{Z}) = n$, also nach unserer Voraussetzung $2 \nmid n$.

a) Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z} \neq \mathfrak{E}$, so gilt $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{Z}$. Nach ORE [8] oder SZÉP-RÉDEI [11] existiert dann ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D} < \mathfrak{N} < \mathfrak{U}$. Als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ ist $\mathfrak{N}$ auflösbar. Ist $\mathfrak{U}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gibt es eine maximale Untergruppe $\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{E} \neq \overline{\mathfrak{Z}} < \mathfrak{Z}$. Dann haben wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{Z}} \lhd \mathfrak{Z}$. Wie eben gibt es dann ein $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$ mit $\overline{\mathfrak{Z}} < \mathfrak{M} < \mathfrak{B}$. Nach unserer Induktionsannahme ist $\mathfrak{B}$ auflösbar, also $\mathfrak{M}$ ebenfalls. Wir dürfen also annehmen, daß $\mathfrak{U}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist und $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$ gilt.

b) Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen von $\mathfrak{U}$. Ist diese Darstellung nicht treu, so gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} < \mathfrak{U}$, der somit auflösbar ist. Also können wir annehmen, daß die Darstellung treu ist. Da $\mathfrak{U}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, haben wir sogar eine primitive Darstellung vor uns. $\mathfrak{G}$ enthält die regulär dargestellte zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}$. Ist n keine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ nach einem Satz von SCHUR zweifach transitiv (SCHUR [9], WIELANDT [12]). Ist aber n eine Primzahl, so ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv oder auflösbar (BURNSIDE [1], S. 341). In jedem Falle können wir daher annehmen, daß $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist. Daraus folgt $n - 1 \mid (\mathfrak{U})$, insbesondere $2 \mid (\mathfrak{U})$.

c)[1]. Sei zunächst $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2) \not< \mathfrak{U}$. Dann läßt $\mathfrak{U}_2$ sicher mehr als ein Symbol fest. $\mathfrak{K}$ sei ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{U}$. Sei $(\mathfrak{K}) = p^\alpha$. Ist $(\mathfrak{U}) \neq 2^\lambda$, so können wir wegen der 2-Nilpotenz $\mathfrak{K}$ so wählen, daß $p \neq 2$ gilt. Bei geeigneter Benennung der Symbole läßt $\mathfrak{K}$ nur 1 fest. Die restlichen $n - 1$ Symbole zerfallen unter $\mathfrak{K}$ in j Transitivitätsgebiete $\mathfrak{u}_i$ gleicher Länge. Entsprechend der Intransitivität von $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{U}$ imprimitiv. Da $\mathfrak{K}$ auf den $\mathfrak{u}_i$ transitiv dargestellt wird, enthält jedes $\mathfrak{u}_i$ etwa p^ϱ Symbole. Also ist $n = 1 + j\,p^\varrho$. Ist $p = 2$, so haben wir $(\mathfrak{U}) = 2^\lambda$, und $\mathfrak{G}$ ist nach ITÔ [6] auflösbar. Sei daher $p \neq 2$ und dann wegen $2 \mid n - 1$ notwendig $2 \mid j$.

$\mathfrak{U}_2$ lasse neben 1 auch das Symbol 2 fest. Dann bleibt $\mathfrak{u}_1$, wenn wir etwa $2 \in \mathfrak{u}_1$ annehmen, bei $\mathfrak{U}_2$ als Ganzes fest, aber nicht notwendig elementweise. $\mathfrak{B}$ sei diejenige Untergruppe von $\mathfrak{U}$, welche $\mathfrak{u}_1$ fest läßt. Da $\mathfrak{U}$ die $\mathfrak{u}_i$ transitiv vertauscht, gilt $(\mathfrak{U} : \mathfrak{B}) = j$. Offenbar liegt $\mathfrak{U}_2$ in $\mathfrak{B}$. Daraus folgt $2 \nmid (\mathfrak{U} : \mathfrak{B}) = j$, im Widerspruch zu $2 \mid j$.

d) Sei nun $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2) < \mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{U}_2$ abelsch, so liegt es im Zentrum von $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2)$; denn auch $\mathfrak{N}(\mathfrak{U}_2)$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ 2-nilpotent. Nach einem Satz von BURNSIDE (ZASSENHAUS [14], S. 133) folgt dann $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2) \cong \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{U}_2$, und $\mathfrak{G}'(2) = {}_2\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{Z}$ ist nach unserer Induktionsannahme auflösbar. Weiterhin können wir also $\mathfrak{U}_2' \neq \mathfrak{E}$ annehmen.

[1]) Dieser Teil c) geht wesentlich auf eine Unterhaltung mit Herrn H. WIELANDT zurück.

e) Zunächst betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)) \not< \mathfrak{U}$. Sei $X = ZU \in \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2))$ mit $U \in \mathfrak{U}$ und $E \neq Z \in \mathfrak{Z}$. Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X < \mathfrak{U}_2 < \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^Z < \mathfrak{U}^{U^{-1}} = \mathfrak{U}$, woraus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) < \mathfrak{U}^{Z^{-1}} \cap \mathfrak{U}$ folgt. Wegen der Nilpotenz von $\mathfrak{U}'$ ist $\mathfrak{U}_2'$ elementweise vertauschbar mit ${}_2\mathfrak{U}$ (s. HUPPERT [5]). Daher liegt $\mathfrak{U}_2' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) = \mathfrak{C}$ im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{U}$ und ist sicher von $\mathfrak{E}$ verschieden wegen $\mathfrak{U}_2' \neq \mathfrak{E}$. Nun haben wir $\mathfrak{C} \lhd \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{C} < \mathfrak{U}^{Z^{-1}} \cap \mathfrak{U}$. Das steht jedoch im Widerspruch zu der Transitivität von $\mathfrak{U}$ auf den Symbolen $2, \ldots, n$.

f) Sei nun $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)) < \mathfrak{U}$. Ist $\mathfrak{G}$ 2-normal, so gilt nach dem Satz von GRÜN (GRÜN [2], ZASSENHAUS [14], S. 135) $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'(2) \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2))/\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2))'(2) \neq \mathfrak{E}$, denn in jeder Untergruppe von $\mathfrak{U}$, deren Ordnung noch durch 2 teilbar ist, läßt sich wegen der 2-Nilpotenz eine echte 2-Faktorgruppe abspalten. Wegen $\mathfrak{Z} < \mathfrak{G}'(2)$ erhalten wir $\mathfrak{G}'(2) = \mathfrak{Z}\,\overline{\mathfrak{U}}$ mit $\overline{\mathfrak{U}} < \mathfrak{U}$. Aus der Induktionsannahme entnehmen wir dann die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}'(2)$.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht 2-normal, so gibt es ein $X \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X < \mathfrak{U}_2$, aber $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)$. Wäre $X \in \mathfrak{U}$, so hätten wir für jedes $C \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)$ und mit $X = ST$ mit $S \in \mathfrak{U}_2$ und $T \in {}_2\mathfrak{U}$ die Gleichung $X^{-1}CX = T^{-1}CT \in \mathfrak{U}_2$, also auch $T^{-1}CTC^{-1} \in \mathfrak{U}_2$. Wegen ${}_2\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{U}$ gilt aber $T^{-1}CTC^{-1} \in {}_2\mathfrak{U}$, also $TC = CT$. Daraus folgt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)^X = \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2)$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Somit ist $X \notin \mathfrak{U}$. Nun erhalten wir $\mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) < \mathfrak{U}^{X^{-1}} \neq \mathfrak{U}$, und wie bei e) gilt $\mathfrak{C} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{U}_2) \cap \mathfrak{U}_2' < \mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}^{X^{-1}}$ und $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{C} \lhd \mathfrak{U}$, was nicht möglich ist. Also muß $\mathfrak{G}$ doch 2-normal sein, womit der Beweis von Satz 5 abgeschlossen ist.

Literatur.

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order. Sec. edit. 1911. — [2] GRÜN, O.: Beiträge zur Gruppentheorie I. J. reine angew. Math. **174**, 1—14 (1935). — [3] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [4] HUPPERT, B.: Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. Math. Z. **59**, 1—7 (1953). — [5] HUPPERT, B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409—434 (1954). — [6] ITÔ, N.: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [7] ITÔ, N.: Note on (*LM*)-groups of finite orders. Kōdai math. Sem. Reports 1951, S. 1—6. — [8] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [9] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1933**, 598—623. — [10] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [11] SZÉP, J. u. L. RÉDEI: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [12] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582—587 (1936). — [13] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951). — [14] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

Mathematical Institute, Nagoya University, Chikusa-Ku, Nagoya (Japan).

(Eingegangen am 28. Juni 1954.)

LAUGWITZ, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 100—118 (1954)

Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom.

I. Tensoren auf lokal-linearen Räumen.

Von

DETLEF LAUGWITZ.

Einleitung. Mit einer Note, enthaltend die Herleitung der Fundamentalformeln der Kurventheorie im Raum der über einem Intervall definierten stetigen Funktionen, hat G. KOWALEWSKI [1][1]) im Jahre 1910 eine neue Disziplin der Differentialgeometrie begründet, die Differentialgeometrie der unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten. In den zwanziger und dreißiger Jahren hat die italienische Schule um G. VITALI die Differentialgeometrie der endlichdimensionalen Untermannigfaltigkeiten des HILBERTschen Raumes gründlich erforscht; ein Teil der Ergebnisse ist in dem Buch von VITALI [1] zusammengefaßt.

Um 1930 begann man sich, angeregt von Fragestellungen der Mechanik der Kontinua, mit der intrinseken Geometrie der Funktionenräume zu befassen. MICHAL [1], MOISIL [1], CONFORTO und KAWAGUCHI erweiterten Ergebnisse der RIEMANNschen Geometrie auf spezielle Funktionenräume. So definierte MOISIL im Raume der über $\langle 0, 1\rangle$ stetigen Funktionen ein Linienelement durch

$$ds^2 = \int_0^1 g(\alpha)\,\delta x^2(\alpha)\,d\alpha + \int_0^1\int_0^1 g(x;\alpha,\beta)\,\delta x(\alpha)\,\delta x(\beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

Diese Geometrien leiden sehr darunter, daß der Formalismus außerordentlich schwerfällig ist; die Definitionsgleichung des Krümmungstensors erstreckt sich bei manchen Autoren über nahezu eine ganze Seite. Der geometrische Gehalt der unendlichdimensionalen Geometrien tritt besser zutage in der von MICHAL inaugurierten „abstrakten" Auffassung (MICHAL [2], [4]; KERNER [1]). Doch sind auch die Bezeichnungen von MICHAL und KERNER nicht einfach genug, als daß der geometrische Inhalt klar erkennbar wäre. Zudem zeigt eine genauere Analyse, daß Abweichungen von der klassischen Geometrie auftreten, die nur durch die Wahl der Bezeichnungsweise bedingt sind. Außerdem ist der Formalismus zu schwerfällig, als daß neue geometrische Resultate erzielt werden könnten. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine Bezeichnungsweise eingeführt, die von der klassischen Indexmethode möglichst wenig abweicht.

Wir werden hier die Frage nach dem Aufbau der Differentialgeometrie, und zwar in II. insbesondere der RIEMANNschen Geometrie ohne Verwendung eines Dimensionsaxioms behandeln. Dies ist etwa in demselben Sinne zu

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

verstehen, wie die euklidische Geometrie ohne Verwendung eines Dimensionsaxioms durch die Geometrie des HILBERT-Raumes dargestellt werden kann. Für eine Geometrie ohne Dimensionsaxiom wird man folgende Forderungen aufstellen müssen:

1. Untermannigfaltigkeiten der gleichen algebraisch-analytischen Struktur haben die gleiche geometrische Struktur wie der ursprüngliche Raum.

2. Im Endlichdimensionalen fällt der Begriff der Geometrie mit dem klassischen zusammen.

Das heißt z. B.: Jeder lineare Unterraum eines euklidischen Raumes ist ein euklidischer Raum; im endlichdimensionalen Fall geht die neue Definition des euklidischen Raumes in die klassische über. Beides ist für den HILBERT-Raum erfüllt. Entsprechendes gilt für die affine Geometrie und die topologischen Vektorräume.

Der hier gegebene dimensionsfreie Aufbau der Differentialgeometrie ermöglicht auch die Gewinnung neuer geometrischer Resultate in der Geometrie der unendlichdimensionalen Räume. In § 12 von Teil II werden wir als ein Beispiel für diese Möglichkeit den Beweis dafür bringen, daß unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen die Krümmungen in den KOWALEWSKI-FRENETschen Formeln ein vollständiges System unabhängiger Invarianten einer Kurve darstellen. Dies wird gleich im RIEMANNschen Raume gezeigt werden können.

§ 1. Lineare Räume.

Im folgenden bezeichnen wir mit L einen beliebigen Vektormodul (Vektoren $x, \xi, \ldots$) über dem Körper der reellen Zahlen. Jeder Menge $M \subseteq L$ ist ihre lineare Hülle $LH(M)$ zugeordnet als Menge der Linearkomposita aus je endlich vielen Elementen von M. Ein Element $x \in L$ heißt linear abhängig von einer Menge $M \subseteq L$, wenn $x \in LH(M)$, anderenfalls linear unabhängig. LÖWIG [1] hat die lineare Dimension $\mathfrak{a}(L)$ eingeführt als kleinstmögliche Mächtigkeit einer Menge $M \subseteq L$ mit $LH(M) = L$[2]). Bezeichnet man als lineare Basis von L jede Menge $B \subseteq L$ mit den Eigenschaften

a) $LH(B) = L$ und

b) Jedes Element von B ist von der Menge der übrigen linear unabhängig,

so gilt nach LÖWIG [1], Satz 1, daß die Mächtigkeit von B gleich $\mathfrak{a}(L)$ ist. Die Existenz einer linearen Basis in L ist z. B. bei HAUSDORFF [1, 295] bewiesen. Jeder Vektor aus L läßt sich eindeutig durch die Vektoren von B linear darstellen. Ein linearer Unterraum von L ist eine Menge $L' \subseteq L$ mit $LH(L') = L'$. Für eine beliebige Menge $M \subseteq L$ ist $\mathfrak{a}(M)$ erklärt als lineare Dimension von $LH(M)$.

Hilfssatz 1.1. *Aus* $M \subseteq M'$ *folgt* $\mathfrak{a}(M) \leq \mathfrak{a}(M')$.

[2]) LÖWIG [1] verwendet die Bezeichnungen „affine Dimensionszahl", „affine Basis"; da der Begriff „affin" mehr enthält als rein algebraische Aussagen, soll er hier vermieden werden. Aus ähnlichen Gründen werden wir statt „metrische Dimensionszahl" usw. sagen: topologische Dimensionszahl usw.

Hilfssatz 1.2. *Wenn es in* $M \subseteq L$ $\aleph$ *linear unabhängige Vektoren gibt, dann ist* $\mathfrak{a}(M) \geq \aleph$.

Die Beweise ergeben sich aus der Anwendung der Hilfssätze NT 1 und 2 auf die linearen Hüllen[3]).

Eine Abbildung eines linearen Raumes L in einen zweiten A heißt linear, wenn sie distributiv und von erster Ordnung homogen ist. Die Menge dieser Abbildungen bildet wieder einen linearen Raum (Vektormodul), wenn man die Linearitätsrelationen in der üblichen Weise erklärt. Wegen der linearen Dimension dieses Raumes vergleiche man NT, Hilfssatz 3. Die Abbildungen von L in die Menge der reellen Zahlen heißen Funktionale. Der Raum der linearen Funktionale über L, der Dualraum von L, hat die lineare Dimension $2^{\mathfrak{a}(L)}$.

Es sei nun in L eine Topologie eingeführt, so daß L dadurch zu einem topologischen Vektorraum im Sinne von BOURBAKI [1, p. 1] geworden ist. Dann ist jeder Menge M ihre abgeschlossene lineare Hülle $ALH(M)$ zugeordnet als Menge derjenigen $x \in L$, welche sich durch endliche Linearkombinationen von Vektoren aus M approximieren lassen. Diese Menge ist relativ-abgeschlossen in L, braucht aber nicht vollständig zu sein, wenn L selbst nicht vollständig ist. Unter der topologischen Dimensionszahl $\mathfrak{t}(M)$ einer Menge soll dann die kleinstmögliche Mächtigkeit einer Menge N mit $ALH(N) = ALH(M)$ verstanden werden. Es gilt offenbar stets: $\mathfrak{t}(M) \leq \mathfrak{a}(M)$, wobei für endlichdimensionale Räume natürlich die Gleichheit gilt. In unendlichdimensionalen Räumen gilt nicht immer das Gleichheitszeichen (vgl. z. B. NT, Beweis zu Satz 3).

§ 2. Normierte Räume und ihre adjungierten Räume.

Wir werden uns im folgenden im wesentlichen auf spezielle topologische Vektorräume, die „normierten" Räume, beschränken, da nur in diesen ein befriedigender Aufbau der Analysis durchführbar ist. Ein linearer Raum L heißt normiert, wenn in ihm eine Topologie eingeführt ist mit Hilfe eines reellwertigen Funktionals $||x||$ mit

$$||x|| \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0, \qquad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \qquad ||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||.$$

Diese „Norm" ist dann positiv-definit. Die Topologie ist definiert durch:

$$x_n \to x \quad \text{genau wenn} \quad ||x_n - x|| \to 0.$$

Zwei Normen $||\ ||_1$ und $||\ ||_2$ über L heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie in L definieren, und dafür ist notwendig und hinreichend, daß es zwei positive Konstanten M, m gibt mit

$$m \cdot ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M \cdot ||x||_1$$

für alle $x \in L$ (SOBCZYK [1, 79]; BOURBAKI [2, 43]).

[3]) Mit NT wird der Aufsatz des Verf., Über Normtopologien in linearen Räumen, Arch. der Math. 4, 455—459 (1953) bezeichnet.

Es ist bekannt (NT), daß jeder lineare Raum L normierbar ist, und die Anzahl der verschiedenen Normtopologien ist für $\mathfrak{a}(L) \geq \aleph_0$ sogar mindestens gleich der Mächtigkeit des Kontinuums.

Im topologischen Produkt $N_1 \times \cdots \times N_m$ endlich vieler normierter Räume ist die übliche Topologie des Produktraums selbst wieder normierbar; die Norm kann durch $\max\{||x_i||_i\}$ definiert werden.

Es sollen jetzt noch zwei Hilfssätze über stetige Abbildungen $F(x)$ eines normierten Raumes in einen anderen bewiesen werden.

Hilfssatz 2.1. *Notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von $F(x)$ im Punkte x_0 ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon)$, so daß $||F(x) - F(x_0)|| \leq \varepsilon$ für $||x - x_0|| \leq \delta$* [4]).

Beweis. Die Bedingung ist offenbar hinreichend. Ihre Notwendigkeit folgt indirekt: Gäbe es ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, so daß es für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein x_n gäbe mit $||x_n - x_0|| \leq \frac{1}{n}$ und $||F(x_n) - F(x_0)|| > \tilde{\varepsilon}$, so ergäbe sich ein Widerspruch zur Stetigkeit, da $x_n \to x_0$.

Hilfssatz 2.2. *Wenn $F(x)$ in einem Innenpunkt x_0 des Definitionsbereiches stetig ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine „Kugel" $||x - x_0|| \leq m(\varepsilon)$, so daß $||F(x)|| \leq ||F(x_0)|| + \varepsilon$ für $||x - x_0|| \leq m(\varepsilon)$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem vorhergehenden Hilfssatz und der Dreiecksungleichung $|||F(x)|| - ||F(x_0)||| \leq ||F(x) - F(x_0)||$.

Notwendig und hinreichend für die Stetigkeit einer linearen Abbildung $X = T(x)$ eines normierten Raumes in einen zweiten ist bekanntlich:

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||T(x)|| < \infty.$$

Unter der so definierten Norm bildet die Menge der stetigen (oder „beschränkten") linearen Abbildungen T selbst wieder einen normierten Raum, der sogar vollständig ist, wenn der Bildraum diese Eigenschaft hat.

Aus der Definition folgt $||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$.

Wir führen folgende Bezeichnungskonvention ein:

1. Elemente eines vorgelegten normierten Raumes sollen durch Zeichen aus einer bestimmten, für den Raum charakteristischen Zeichenmenge gekennzeichnet werden. Zeichenmengen sind z. B.:

$*, \triangle, \times, \square, \bigcirc, \nabla, \ldots$
$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \ldots$
$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$
$a, b, c, d, e, f, \ldots$

Ferner soll verabredet werden, daß Elemente eines normierten Raumes ihr Zeichen an einer bestimmten Stelle, etwa als oberen oder unteren Index tragen sollen, wobei diese Stelle einheitlich für alle Elemente des Raumes

[4]) Die Norm kann in beiden Räumen durch dasselbe Symbol bezeichnet werden, da die Argumente sich unterscheiden.

festgelegt sein soll. Ein Index dient nicht zur Unterscheidung von Elementen des gleichen Raumes und darf daher in einem Ausdruck (einer Gleichung) zugleich an allen Stellen, an denen er vorkommt, durch einen beliebigen anderen derselben Zeichenmenge ersetzt werden, der vorher noch nicht in diesem Ausdruck (dieser Gleichung) auftrat.

2. Es seien zwei normierte Räume vorgelegt, deren Elemente durch obere Indizes aus zwei verschiedenen Zeichenmengen gekennzeichnet seien. Eine beschränkte lineare Abbildung des ersten Raumes in den zweiten trägt als unteren Index den Index des Urbildes, als oberen Index den Index des Bildes.

Beispiel. Statt $X = T(x)$ schreiben wir z. B. $X^{\Delta} = T_{\mathrm{II}}^{\Delta}\, x^{\mathrm{II}}$. Abbildungen eines Raumes in sich schreiben wir demgemäß z. B. $y^3 = S_4^3\, x^4$. Insbesondere verabreden wir, daß die Identität in einem normierten Raum durch δ bezeichnet wird (das „Kronecker-Dirac-Symbol"): $x^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}\, x^{\beta}$.

3. Reelle Zahlen tragen keinen freien Index. (Dabei heißt ein oberer oder unterer Index „frei", wenn er im gleichen Ausdruck nicht noch als unterer bzw. oberer Index auftritt.)

Beispiel. Die stetigen linearen Funktionale über einem Raum $\{\xi^i\}$ tragen untere Indizes aus der gleichen Zeichenmenge: η_i; $\eta_k\, \xi^k$ ist eine Zahl, $\eta_i\, \xi^k = \xi^k\, \eta_i$ dagegen ein linearer Operator mit eindimensionalem Wertebereich.

Aus bezeichnungstechnischen Gründen werden wir von den Zeichenmengen hauptsächlich das kleine griechische und das kleine lateinische Alphabet verwenden; die arabischen Zahlen 1, 2, 3, ... sowie die Buchstaben m, n werden zur Numerierung benutzt und haben keine Bedeutung in der Operationssymbolik.

Vollständige normierte Räume bezeichnen wir wie üblich als BANACH-Räume.

Die Menge der stetigen Linearformen über einem normierten Raume N bildet einen BANACH-Raum, den zu N adjungierten Raum; seine Vollständigkeit folgt aus der Vollständigkeit des normierten Raumes der reellen Zahlen. Dieser adjungierte Raum ist zugleich adjungierter Raum von $\overline{N} = B$, der Vervollständigung von N; wir bezeichnen ihn mit B_1. Höhere adjungierte Räume erhält man mittels der Mengen der stetigen Multilinearformen in n Elementen aus B und m Elementen aus B_1. Diese Multilinearformen werden mit

$$t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}$$

bezeichnet. Als Norm in diesen Multilinearformenmoduln wird man verwenden:

$$\left\| t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m} \right\| = \sup_{\|\eta_{i_1}\| = \dots = \|z^{k_n}\| = 1} \left| \eta_{i_1} \dots \varrho_{i_m}\, t_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}\, y^{k_1} \dots z^{k_n} \right| .$$

Wenn nichts anderes bemerkt wird, soll $t^{\dots}_{\dots}$ zusätzlich die Eigenschaft haben, daß jeder mit $t^{\dots}_{\dots}$ gebildete Ausdruck, der genau einen freien oberen Index trägt, ein Element von B darstellt. Dies ist im allgemeinen wirklich eine Einschränkung, da es Räume gibt, die nicht „reflexiv" sind, d. h. bei denen sich nicht alle stetigen Linearformen über B_1 durch Elemente von

B repräsentieren lassen. Dann wäre man zwar sicher, daß z.B. $t^i_k \xi^k$ eine Linearform über B_1 ist, aber sie brauchte nicht notwendig einem Element von B zu entsprechen. Wenn wir aber diese Einschränkung machen, dann bildet die Menge dieser $t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n}$ einen BANACH-Raum, den wir mit B^m_n bezeichnen wollen. Diese Räume sind übrigens von mindestens derselben linearen Dimensionszahl wie B bzw. B_1, sind also jedenfalls mit B nichttriviale BANACH-Räume. Genauer wollen wir beweisen:

Hilfssatz 2.3.

$$\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(B^m) \leq 2^{(2^{\mathfrak{a}(B)})} \qquad (B^m = B^m_0,\ B^1 = B),$$
$$\mathfrak{a}(B) \cdot \mathfrak{a}(B_1) \leq \mathfrak{a}(B^m_n) \leq 2^{(2^{\mathfrak{a}(B)})}, \qquad m \cdot n \neq 0,$$
$$\mathfrak{a}(B_1) \leq \mathfrak{a}(B_n) \leq 2^{\mathfrak{a}(B)}.$$

Beweis. Sind $\{\xi^i_{(\mu)}\}$, $\{\eta^{(\nu)}_k\}$ lineare Basen von B bzw. B_1, so sind im Falle $m \cdot n \neq 0$ $\xi^{i_1}_{(\mu_1)} \dots \xi^{i_m}_{(\mu_m)} \eta^{(\nu_1)}_{k_1} \dots \eta^{(\nu_n)}_{k_n}$ $\mathfrak{a}(B) \cdot \mathfrak{a}(B_1)$ linear unabhängige Elemente von B^m_n. Daraus folgt die Abschätzung nach unten nach Hilfssatz 1.2. Die Abschätzung nach oben ergibt sich nach NT, Hilfssatz 4. In entsprechender Weise folgen die beiden anderen Ungleichungen.

Hilfssatz 2.4. *B_1 ist mit B unendlichdimensional. Wenn B separabel ist (d.h. $\mathfrak{t}(B) = \aleph_0$), dann gilt*

$$\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(B_1) \leq 2^{\mathfrak{a}(B)}.$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes ergibt sich sofort: Wäre B_1 endlichdimensional, so wäre der zu B_1 adjungierte Raum von der gleichen endlichen Dimension, müßte andererseits aber einen zu B isomorphen Teilraum besitzen, was unmöglich ist, da B unendlichdimensional sein sollte. Zum Beweis des zweiten Teiles der Behauptung beachten wir, daß nach NT, Satz 4 $\mathfrak{a}(B)$ und $\mathfrak{a}(B_1)$ normtopologische Invarianten von B sind. Man kann also zu einer äquivalenten Norm in B übergehen, ohne daß ihr Wert sich ändert. Wegen der Separabilität des Raumes gibt es nach CLARKSON [*1*] in jeder Normtopologie eine eigentlich konvexe Norm $|\ |$, d.h. $|\ |$ hat die Eigenschaft, daß aus $|x+y| = |x| + |y|$ die lineare Abhängigkeit von x und y folgt. Dann gibt es zu jedem $\mathring{y}_i$ mit $|\mathring{y}| = 1$ höchstens ein $\mathring{x}^j$ mit $\mathring{y}_i \mathring{x}^i = 1$, $|\mathring{x}| = 1$; denn gäbe es zwei, $\mathring{x}$ und $\tilde{x}$, dann wäre:

$$2 \leq \mathring{y}_i(\mathring{x}^i + \tilde{x}^i) \leq |\mathring{x}^i + \tilde{x}^i| \leq 2.$$

Daraus ergäbe sich aber wegen der eigentlichen Konvexität von $|\ |$ die lineare Abhängigkeit von $\mathring{x}$ und $\tilde{x}$, und die Gleichheit dieser beiden Vektoren folgt dann aus $\mathring{y}_i(\mathring{x}^i - \tilde{x}^i) = 0$, $\mathring{y}_i \mathring{x}^i \neq 0$. Andererseits gibt es bekanntlich (vgl. z.B. BANACH [*1*]) zu jedem x^i mit $|x| = 1$ mindestens ein y_i mit $y_i x^i = 1$ und $|y| = 1$. Also hat man eine eineindeutige Korrespondenz zwischen B und einer Untermenge U von B_1, wenn man x zuordnet $|x| \cdot y_i$, wo y_i ein bestimmtes der nach der obigen Zuordnung zu $x/|x|$ gehörigen linearen Funktionale ist. B_1 hat also mindestens dieselbe Mächtigkeit wie B.

Da B und B_1 unendlichdimensionale BANACH-Räume sind, sind ihre linearen Dimensionen nach einem Resultat von MACKEY [*1*, 159] mindestens

gleich der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums. Also fallen ihre Mächtigkeiten nach LÖWIG [1], Satz 2 mit ihren linearen Dimensionen zusammen, und daraus folgt $\mathfrak{a}(B) \leq \mathfrak{a}(B_1)$.

Die Menge der stetigen linearen Funktionale ist in der Menge aller Funktionale enthalten, und daraus ergibt sich nach Hilfssatz 1.1 und NT, Hilfssatz 3: $\mathfrak{a}(B_1) \leq 2^{\mathfrak{a}(B)}$.

Die beiden zuletzt bewiesenen Hilfssätze zeigen, daß die Räume B_n^m jedenfalls nicht-triviale Vektorräume sind. Wir untersuchen jetzt noch ihre Normen etwas genauer. Für $||T_j^i||$ haben wir zwei Definitionen, je nachdem ob wir T_j^i als lineare Abbildung von B auf sich oder als Bilinearform über $B \times B_1$ auffassen. Wir müssen daher die Äquivalenz der beiden Definitionen zeigen.

Hilfssatz 2.5. $||x^i|| = \max\limits_{\eta_i \neq 0} \frac{|\eta_i x^i|}{||\eta_i||}$.

Beweis. Dies folgt aus der bereits im Beweis zu Hilfssatz 2.4 benutzten Tatsache, daß es zu jedem $\overset{\circ}{x}{}^k \neq 0$ ein $\overset{\circ}{\eta}_k$ gibt mit $||\overset{\circ}{\eta}_k|| = 1$ und $\overset{\circ}{\eta}_j \overset{\circ}{x}{}^j = ||\overset{\circ}{x}{}^j||$. Für alle η_i gilt $|\eta_i x^i| \leq ||\eta|| \cdot ||x||$. Die obere Grenze wird wirklich angenommen.

Hilfssatz 2.6. $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{||T_k^i x^k||}{||x^k||} = \sup\limits_{||\eta|| \cdot ||x|| \neq 0} \frac{|\eta_i T_k^i x^k|}{||\eta|| \, ||x||}$.

Beweis.

$$\sup \frac{|\eta_i T_k^i x^k|}{||\eta|| \cdot ||x||} = \sup \frac{|\eta_i T_k^i x^k|}{||T_k^i x^k||} \cdot \frac{||T_k^i x^k||}{||\eta_i|| \cdot ||x^k||} \leq \sup \frac{||T_k^i x^k||}{||x||}. \quad \text{(Alle Nenner } \neq 0.)$$

Die Umkehrung gilt nach Hilfssatz 2.5.

Die Norm T_k^i kann also auf beide Arten berechnet werden. Man erkennt auf die gleiche Weise, daß Entsprechendes auch für $t_{k_1 \ldots k_n}^{i_1 \ldots i_m}$ gilt. Es ergibt sich die allgemeine Regel:

Die Norm eines beliebigen Ausdrucks ist gleich dem Produkt der Normen seiner Bestandteile oder kleiner als dieses.

Beispiel:

$$||T_{kjh}^i \xi^k g_{rs} t^r f^{jl}|| \leq ||T_{kjh}^i|| \cdot ||\xi^k|| \cdot ||g_{rs}|| \cdot ||t^r|| \cdot ||f^{jl}||.$$

Solche Ausdrücke wie den hier betrachteten $T_{kjh}^i \xi^k g_{rs} t^r f^{jl}$ kann man symbolisch als Produkte auffassen. Sie stellen in unmißverständlicher Weise stetige lineare Abbildungen zwischen höheren adjungierten Räumen dar, im Beispiel zwischen B^2 und B^2.

Hilfssatz 2.7. *Wenn* $\eta_i(x^i - y^i) = 0$ *für alle* η_i *aus* B_1, *dann ist* $x^i = y^i$.

Beweis. Wäre nämlich $||x^i - y^i|| \neq 0$, so gäbe es ein $\overset{\circ}{\eta}_i$ mit $||\overset{\circ}{\eta}_i|| = 1$ $\overset{\circ}{\eta}_i(x^i - y^i) = ||x^i - y^i||$, und dies müßte im Gegensatz zur Annahme nach Voraussetzung gleich 0 sein.

In B_n^m ist die Gleichheit wie üblich definiert; zwei Elemente von B_n^m heißen gleich, wenn ihre Differenz die Nullform ist, d. h. für alle Auswahlen von Vektoren aus B, B_1 verschwindet.

Hilfssatz 2.8. *Notwendig und hinreichend für* $t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} = 0$ *ist:*

$$t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \xi^{k_\nu} = 0 \qquad (t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \eta_{i_\mu} = 0)$$

gilt für alle $\xi(\eta)$ *und irgendein* ν, $1 \leq \nu \leq n$ $(\mu, 1 \leq \mu \leq m)$.

Beweis. Dies folgt aus der allgemeinen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\left\| \overset{(1)}{\eta_{i_1}} \dots \overset{(m)}{\eta_{i_m}} t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \overset{k_1}{\underset{(1)}{\xi}} \dots \xi^{k_\nu} \dots \overset{k_n}{\underset{(n)}{\xi}} \right\| \\ &\quad \leq \left\| \overset{(1)}{\eta_{i_1}} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \overset{(m)}{\eta_{i_m}} \right\| \cdot \left\| t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \xi^{k_\nu} \right\| \cdot \left\| \overset{k_1}{\underset{(1)}{\xi}} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \overset{k_n}{\underset{(n)}{\xi}} \right\| \\ &\quad \leq \left\| \overset{(1)}{\eta_{i_1}} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \overset{(m)}{\eta_{i_m}} \right\| \cdot \left\| t^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \right\| \cdot \left\| \xi^{k_\nu} \right\| \cdot \left\| \overset{k_1}{\underset{(1)}{\xi}} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \overset{k_n}{\underset{(n)}{\xi}} \right\|, \end{aligned}$$

deren zweite Hälfte für den Beweis der Notwendigkeit Verwendung findet und deren erster Teil den Beweis dafür ergibt, daß die Bedingung hinreichend ist. Die eingeklammerte Behauptung ergibt sich entsprechend.

Es sollen jetzt noch einige Bemerkungen zur Indexkonvention folgen. Für ihre Deutung im endlichdimensionalen Spezialfall gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten. Einmal kann man sagen: Alle Ausdrücke sind nach der EINSTEINschen Summationskonvention zu behandeln. Bedeutet $y^\alpha = T^\alpha_k x^k$ eine lineare (hier selbstverständlich stetige) Abbildung eines n-dimensionalen linearen Raumes in einen m-dimensionalen linearen Raum, so kann man sich α als einen von 1 bis m laufenden Index denken, während über k von 1 bis n summiert wird. Diese Auffassung macht Gebrauch von einem speziellen cartesischen Koordinatensystem. Die andere Deutungsmöglichkeit ist: Die Operationsauffassung wird auch im Endlichdimensionalen beibehalten. In $y^\alpha = T^\alpha_k x^k$ oder $y^* = T^*_{\mathrm{I}} x^{\mathrm{I}}$ bedeuten T^α_k oder T^*_{I} also lineare Operatoren. — Für den allgemeinen Fall ist eine sehr zweckmäßige Bezeichnung von DIRAC [1] eingeführt worden. Dort wird statt x^i geschrieben $|x\rangle$, statt y_j $\langle y|$, und für T^i_j einfach T. Diese Bezeichnung ist der Indexkonvention überlegen, wenn man nur Größen dieser angeführten Arten zu betrachten hat; sie eignet sich auch weit besser als die Indexschreibweise für die Behandlung komplexer Räume. Da wir jedoch in der Differentialgeometrie Größen mit vier und mehr Indizes benötigen werden, erweist sich die DIRACsche Schreibweise hier leider als unzureichend.

§ 3. Quadratische Formen und euklidische Normtopologien.

Eine Bilinearform $t_{ik} x^i y^k$ heißt symmetrisch, wenn $t_{ik}(x^i y^k - x^k y^i) = 0$ für alle x, y gilt. Da Umbenennung der Indizes erlaubt ist, können wir statt dessen auch sagen:

$$(t_{ik} - t_{ki}) x^i y^k = 0 \text{ gilt für alle } x, y.$$

Nach der Definition der Gleichheit von Multilinearformen folgt als notwendige und hinreichende Bedingung für die Symmetrie von t_{ik}: $t_{ik} = t_{ki}$.

Zu einer Bilinearform t_{ik} gehört eine quadratische Form $t_{ik} x^i x^k$. Eine quadratische Form $t_{ik} x^i x^k$ heißt positiv-definit, wenn $t_{ik} x^i x^k > 0$ für alle $x^i \neq 0$.

Hilfssatz 3.1. *Unter allen Bilinearformen, die zu einer quadratischen Form gehören, gibt es eine symmetrische.*

(Dabei heißen zwei quadratische Formen gleich, wenn sie für alle x gleiche Werte annehmen.)

Beweis. Sei t_{ik} irgendeine zu der quadratischen Form gehörige Bilinearform. Dann ist

$$\tfrac{1}{2}(t_{ik}+t_{ki})\,x^i\,y^k=\tfrac{1}{2}\,t_{ik}(x^i\,y^k+x^k\,y^i)$$

eine zur gleichen quadratischen Form gehörige Bilinearform, welche symmetrisch ist. Damit haben wir, daß es jedenfalls dann eine zur quadratischen Form gehörige symmetrische Bilinearform gibt, wenn es überhaupt eine zugehörige Bilinearform gibt. Diese Existenz ist aber bekannt, wenn sie in jedem dreidimensionalen Unterraum gilt, denn die Bilinearitätsdefinition involviert stets nur einen höchstens dreidimensionalen Unterraum. Im dreidimensionalen Raum kennt man die Existenz aber.

Hilfssatz 3.2. *Aus* $t_{ik}=t_{ki}$ *und* $t_{ik}\,x^i\,x^k=0$ *für alle* x *folgt* $t_{ik}=0$.

Beweis.

$$0=t_{ik}(x^i+y^i)\,(x^k+y^k)=t_{ik}(x^i+y^i)\,x^k+t_{ik}(x^i+y^i)\,y^k$$
$$=t_{ik}\,x^i\,x^k+t_{ik}\,y^i\,x^k+t_{ik}\,x^i\,y^k+t_{ik}\,y^i\,y^k=0+2t_{ik}\,x^i\,y^k+0.$$

Jede beschränkte Bilinearform t_{ik} vermittelt eine stetige lineare Abbildung von B in B_1. Über die Umkehrbarkeit dieser Abbildung sollen jetzt drei Sätze bewiesen werden.

Satz 3.1. *Es sei* $g_{ik}\in B_2$ *symmetrisch, und die zugehörige quadratische Form sei positiv-definit. Dann ist hinreichend für die Umkehrbarkeit der Abbildung* $g_{ik}x^k=u_i$, *daß* $g_{ik}x^i\,x^k$ *„gleichmäßig" positiv-definit ist:*
$g_{ik}\,x^i\,x^k\geq m\cdot\|x^k\|^2$ *gilt für alle* x *mit einheitlichem* $m>0$.

Beweis. Es gilt also $m^{\frac{1}{2}}\cdot\|x\|\leq\{x\}\leq\|g_{ik}\|^{\frac{1}{2}}\cdot\|x\|$, wobei $\{x\}^2$ für $g_{ik}\,x^i\,x^k$ gesetzt ist. Die Normen $\{\}$ und $\|\,\|$ gehören also derselben Normtopologie an, und unter $\{\}$ ist B ein HILBERT-Raum mit dem Skalarprodukt $g_{ik}\,x^i\,y^k$. Da die Stetigkeit eines linearen Funktionals beim Übergang zu einer äquivalenten Norm erhalten bleibt, können wir die Umkehrbarkeit der Abbildung g_{ik} auch bezüglich der HILBERT-Norm $\{\}$ diskutieren. Nach einem bekannten Satz über den HILBERT-Raum ist dann aber jedes lineare Funktional u_i eindeutig darstellbar in der Form $u_i=g_{ik}\,x^k$. Die Umkehrung ist also eindeutig und linear, und die Bildmenge der Abbildung g_{ik} fällt mit B_1 zusammen. Wir zeigen noch die Stetigkeit der Umkehrung:

$$\|g_{ik}\,x^i\|=\sup_{y\neq 0}\frac{|g_{ik}\,x^i\,y^k|}{\|y^k\|}=\sup_{y\neq 0}\frac{\{x\}\cdot\{y\}}{\|y\|}\geq m^{\frac{1}{2}}\{x\}\geq m\,\|x\|.$$

(Hierbei wurde von der SCHWARZschen Ungleichung

$$|g_{ik}\,x^i\,y^k|\leq\{x\}\cdot\{y\}$$

Gebrauch gemacht; die Gleichheit gilt bei linearer Abhängigkeit von x und y. Die Ungleichung ergibt sich sehr einfach aus der Bemerkung, daß sie in dem zweidimensionalen, von x und y aufgespannten Raum bekannt ist.)

Dieser Satz ist auf etwas umständlicherem Wege in einem Spezialfall von KERNER [1] bewiesen worden.

Satz 3.2. *Eine positiv-definite quadratische Form* $g_{ik}\,x^i\,x^k$ $(g_{ik}=g_{ki})$, *welche eine lineare topologische Abbildung zwischen B und* $U \subseteq B_1$ *vermittelt* $(u_i = g_{ik}\,x^k)$, *liefert eine zur ursprünglichen äquivalente Norm* $\{x\} = (g_{ik}\,x^i\,x^k)^{\frac{1}{2}}$ *in B. Es gilt* $U = B_1$.

Beweis. Wegen $||g_{ik}|| < \infty$ gilt $\{x\}^2 \leq ||g_{ik}|| \cdot ||x||^2$; damit ist die eine Hälfte der Ungleichung bereits bewiesen, die für die topologische Äquivalenz von $\{\}$ und $||\,||$ charakteristisch ist. Die andere Hälfte folgt so (G bezeichnet die Umkehrung von g_{ik}; die Operationskonvention kann hier zunächst nicht angewendet werden, da noch nicht bekannt ist, ob U mit B_1 zusammenfällt):

$$||x^i|| \leq ||G|| \cdot ||u_j|| = ||G|| \cdot ||g_{jk}\,x^k|| = ||G|| \cdot \sup_{y \neq 0} \frac{|g_{ik}\,x^k\,y^i|}{||y||}.$$

Auf der rechten Seite wird wiederum die SCHWARZsche Ungleichung angewendet. Damit erhält man:

$$||x^i|| \leq ||G|| \cdot \{x^i\} \cdot \sqrt{||g_{ik}||}.$$

Die Äquivalenz der beiden Normen $\{\}$ und $||\,||$ ist damit bewiesen:

$$\frac{1}{||G|| \cdot \sqrt{||g_{ik}||}}\,||x^i|| \leq \{x^i\} \leq \sqrt{||g_{ik}||} \cdot ||x^i||.$$

$U = B_1$ folgt dann aus dem vorhergehenden Satz.

Beide Sätze lassen sich zusammenfassen:

Satz 3.3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß es in einem* BANACH-*Raum B positiv-definite quadratische Formen* $g_{ik}\,x^i\,x^k$ $(g_{ik}=g_{ki})$ *gibt, welche topologische lineare Abbildungen* $g_{ik}\,x^i$ *zwischen B und* $U \subseteq B_1$ *vermitteln, ist die Euklidizität der Normtopologie von B. Es ist notwendig* $U = B_1$.

(In NT ist eine Normtopologie euklidisch genannt worden, wenn sie sich durch eine aus einem Skalarprodukt hervorgehende Norm realisieren läßt.)

Da ein Raum genau dann euklidisch ist, wenn seine Vervollständigung ein HILBERT-Raum ist, kann man diesen Satz etwas allgemeiner auch so formulieren:

Satz 3.3′. *Eine Normtopologie in einem linearen Raum L ist genau dann euklidisch, wenn es eine topologische lineare Abbildung* $g_{ik}\,x^i$ *zwischen dem Raum und einem Unterraum U des adjungierten Raumes gibt* $(g_{ik}=g_{ki})$, *so daß* $g_{ik}\,x^i\,x^k$ *positiv-definit ist.*

Es ist hierbei übrigens wesentlich, daß die Topologie als normierbar vorausgesetzt wurde. In allgemeinen topologischen Vektorräumen ist Satz 3.3′ nicht wahr.

§ 4. Differentialrechnung in normierten Räumen.

Nach FRÉCHET [1] definieren wir: Eine Abbildung $X = F(x)$ einer offenen Menge M eines normierten Raumes N in einen BANACH-Raum B heißt im Punkte $\mathring{x} \in M$ differenzierbar, wenn es eine beschränkte lineare Abbildung L von N in B gibt, so daß

$$F(\mathring{x} + \delta x) - F(\mathring{x}) = L(\delta x) + o(\delta x)$$

für alle δx mit $(x + \delta x) \in M$ gilt. $\left(o(\delta x)\right.$ ist ein Vektorfeld mit der Eigenschaft $\left.\lim_{||\delta x|| \to 0} \frac{o(\delta x)}{||\delta x||} = 0.\right)$

Der Operator L heißt FRÉCHETsche Ableitung von F an der Stelle $\overset{\circ}{x}$ und soll hier mit $L = \frac{\delta F(\overset{\circ}{x})}{\delta x}$ bezeichnet werden. Er ist eindeutig bestimmt. Gelegentlich werden wir uns der in § 2 eingeführten Indizesschreibweise bedienen und für das FRÉCHETsche Differential schreiben:

$$\delta F^{\alpha} = \frac{\delta F^{\alpha}(\overset{\circ}{x})}{\delta x^{i}} \delta x^{i}.$$

FRÉCHET [1] hat bereits eine Kettenregel bewiesen (wir benutzen abweichend von FRÉCHET die hier verwendete Schreibweise):

Wenn $F(x)$ eine Abbildung von $M \subseteqq N$ auf $M' \subseteqq B$ ist, und $\Theta(X)$ eine Abbildung von $M'' \subseteqq M'$ in einen BANACH-Raum B', dann ist $\Phi(x) = \Theta(F(x))$ in $x = \overset{\circ}{x}$ differenzierbar, wenn $\frac{\delta F(\overset{\circ}{x})}{\delta x}$ und $\frac{\delta \Theta(F(\overset{\circ}{x}))}{\delta X}$ existieren, und es gilt:

$$\frac{\delta \Phi(\overset{\circ}{x})}{\delta x} = \frac{\delta \Theta(F(\overset{\circ}{x}))}{\delta X} \frac{\delta F(\overset{\circ}{x})}{\delta x}.$$

Wenn $F(x)$ an der Stelle $x = \overset{\circ}{x}$ differenzierbar ist, dann gilt

$$\frac{\delta F^{\alpha}(\overset{\circ}{x})}{\delta x^{i}} \delta x^{i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\overset{\circ}{x} + \varepsilon \delta x) - F(\overset{\circ}{x})}{\varepsilon}.$$

Denn

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon \delta x)}{\varepsilon} = \| \delta x \| \lim_{\| \varepsilon \cdot \delta x \| \to 0} \frac{o(\varepsilon \delta x)}{\| \varepsilon \delta x \|} = 0.$$

Dies ist die GÂTEAUXsche Berechnungsweise für das FRÉCHETsche Differential.

Aus der Definition ergibt sich, daß eine in $x = \overset{\circ}{x}$ differenzierbare Funktion daselbst stetig ist.

Außer der Kettenregel von FRÉCHET werden wir noch einige weitere Hilfssätze benötigen.

Hilfssatz 4.1. *(Partielle Differentiation.) Ist $\varphi(x, X)$ eine Funktion, die in offenen Mengen zweier normierter Räume $\{x\}$ und $\{X\}$ definiert ist, und bezeichnen wir mit $\Omega = (x, X)$ die Elemente des topologischen Produkts, so ist $\psi(\Omega) = \varphi(x, X)$ differenzierbar an der Stelle $\overset{\circ}{\Omega} = (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X})$, wenn die „partiellen Ableitungen" $\frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X})}{\delta x}$ und $\frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X})}{\delta X}$ existieren (bei festem $X = \overset{\circ}{X}$ bzw. $x = \overset{\circ}{x}$ zu nehmen), und wenn eine von diesen partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\overset{\circ}{x}$ bzw. $\overset{\circ}{X}$ stetig ist. Es gilt mit $\delta\Omega = (\delta x, \delta X)$:*

$$(*) \qquad \frac{\delta \psi(\overset{\circ}{\Omega})}{\delta \Omega} \delta \Omega = \frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X})}{\delta x} \delta x + \frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X})}{\delta X} \delta X.$$

Beweis. Existieren die partiellen Ableitungen, und ist etwa $\frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, X)}{\delta x}$ stetig in X in einer Umgebung von $\overset{\circ}{X}$, so gilt:

$$\varphi(\overset{\circ}{x} + \delta x, \overset{\circ}{X} + \delta X) - \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X} + \delta X) = \frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X} + \delta X)}{\delta x} \delta x + o(\delta x)$$

$$\varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X} + \delta X) - \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X}) = \frac{\delta \varphi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{X})}{\delta X} \delta X + o(\delta X).$$

Also

$$\psi(\mathring{\Omega}+\delta\Omega)-\psi(\mathring{\Omega})=\frac{\delta\varphi(\mathring{x},\mathring{X}+\delta X)}{\delta x}\,\delta x+\frac{\delta\varphi(\mathring{x},\mathring{X})}{\delta X}\,\delta X+o(\delta x)+o(\delta X)$$

$$=\frac{\delta\varphi(\mathring{x},\mathring{X})}{\delta x}\,\delta x+o(\delta\Omega)+\frac{\delta\varphi(\mathring{x},\mathring{X})}{\delta X}\,\delta X+o(\delta x)+o(\delta X)$$

$$=\frac{\delta\varphi(\mathring{x},\mathring{X})}{\delta x}\,\delta x+\frac{\delta\varphi(\mathring{x},\mathring{X})}{\delta X}\,\delta X+o(\delta\Omega).$$

Denn es ist

$$\lim_{\|\delta\Omega\|\to 0}\frac{\|o(\delta x)+o(\delta X)\|}{\|\delta\Omega\|}\leq\lim_{\|\delta\Omega\|\to 0}\frac{\|o(\delta x)+o(\delta X)\|}{\|\delta x\|+\|\delta X\|}\leq\lim_{\|\delta\Omega\|\to 0}\left\{\frac{\|o(\delta x)\|}{\|\delta x\|}+\frac{\|o(\delta X)\|}{\|\delta X\|}\right\}=0.$$

Umgekehrt gilt, daß aus der Existenz von $\frac{\delta\psi}{\delta\Omega}$ die Existenz von $\frac{\delta\varphi}{\delta x}$, $\frac{\delta\varphi}{\delta X}$ und die Gleichung (*) folgen; man braucht für $\delta\Omega$ nur $(0,\delta X)$ bzw. $(\delta x,0)$ einzusetzen und die Linearität im Zuwachs zu beachten.

Hilfssatz 4.2. *(Produktregel.) $A^\alpha_k(x)\,\xi^k(x)$ ist differenzierbar, wenn A^α_k und ξ^k differenzierbar sind, und es gilt:*

$$\delta(A^\alpha_k\,\xi^k)=(\delta A^\alpha_k)\,\xi^k+A^\alpha_k\,\delta\xi^k.$$

Beweis. Wir betrachten $A^\alpha_k(x)\,\xi^k(x)$ als eine Funktion von x und $\xi(x)$ und verwenden die partielle Differentiation und die Kettenregel; außerdem ist zu beachten, daß $\delta(L\,x)=L(\delta x)$ für konstante lineare Operatoren L gilt. Damit ergibt sich:

$$\frac{\delta\{A^\alpha_k(x)\,\xi^k(x)\}}{\delta x^N}\,\delta x^N=\frac{\delta A^\alpha_k}{\delta x^N}\,\xi^k\,\delta x^N+A^\alpha_k\,\delta\xi^k=\left\{\frac{\overset{\alpha}{k}}{\delta x^N}\,\xi^k+A^\alpha_\lambda\frac{\delta\xi^k}{\delta x^N}\right\}\delta x^N.$$

Das ist die Behauptung.

Korollar 1. *(Allgemeine Produktregel.) Das Differential bzw. die Ableitung eines Elementes von B^m_n, welches als ein Aggregat aus Elementen von adjungierten Räumen gegeben ist, erhält man, indem man je ein Glied durch sein Differential bzw. seine Ableitung ersetzt und alle so entstehenden Ausdrücke addiert.*

Korollar 2. *(Partielle Integration.) Es seien $\eta_i(t)$ und $\xi^i(t)$ differenzierbare Funktionen der reellen Variablen t. Dann gilt*

$$\int_{t_0}^{t_1}\dot{\xi}^i(t)\,\eta_i(t)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\xi^i(t)\,\dot{\eta}_i(t)\,dt=[\eta_i\,\xi^i]_{t_0}^{t_1}\qquad\left(\cdot\ \text{für}\ \frac{d}{dt}\right).$$

Hilfssatz 4.3. *(„Schwacher" Mittelwertsatz der Differentialrechnung.) Wenn $F(x)$ stetig differenzierbar ist für alle $x+t\cdot\delta x$, $0\leq t\leq 1$, dann gilt:*

$$\|F(x+\delta x)-F(x)\|\leq\max_{0\leq\vartheta\leq 1}\left\|\frac{\delta F(x+\vartheta\,\delta x)}{\delta x}\right\|\cdot\|\delta x\|.$$

Beweis. Seien die Argumente x zunächst reelle Zahlen t. (Für deren Differentiale behalten wir die Schreibweise dt bei.) Dann gilt, wenn η ein beliebiges Element des zum Bildraum adjungierten Raumes ist, für die Funktion $\eta F(t)$ der gewöhnliche Mittelwertsatz der Differentialrechnung, da es

sich um eine reellwertige Funktion der reellen Variablen t handelt:

$$\eta F(t_0 + dt) - \eta F(t_0) = \eta \frac{\delta F(t_0 + \vartheta_\eta\, dt)}{dt}\, dt.$$

Da Entsprechendes für alle η gilt, folgt sofort nach Hilfssatz 2.5:

$$\|F(t_0 + dt) - F(t_0)\| \leq \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left\| \frac{\delta F(t_0 + \vartheta\, dt)}{dt} \right\| \cdot |dt|.$$

Wenn die Argumentmenge einem normierten Raum entstammt, ergibt sich der Beweis durch Zurückführung auf den bereits betrachteten Spezialfall; man braucht dazu nur $F(x + t \cdot \delta x) = H(t)$, $t_0 = 0$, $dt = 1$ zu setzen und die FRÉCHETsche Kettenregel anzuwenden:

$$\|F(x + \delta x) - F(x)\| = \|H(0 + 1) - H(0)\|$$
$$\leq \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left\| \frac{\delta H(\vartheta)}{dt} \right\| = \max_{0 \leq \vartheta \leq 1} \left\| \frac{\delta F(x + \vartheta\, \delta x)}{\delta x}\, \delta x \right\|.$$

Hilfssatz 4.4. *Eine in einer Umgebung von $x = \mathring{x}$ stetig differenzierbare Funktion genügt in einer offenen Kugel um $\mathring{x}$ einer* LIPSCHITZ*-Bedingung*

$$\|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

Beweis. Da $\frac{\delta F(x)}{\delta x}$ in einer Umgebung von $\mathring{x}$ stetig ist, gibt es in einer abgeschlossenen Kugel um $\mathring{x}$ eine obere Schranke L für $\frac{\delta F(x)}{\delta x}$ (Hilfssatz 2.2). Nach Hilfssatz 4.3 ergibt sich dann die Behauptung für das offene Innere der Kugel, da dieses konvex ist.

Hilfssatz 4.5. *(Fundamentallemma der Variationsrechnung.) Wenn* $\int_{t_0}^{t_1} g_i(t)\, \xi^i(t)\, dt = 0$ *für alle* $\xi^i(t)$ *mit* $\xi^i(t_0) = \xi^i(t_1) = 0$ *gilt, so ist* $g_i(t) = 0$ *für alle* t.

Beweis. Setzen wir speziell $\xi^i(t) = f(t) \cdot \xi^i$ mit beliebigen ξ^i, $f(t)$ $[f(t_0) = f(t_1) = 0]$, so ist $\int_{t_0}^{t_1} (g_i(t)\, \xi^i)\, f(t)\, dt = 0$. Nach dem klassischen (eindimensionalen) Fundamentallemma folgt $g_i(t)\, \xi^i = 0$, und da ξ^i beliebig war, ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 4.6. *(Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)* [5]. *Wenn die zweite Ableitung von $F(x)$ in $x = \mathring{x}$ eine stetige Funktion von x ist, dann gilt:*

$$\frac{\delta^2 F(\mathring{x})}{\delta x^i\, \delta x^k}\, \delta x^i\, dx^k = \frac{\delta^2 F(\mathring{x})}{\delta x^k\, \delta x^i}\, \delta x^i\, dx^k \quad \text{für alle} \quad \delta x, dx.$$

Beweis. Wenn der Satz nicht richtig wäre, dann gäbe es ein Paar δx, dx mit

$$\Phi^\alpha_{ik}(\mathring{x})\, \delta x^i\, dx^k \neq 0; \qquad \Phi^\alpha_{ik}(x) = \frac{\delta^2 F^\alpha(x)}{\delta x^i\, \delta x^k} - \frac{\delta^2 F^\alpha(x)}{\delta x^k\, \delta x^i}.$$

Dann hätte man die Existenz eines linearen Funktionals η_α mit

$$(**) \qquad \eta_\alpha \Phi^\alpha_{ik}(\mathring{x})\, \delta x^i\, dx^k \neq 0.$$

[5]) Dieser Satz ist von KERNER [2] unter Heranziehung des Integralbegriffs bewiesen worden.

Wir betrachten jetzt die reellwertige Funktion g der beiden reellen Variablen h, k:

$$g(h, k) = \eta_\alpha F^\alpha(\overset{\circ}{x} + h\,\delta x + k\,dx).$$

Nach der GÂTEAUX-Berechnungsweise für das FRÉCHETsche Differential gilt:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial h\,\partial k}\bigg|_{h,k} = \eta_\alpha \frac{\delta^2 F^\alpha(\overset{\circ}{x} + h\,\delta x + k\,dx)}{\delta x^i\,\delta x^k}\,\delta x^i\,dx^k.$$

Aber dies ist in $h, k = 0, 0$ eine stetige Funktion von h, k, also gilt:

$$0 = \frac{\partial^2 g}{\partial h\,\partial k}\bigg|_{0,0} - \frac{\partial^2 g}{\partial k\,\partial h}\bigg|_{0,0} = \eta_\alpha \Phi^\alpha_{ik}(\overset{\circ}{x})\,\delta x^i\,dx^k.$$

Das steht im Widerspruch zur Gleichung (**).

Korollar 1. *Bei Stetigkeit der gemischten Ableitungen einer Funktion mehrerer Variabler ist die Differentiationsreihenfolge vertauschbar.*

Denn man braucht die Variablenräume nur zu ihrem Produktraum zusammenzufassen und Hilfssatz 4.6 anzuwenden.

Hilfssatz 4.7. (EULERS *Formel für homogene Funktionen.*) *Wenn* $F(a \cdot x) = a^n \cdot F(x)$ *für alle* $x \in N$ *und alle reellen* a *gilt, dann ist*

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x^i}\,x^i = n \cdot F(x).$$

Der Beweis läßt sich sinngemäß aus dem Endlichdimensionalen übernehmen (z. B. COURANT, Diff.- u. Int.-R. II, 92).

Hilfssatz 4.8. (EULERsche *Differentialgleichung.*) $F(x, \dot{x})$ *sei eine zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion seiner beiden Argumente. Dann genügt jede Lösung der Variationsaufgabe*

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x})\,dt = 0; \qquad x(t_0) = x(t_1) = 0$$

der Differentialgleichung

$$[I]_x = \frac{\delta F}{\delta x^j} - \frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{x}^j} = 0$$

und umgekehrt.

Beweis. Aus der GÂTEAUX-Berechnungsweise für das Differential ergibt sich

$$0 = \delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\delta F}{\delta x^i}\,\delta x^i + \frac{\delta F}{\delta \dot{x}^j}\,\delta \dot{x}^j\right\} dt, \qquad \delta \dot{x}^i = \frac{d}{dt}\,\delta x^i.$$

Daraus erhält man durch partielle Integration (Hilfssatz 4.2, Korollar 2) wegen $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left\{\frac{\delta F}{\delta x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{x}^j}\right\} \delta x^j\,dt.$$

Nach dem Fundamentallemma (Hilfssatz 4.5) ergibt sich die erste Behauptung, die zweite folgt unmittelbar.

§ 5. Der lokal-lineare Raum und die Definition der Vektoren[6]).

Ein topologischer Raum heißt T-lokal-linear, wenn es eine indizierte Familie von offenen Mengen $\{V_j, j \in J\}$ gibt, welche den Raum völlig überdecken, so daß V_j für jedes $j \in J$ durch einen Homöomorphismus ψ_j aus einer offenen Menge E_j des topologischen Vektorraums T hervorgeht. Die Abbildungen ψ_j^{-1} heißen ein Koordinatensystem S. Ein Koordinatensystem heißt von der Klasse r, wenn die Abbildungen $\psi_j^{-1}\psi_k$ von $\psi_k^{-1}(V_k \cap V_j)$ in $\psi_j^{-1}(V_k \cap V_j)$ r-mal stetig differenzierbar sind; dabei wird vorausgesetzt, daß in T eine Definition der Differenzierbarkeit vorliegt. Zwei Koordinatensysteme S, S' heißen r-äquivalent, wenn die zusammengesetzten Familien $\{V_j, V_k'\}$, $\{\psi_j, \psi_k'\}$ ein Koordinatensystem der Klasse r bilden. Ein T-lokal-linearer Raum der Klasse r ist ein T-lokal-linearer Raum zusammen mit einer r-Äquivalenzklasse von Koordinatensystemen.

Wir nehmen in dieser Arbeit an, daß T ein normierbarer topologischer Vektorraum sei. Es soll zunächst der klassische Aufbau der Tensorrechnung auf lokal-lineare Räume der Klasse r ($r \geq 1$) erweitert werden. (Wir schreiben an Stelle der ψ_j^{-1} usw. jetzt wieder x für die Koordinaten.)

Ist $\bar{x} = \bar{x}(x)$ eine Koordinatentransformation, d. h. ein Übergang von einem Koordinatensystem der r-Äquivalenzklasse zu einem anderen in der Umgebung eines Punktes P, der in einer offenen Umgebung dieses Punktes durch eine Funktion mit Definitions- und Wertebereich in T beschrieben werden kann, so hat man wegen $r \geq 1$:

$$\delta \bar{x}^i = \frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^k}\, \delta x^k \quad \text{und} \quad \delta x^k = \frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^j}\, \delta \bar{x}^j.$$

Die Umkehrung von $\bar{x} = \bar{x}(x)$ bezeichnen wir dabei mit $x = x(\bar{x})$. Nach der FRÉCHETschen Kettenregel hat man:

$$\frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^k}\frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^j} = \frac{\delta x^i}{\delta \bar{x}^k}\frac{\delta \bar{x}^k}{\delta x^j} = \delta_j^i,$$

wobei δ_k^i das in § 2 eingeführte Symbol für den Einheitsoperator ist. Um die in § 4 angegebenen Resultate der Differentialrechnung verwenden zu können, wollen wir jetzt noch die Vollständigkeit des Koordinatenraums verlangen. Dieser kann also als ein BANACH-Raum B aufgefaßt werden.

Jetzt betrachten wir ein beliebiges Koordinatensystem x in der Umgebung eines beliebigen, aber fürs erste festgehaltenen Punktes P (Koordinate x). Dann bilden wir für alle $\xi \in B$ und alle Koordinatentransformationen $\bar{x}(x)$

$$\bar{\xi}^i = \frac{\delta \bar{x}^i(x)}{\delta x^k}\, \xi^k.$$

Wir nennen die vermöge dieser linearen Homöomorphismen zwischen B und B erzeugten $\bar{\xi}$ die Koordinatendarstellungen des im x-Koordinatensystem

[6]) Im ersten Teil dieses Paragraphen lehnen wir uns in der Formulierung möglichst eng an die Darstellung für den endlichdimensionalen Fall bei STEENROD, The topology of fibre bundles, 20—21 an; dadurch soll deutlich werden, daß es sich hier um eine echte Verallgemeinerung der klassischen Geometrie handelt.

durch ξ dargestellten kontravarianten Vektors. Die Menge der kontravarianten Vektoren läßt sich als linearer topologischer Raum auffassen, da man die Linearitätsrelationen und die Topologie von irgendeiner Koordinatendarstellung übernehmen kann. Da $\frac{\delta \bar{x}}{\delta x}$ und $\frac{\delta x}{\delta \bar{x}}$ beschränkte lineare Abbildungen von B auf sich sind, sind diese Definitionen unabhängig von der speziellen Wahl der Darstellung. Diesen Raum der kontravarianten Vektoren bezeichnen wir als den Tangentialraum $\mathfrak{T}^1(P)$ im Punkte P. Er ist zu B linear homöomorph.

In entsprechender Weise führt man den Tangentialraum $\mathfrak{T}_1(P)$ der kovarianten Vektoren ein, die durch Elemente η_i von B_1 dargestellt werden, wobei für diese Koordinatendarstellungen der kovarianten Vektoren das Transformationsgesetz gelten soll:

$$\bar{\eta}_i = \frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^i} \eta_k .$$

$\mathfrak{T}_1(P)$ ist zu B_1 linear homöomorph.

Als Invarianten bezeichnet man reellwertige Funktionen (Funktionale) $\varphi(x)$ mit $\overline{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$. Für den Zusammenhang zwischen Invarianten und Vektoren gelten einige oft gebrauchte Regeln:

Hilfssatz 5.1. *Das Produkt eines kovarianten und eines kontravarianten Vektors im selben Punkte ist eine Invariante.*

Beweis.

$$\bar{\eta}_i \bar{\xi}^i = \frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^i} \frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^j} \xi^j \eta_k = \delta_j^k \xi^j \eta_k = \eta_i \xi^i .$$

Es gelten auch die beiden möglichen Umkehrungen:

Hilfssatz 5.2. *Ergibt die Anwendung der Darstellungen η_j einer linearen Funktionaloperation auf die Darstellungen jedes kontravarianten Vektors eine Invariante, so stellt η_j einen kovarianten Vektor dar.*

Beweis. Es ist also vorausgesetzt:

$$\bar{\eta}_j \bar{\xi}^j = \bar{\eta}_j \frac{\delta \bar{x}^j}{\delta x^k} \xi^k = \eta_k \xi^k \quad \text{für alle} \quad \xi^k .$$

Daraus ergibt sich unter Anwendung der Gleichheitsdefinition für lineare Funktionale, da ξ^k den ganzen Raum B durchläuft:

$$\bar{\eta}_j \frac{\delta \bar{x}^j}{\delta x^k} = \eta_k .$$

Dies kann von rechts mit $\frac{\delta x^k}{\delta \bar{x}^l}$ multipliziert werden, und daraus ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 5.3. *Ergibt die Anwendung der Darstellungen jedes kovarianten Vektors auf die Darstellungen eines geometrischen Objekts, welche in B liegen, stets eine Invariante, so ist das geometrische Objekt ein kontravarianter Vektor.*

(Ein geometrisches Objekt ist eine Größe, deren Koordinatendarstellungen einem Transformationsgesetz unterliegen.)

Beweis. Es gilt also $\bar{\eta}_j \bar{\xi}^j = \eta_i \frac{\delta x^i}{\delta \bar{x}^k} \bar{\xi}^k = \eta_i \xi^i$ für alle η_i. Nach Hilfssatz 2.7 folgt die Behauptung unter Beachtung der Tatsache, daß die Koordinatendarstellungen aller kovarianten Vektoren in jedem Koordinatensystem ganz B_1 durchlaufen.

§ 6. Tensorrechnung in lokal-linearen Räumen.

Für den zugrunde liegenden geometrischen Raum gelten die Voraussetzungen aus § 5.

Definition 1. Ein Element $T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \in B^m_n$ heißt Koordinatendarstellung eines Elementes von $\mathfrak{T}^m_n(P)$, wenn es sich beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem $\bar{x}(x)$ nach folgendem Gesetz transformiert:

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} = \frac{\delta \bar{x}^{i_1}}{\delta x^{l_1}} \cdots \frac{\delta \bar{x}^{i_m}}{\delta x^{l_m}} T^{j_1 \dots j_m}_{l_1 \dots l_n} \frac{\delta x^{l_1}}{\delta \bar{x}^{k_1}} \cdots \frac{\delta x^{l_n}}{\delta \bar{x}^{k_n}}.$$

Wir nennen die geometrischen Objekte, welche Elemente des zu B^m_n linear homöomorphen Raumes $\mathfrak{T}^m_n(P)$ sind, m-fach kontravariante, n-fach kovariante Tensoren. Die Räume $\mathfrak{T}^m_n(P)$ bezeichnen wir als Tangentialräume höherer Ordnung.

Im Endlichdimensionalen pflegt man der entsprechenden Definition des Tensors eine zweite zur Seite zu stellen, bei der die Komponenten eines Tensors als Koeffizienten einer invarianten Multilinearform aufgefaßt werden. Bei der entsprechenden Definition müssen wir hier die bei der Einführung von B^m_n gemachte Einschränkung beachten.

Definition 2. Eine invariante Multilinearform in kontravarianten und kovarianten Vektoren, welche durch ein Element eines höheren adjungierten Raumes gegeben ist, stellt einen Tensor dar.

Hilfssatz 6.1. *Definition 1 und Definition 2 sind äquivalent.*

Daß die zweite Definition aus der ersten folgt, ergibt sich durch Einsetzen der Transformationsformeln.

Der Beweis für die Umkehrung mag am Beispiel T^{ij}_k durchgeführt werden:

$$\xi_i \eta_j T^{ij}_k \varrho^k = \xi_i \eta_j \frac{\delta \bar{x}^i}{\delta x^r} \frac{\delta \bar{x}^j}{\delta x^s} \bar{T}^{rs}_t \frac{\delta x^t}{\delta \bar{x}^k} \varrho^k.$$

Dies gilt für alle ξ, η, ϱ aus B bzw. B_1, denn es treten in jedem Koordinatensystem alle Elemente von B bzw. B_1 als Koordinatendarstellungen kontravarianter bzw. kovarianter Vektoren auf. Daraus ergibt sich nach der Definition der Gleichheit in Räumen B^m_n (§ 2) die Behauptung.

Definition 2 ermöglicht die übliche einfache Einführung der tensoriellen Operationen.

Da die Räume $\mathfrak{T}^m_n(P)$ zu B^m_n linear homöomorph sind, sind Addition von Tensoren gleicher Stufenzahlen und Multiplikation mit Skalarfaktoren erklärt; diese Einführung ist gleichbedeutend mit der Erklärung dieser Operationen durch Ausführung der entsprechenden Operationen an den invarianten Multilinearformen.

Die Multiplikation von Tensoren beliebigen (auch verschiedenen) Charakters wird durch die Multiplikation der entsprechenden invarianten Multilinearformen erklärt. Die Normen der Koordinatendarstellungen multiplizieren sich dabei ebenfalls, denn:

$$\|T_k^i\, S_r^{jl}\| = \sup \frac{|\eta_i\, T_k^i\, \xi^k\, x_j\, y_l\, S_r^{jl}\, z^r|}{\|\eta\| \cdot \|\xi\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|z\|}$$

$$= \sup \frac{|\eta_i\, T_k^i\, \xi^k|}{\|\eta\| \cdot \|\xi\|} \cdot \sup \frac{|x_j\, y_l\, S_r^{jl}\, z^r|}{\|x\| \cdot \|y\| \cdot \|z\|} = \|T_k^i\| \cdot \|S_r^{jl}\|.$$

Die Überschiebung von $T_{k_1 \dots k_\nu \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}$ und $S_{j_1 \dots j_s}^{l_1 \dots l_\varrho \dots l_r}$ wird erklärt durch:

$$T_{k_1 \dots k_\nu \dots k_m}^{i_1 \dots i_m}\, \xi^{k_\nu}, \qquad \xi^{k_\nu} = S_{j_1 \dots j_s}^{l_1 \dots k_\nu \dots l_r}\, \eta_{l_1 \dots \varrho_{l_r}}\, y^{j_1} \dots z^{j_s}.$$

Dabei gilt für die Normen:

$$\|T_{k_1 \dots k \dots k_n}^{i_1 \dots i_m}\, S_{j_1 \dots j_s}^{l_1 \dots k \dots l_r}\| \leq \|T_{\dots}^{\dots}\| \cdot \|S_{\dots}^{\dots}\|.$$

Eine Erklärung der Verjüngung von Tensoren ist im allgemeinen nicht möglich; denn jedenfalls müßte man von ihr (wie von allen anderen Begriffsbildungen) verlangen, daß sie im Endlichdimensionalen in das Übliche übergeht. Dort ergibt aber δ_i^i die Dimensionszahl des Raumes, und beim dimensionsfreien Aufbau muß man daher auf die Erklärung der Verjüngung in dieser Allgemeinheit verzichten. Doch ist eine Verjüngung immer dann möglich, wenn ein Tensor das Produkt zweier Tensoren niedrigerer Stufenzahl ist, von denen mindestens einer einen oberen, der andere einen unteren Index trägt:

$$T_k^{ik} = t_k^i\, \xi^k \quad \text{wenn} \quad T^{ik} = t_j^i\, \xi^k.$$

Die Verjüngung ist in diesem Falle keine neue Operation, sondern bedeutet einen Übergang von der tensoriellen Multiplikation zur Überschiebung.

Diese Einschränkung der Verjüngung auf spezielle Fälle ist ein Beispiel dafür, daß der dimensionsfreie Aufbau der Geometrie einen Verlust an Invarianten bedingt. Ein weiteres Beispiel ist die Tensordichte, die wegen des Fehlens einer Determinante nicht erklärbar sein wird. Auch der im Endlichdimensionalen oft verwendete ε-Tensor ist nicht erklärbar, da die Zahl seiner Indizes mit der Dimensionszahl zusammenhängt.

Wir betrachten nun noch Tensorfelder und ihre Differentiation. Ein Tensorfeld ist dargestellt durch eine Abbildung einer offenen Menge aus B (den Koordinaten einer offenen Menge V_j des Raumes) in den BANACH-Raum B_n^m. Tensorfelder fallen also unter die in § 4 behandelten Abbildungen, und der Begriff der Differenzierbarkeit hat für sie einen Sinn. Wir schreiben

$$\frac{\delta T_{\dots}^{\dots}}{\delta x^j} = T_{\dots,j}^{\dots},$$

da diese Ableitung in B_{n+1}^m liegt, wenn sie auch im allgemeinen keinen Tensor darstellt. Letzteres gilt aber für $\varphi_{,i}$, den Gradienten einer Invariante φ, da $\delta\varphi = \varphi_{,i}\, \delta x^i$ eine invariante Linearform im kontravarianten Vektor δx^i ist.

Die bei uns vorgenommene Einführung des Tensorbegriffs ist wesentlich verschieden von der MICHALschen Definition (z. B. [4, 546—547]). MICHAL postuliert die Existenz eines von der Norm unabhängigen Skalarproduktes $[\xi, \eta]$ in B. (Daß es solche Skalarprodukte wirklich immer gibt, ist in NT, Satz 2 enthalten.) Kontravariante Vektoren werden bei MICHAL wie üblich definiert, kovariante Vektoren sind Elemente von B mit einem Transformationsgesetz, welches zu dem der kontravarianten Vektoren bezüglich $[.,.]$ adjungiert ist. Da die Ableitungen von Skalarfeldern im allgemeinen lineare Funktionale sind, und da sich B_1 im allgemeinen nicht isomorph auf B abbilden läßt, sind bei MICHAL die Gradienten invarianter Skalarfelder im allgemeinen keine kovarianten Vektorfelder. Außerdem kann MICHAL Tensoren höherer Stufe überhaupt nicht einführen. Auch KERNER [1] kann keine Tensoren von höherer als erster kontravarianter Stufenzahl erklären.

Unsere Einführung vermeidet diese Mängel, und durch Verwendung der in § 2 eingeführten Indizesschreibweise wird ein Vergleich mit der klassischen endlichdimensionalen Geometrie erleichtert.

Literatur.

BANACH, S.: [1] Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932. — BOURBAKI, N.: [1] Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [2] Topologie générale, Kap. IX. Paris 1948. — CLARKSON, J. A.: [1] Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 396—414 (1936). — DIRAC, P. A. M.: [1] Quantum mechanics, 3. Aufl. Oxford 1947. — FRÉCHET, M.: [1] La différentielle dans l'analyse générale. Ann. sci. Ecol. norm. sup. **42**, 293—323 (1925). — GREENWOOD, J. A.: [1] On the curvatures of certain curves in function space. Ann. of Math. (2) **36**, 157—166 (1935). — HAUSDORFF, F.: [1] Zur Theorie der linearen metrischen Räume. J. reine angew. Math. **167**, 294—311 (1932). — HILLE, E.: [1] Functional analysis and semi-groups. New York 1948. — KERNER, M.: [1] Abstract differential geometry. Compositio Math. **4**, 308—341 (1937). — [2] Die Differentiale in der allgemeinen Analysis. Ann. of Math. (2) **34**, 546—572 (1933). — [3] Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis. Prace mat.-fiz. **40**, 47—67 (1932). — KOWALEWSKI, G.: [1] Sur les formules de Frenet dans l'espace fonctionel. C. R. Acad. Sci. Paris **151**, 1338—1340 (1910). — LAUGWITZ, D.: [NT] Über Normtopologien in linearen Räumen. Arch. Math. **4**, 455—460 (1953). — LÖWIG, H.: [1] Über die Dimension linearer Räume. Studia math. **5**, 18—23 (1934). — MACKEY, G.W.: [1] On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 155—207 (1945). — MICHAL, A. D.: [1] Affinely connected function space manifolds. Amer. J. Math. **50**, 473—517 (1928). — [2] Riemannian differential geometry in abstract spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 526—529 (1935). — [3] Differential calculus in linear topological spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, 340—342 (1938). — [4] General differential geometries and related topics. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 529—563 (1939). Mit Bibliographie. — MOISIL, G. C.: [1] La mécanique analytique des systèmes continus. Diss. Bukarest 1929. — SOBCZYK, A.: [1] Projections in Minkowski and Banach spaces. Duke Math. J. **8**, 78—106 (1941). — VITALI, G.: [1] Geometria nello spazio hilbertiano. Bologna 1929. — WEYL, H.: [1] Raum-Zeit-Materie, 3. Aufl. Berlin 1919.

Göttingen, Nußanger 70.

(Eingegangen am 22. Juni 1954.)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 119—133 (1954)

Über Interpolation in regelmäßig verteilten Punkten mit Nebenbedingungen*).

Von
DIETER GAIER.

1. Einleitung. Vorgegeben sei eine (im folgenden meist analytische) geschlossene JORDAN-Kurve C in der komplexen z-Ebene, und D bezeichne ihr Inneres. Die vorläufig beliebige komplexwertige Funktion $f(z)$ sei für $z \in C$ erklärt, und $\{G_n\}$ sei eine Folge von Gruppen regelmäßig verteilter Interpolationspunkte z_{nk}, die sämtlich auf C gelegen sind:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} G_1 : z_{11}, \\ G_2 : z_{21}, z_{22}, \\ \dots \\ G_n : z_{n1}, z_{n2}, \dots, z_{nn}, \\ \dots \end{cases}$$

Auf C regelmäßig verteilte Punktgruppen wurden von FEJÉR [3] eingeführt und sind wie folgt erklärt. Man bilde das Äußere von C durch die analytische Funktion

$$(1.2) \qquad z = \psi(w) = c\,w + c_0 + \frac{c_1}{w} + \cdots \qquad (c \neq 0)$$

eineindeutig auf $|w| > 1$ ab, wobei $z = \infty$ und $w = \infty$ einander entsprechen; $|c|$ ist die Kapazität von C. Die Abbildungsfunktion $z = \psi(w)$ ist bei Annäherung an $|w| = 1$ noch stetig, kann also für $w = w_{nk} = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ erklärt werden, und man wähle nun für die Punkte (1.1) $z_{nk} = \psi(w_{nk})$.

Verschiedene Autoren (z. B. FEJÉR [3], WALSH [10], CURTISS [1]) haben in früheren Untersuchungen zu der Funktion $f(z)$ das eindeutige Polynom $L_n(z)$ vom Grade $\leq n-1$ gebildet, das $f(z)$ in den Punkten der Gruppe G_n interpoliert, und sodann das Verhalten der Folge $\{L_n(z)\}$ $(z \in D)$ für $n \to \infty$ studiert. In dieser Arbeit wollen wir nun Polynome $p_n(z)$ betrachten, die außer den Bedingungen $p_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$ noch gewisse an die Ableitung von $p_n(z)$ in den z_{nk} gestellte Forderungen erfüllen. Im folgenden ist also $p_n(z)$ das eindeutige Polynom vom Grade $\leq 2n-1$, das in den Punkten der Gruppe G_n den Bedingungen

$$(1.3) \qquad p_n(z_{nk}) = f(z_{nk}), \quad p_n'(z_{nk}) = \alpha_{nk}$$

*) Diese Arbeit wurde mit Unterstützung der Office of Naval Research of the United States Government durchgeführt, während der Verfasser der Harvard-Universität (Cambridge/USA.) angehörte.

genügt, wobei die α_{nk} vorgegebene Zahlen sind, die unser Interpolationsverfahren bestimmen, und es soll das Verhalten von $\{p_n(z)\}$ für $n \to \infty$ untersucht werden.

Dreierlei Möglichkeiten für die Wahl der α_{nk} werden behandelt.

Wird von $f(z)$ lediglich eigentliche R-Integrierbarkeit auf C angenommen, so kann man $\alpha_{nk} = 0$ für alle n und k setzen, in Analogie zu einem Verfahren von JACKSON bei trigonometrischer Interpolation (JACKSON [7], ZYGMUND [12]). Wir lassen allgemeiner eine beliebige Folge

$$\alpha_{nk} = o\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad \text{gleichmäßig in } k,$$

zu und bezeichnen die so erhaltenen Interpolationspolynome mit $J_n(z)$. Sie konvergieren für $n \to \infty$ und $z \in D$ gegen

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{1.4}$$

Zu einer zweiten Wahl der α_{nk} kommt man, falls $f(z)$ $(z \in C)$ stetige Randfunktion einer in D regulären Funktion $f(z)$ ist. Bezeichnet nämlich $T_n(z)$ das zu $f(z)$ $(z \in \overline{D})$ gehörige eindeutige TCHEBYCHEFFsche Polynom vom Grade $\leq 2n-1$, so nehme man $\alpha_{nk} = T_n'(z_{nk})$, ein Verfahren, das FEJÉR ([4], S. 335) bereits zur Interpolation im Reellen verwandt hat; die sich so ergebenden $p_n(z)$ bezeichnen wir mit $F_n(z)$. Sie konvergieren für $n \to \infty$ und $z \in D$ gegen $f(z)$, und unter zusätzlichen Annahmen über $f(z)$ lassen sich weiterhin Aussagen machen über die Stärke der Konvergenz von $F_n(z) \to f(z)$ $(z \in D)$, sowie über Konvergenz der $F_n(z)$ für $z \in C$.

Ist schließlich $f(z)$ auf C regulär, so wählen wir $\alpha_{nk} = f'(z_{nk})$ und bezeichnen die entsprechenden $p_n(z)$ mit $H_n(z)$. Auch sie konvergieren, wie die $J_n(z)$, für $n \to \infty$ und $z \in D$ gegen (1.4), während auf C und außerhalb C im allgemeinen Divergenz auftritt. Ist jedoch $f(z)$ sogar im abgeschlossenen Innern von C regulär, so konvergieren die $H_n(z)$ in $\overline{D}$ maximal gegen $f(z)$, und unter zusätzlichen Annahmen über $f(z)$ lassen sich Aussagen machen über die Stärke der Konvergenz von $H_n(z) \to f(z)$ für $z \in \overline{D}$.

Wir beschließen die Arbeit mit der Angabe einiger Gegenbeispiele, bei denen jeweils Funktionen $f(z)$, die in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig sind, in den Punkten $z_{nk} = r e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots;\ 0 < r \leq 1)$ interpoliert werden. Dabei interessieren wir uns für Divergenz und Nicht-BOREL-Limitierbarkeit der Folgen $\{L_n(z)\}$, $\{J_n(z)\}$ und $\{H_n(z)\}$ für Punkte z auf $|z| = 1$.

2. Hilfsformeln. Es sei C eine analytische JORDAN-Kurve der z-Ebene, und z_{nk} seien die auf C gelegenen Punkte (1.1). Für das den Bedingungen (1.3) genügende Polynom $p_n(z)$ vom Grade $\leq 2n-1$ liefert die LAGRANGE-HERMITEsche Formel die Darstellung

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk})\, g_{nk}(z) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk}\, h_{nk}(z) \tag{2.1}$$

mit

$$(2.2)\quad \begin{cases} g_{nk}(z) = \left[1 - \dfrac{\omega_n''(z_{nk})}{\omega_n'(z_{nk})}(z - z_{nk})\right](l_{nk}(z))^2, \quad h_{nk}(z) = (z - z_{nk})\,(l_{nk}(z))^2, \\ \omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_{nk}), \qquad l_{nk}(z) = \dfrac{\omega_n(z)}{\omega_n'(z_{nk})\,(z - z_{nk})}. \end{cases}$$

Wir benötigen Aussagen über das Verhalten von $\omega_n(z)$ $(z \in D)$, $\omega_n'(z_{nk})$, $\omega_n''(z_{nk})$ für $n \to \infty$.

Hilfssatz 1. *Für ein $\delta > 0$ gilt gleichmäßig in $|w| > 1 - \delta$*

$$(2.3)\qquad \Phi_n(w) = \frac{\omega_n(\psi(w))}{c^n(w^n - 1)} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Für $w = e^{i\varphi}$ gilt gleichmäßig in k

$$(2.4)\qquad \frac{\omega_n'(z_{nk})}{i\,n\,c^n}\,\frac{d\,\psi\left(e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)}{d\varphi} \to 1 \qquad (n \to \infty),$$

$$(2.5)\qquad \frac{\omega_n''(z_{nk})}{n^2\,c^n}\left[\frac{d\,\psi\left(e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)}{d\varphi}\right]^2 \to -1 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Da C eine analytische JORDAN-Kurve ist, ist $\psi(w)$ und daher $\Phi_n(w)$ für ein $\delta > 0$ in $|w| > 1 - 2\delta$ regulär. Nach CURTISS ([1], S. 463) gilt gleichmäßig für $|w| = 1 - \delta$ die Relation $\omega_n(\psi(w))/c^n \to -1$, also gilt (2.3) für $|w| = 1 - \delta$ und daher gleichmäßig für $|w| \geq 1 - \delta$.

Differenziert man (2.3) für $w = e^{i\varphi}$ nach w, so erhält man für $|w| = 1$

$$(2.6)\qquad \frac{-n\,w^{n-1}}{c^n(w^n - 1)^2}\,\omega_n(\psi(w)) + \frac{1}{c^n(w^n - 1)}\,\omega_n'(\psi(w))\,\frac{1}{i\,w}\,\frac{d\psi(w)}{d\varphi} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Nach Multiplikation von (2.6) mit $(w^n - 1)\,w/n$ ergibt sich

$$-\Phi_n(w)\,w^n + \frac{\omega_n'(\psi(w))}{i\,n\,c^n}\,\frac{d\psi(w)}{d\varphi} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

also, wenn man $w = w_{nk}$ setzt, gerade die Relation (2.4).

Die Formel (2.5) erhält man auf ähnliche Weise durch zweimalige Differentiation von (2.3), wenn man die dann entstehende Beziehung mit $(w^n - 1)\,w^2/n^2$ durchmultipliziert und (2.6) nochmals berücksichtigt.

3. Die Polynome $J_n(z)$. Die Funktion $f(z)$ sei auf der analytischen JORDAN-Kurve C eigentlich R-integrierbar, und es sei $J_n(z)$ das Polynom vom Grade $\leq 2n - 1$, das in den Punkten (1.1) auf C den Bedingungen $J_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$, $J_n'(z_{nk}) = \alpha_{nk}$ genügt, wobei α_{nk} eine Folge von Zahlen mit $|\alpha_{nk}| \leq \varepsilon_n \cdot \dfrac{n}{\log n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots;\ \varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty)$ bedeutet.

Satz 1. *Für $z \in D$ gilt*

$$J_n(z) \to \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) \qquad (n \to \infty),$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich B von D.

Dies verallgemeinert ein Resultat von LOSINSKY ([9], S. 319), der den Fall $C: |z|=1$, $\alpha_{nk}=0$ für alle n und k, und $f(z)$ analytisch in $|z|<1$, stetig in $|z|\leq 1$ behandelte.

Beweis. Wir schätzen für $z\in C$ zunächst den zweiten Term in der Darstellung von $J_n(z)$ gemäß (2.1) ab:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}h_{nk}(z)\right| \leq \varepsilon_n\cdot\frac{n}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\omega_n(\psi(w))}{c^n(w^n-1)}\,\frac{i\,n\,c^n}{\omega_n'(z_{nk})\,\psi^{\cdot}}\right|^2\times$$

$$\times\frac{|\psi^{\cdot}|^2\,|w^n-1|\left|\dfrac{w-w_{nk}}{z-z_{nk}}\right|}{n^2}\left|\frac{w^n-1}{w-w_{nk}}\right|$$

$$\leq \varepsilon_n\cdot\frac{n}{\log n}M_1M_2\frac{M_3^{\cdot}}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{w^n-1}{w-w_{nk}}\right| \text{ [1]}$$

$$\leq \varepsilon_n\cdot\frac{n}{\log n}M_1M_2\frac{M_3}{n^2}\,n\log n=o(1),$$

also strebt dieser Term gleichmäßig für $z\in\overline{D}$ gegen Null für $n\to\infty$. Dabei wurde, wie auch im folgenden, $\psi^{\cdot}=\dfrac{d\psi\left(e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)}{d\varphi}$ gesetzt. Der vom Summand 1 in $g_{nk}(z)$ herrührende Beitrag wird für $z\in D$ ganz ähnlich beurteilt:

$$(3.1)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n}f(z_{nk})\,(l_{nk}(z))^2\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(z_{nk})\,\frac{h_{nk}(z)}{z-z_{nk}}\right|\leq\frac{M}{\delta}\sum_{k=1}^{n}|h_{nk}(z)|=o(1)\quad(n\to\infty)$$

gleichmäßig für $z\in B$; hierin wurde $|f(z)|\leq M$ $(z\in C)$ und $|z-z_{nk}|\geq\delta$ $(z\in B)$ angenommen.

Somit haben wir für $z\in B$

$$(3.2)\qquad\begin{cases} J_n(z)=o(1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\psi(w_{nk}))}{\psi(w_{nk})-z}\,\frac{(\omega_n(z))^2\,\omega_n''(z_{nk})}{(\omega_n'(z_{nk}))^3} \\ \quad=o(1)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\psi(w_{nk}))}{\psi(w_{nk})-z}\left[\frac{\omega_n(z)}{-c^n}\right]^2\frac{-\omega_n''(z_{nk})\,\psi^{\cdot 2}}{n^2c^n}\left[\frac{i\,n\,c^n}{\omega_n'(z_{nk})\,\psi^{\cdot}}\right]^3\psi^{\cdot}\cdot\frac{2\pi}{n}, \end{cases}$$

was auf Grund von (2.3) bis (2.5) für $n\to\infty$ und $z\in B$ gleichmäßig gegen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{f(\psi(e^{i\varphi}))}{\psi(e^{i\varphi})-z}\,\frac{d\psi(e^{i\varphi})}{d\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=f_1(z)$$

strebt, wie in Satz 1 behauptet ist.

4. Die Polynome $F_n(z)$. Nun sei $f(z)$ eine innerhalb der analytischen JORDAN-Kurve C reguläre, im abgeschlossenen Bereich $\overline{D}$ stetige Funktion, und $T_n(z)$ bezeichne das zu $f(z)$ gehörige TCHEBYCHEFF-Polynom vom Grade

[1]) Eine Abschätzung der Summe findet man bei CURTISS ([1], S. 468), wo allerdings ein Faktor n fehlt; vgl. auch JACKSON ([8], S. 119/120).

$\leq 2n-1$[2]); der Approximationsfehler sei

$$E_n = \max_{z\in\overline{D}} |f(z) - T_n(z)|. \tag{4.1}$$

Um Polynome $p_n(z)$ zu erhalten, die in den Punkten (1.1) von C Bedingungen der Form (1.3) erfüllen, und die sich auf Stärke der Konvergenz $p_n(z)\to f(z)$ $(z\in\overline{D})$ untersuchen lassen, ist es zweckmäßig, in (1.3) die Wahl $\alpha_{nk} = T_n'(z_{nk})$ zu treffen; diese Polynome nennen wir $F_n(z)$.

Satz 2. *Zu jedem abgeschlossenen Teilbereich B von D gibt es eine Konstante $M = M(B, C)$, für die*

$$|f(z) - F_n(z)| \leq M E_n \quad (z\in B;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

gilt. Ferner gibt es eine Konstante $N = N(C)$, für die

$$|f(z) - F_n(z)| \leq N E_n \log n \quad (z\in\overline{D};\ n = 2, 3, \ldots) \tag{4.3}$$

gilt.

Genügt $f^{(p)}(z)$ $(p = 0, 1, \ldots)$ für $z\in\overline{D}$ einer LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung α $(0<\alpha\leq 1)$, so gilt demnach

$$|f(z) - F_n(z)| = O(n^{-p-\alpha}) \ (z\in B) \quad \text{und} \quad |f(z) - F_n(z)| = O(\log n\, n^{-p-\alpha}) \ (z\in\overline{D});$$

denn in diesem Falle hat man (CURTISS [2], S. 873)

$$E_n = O(n^{-p-\alpha}).$$

Beweis von Satz 2. Die Polynome $T_n(z)$ und $F_n(z)$ gestatten nach (2.1) die Darstellung

$$T_n(z) = \sum_{k=1}^{n} T_n(z_{nk})\, g_{nk}(z) + \sum_{k=1}^{n} T_n'(z_{nk})\, h_{nk}(z)$$

$$F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f(z_{nk})\, g_{nk}(z) + \sum_{k=1}^{n} T_n'(z_{nk})\, h_{nk}(z).$$

Also ist

$$\left\{\begin{aligned} |F_n(z) - T_n(z)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} [f(z_{nk}) - T_n(z_{nk})]\, g_{nk}(z)\right| \\ &\leq E_n \sum_{k=1}^{n} |g_{nk}(z)| = E_n N_n(z) \quad (z\in\overline{D}), \end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

und wir haben das Verhalten von $N_n(z)$ für $z\in B$ bzw. $z\in C$ und $n\to\infty$ zu untersuchen.

Zunächst folgt aus Hilfssatz 1, daß für $z\in C$, d. h. $|w| = |\psi^{-1}(z)| = 1$, und eine von z unabhängige Konstante M_1

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n'(z_{nk})\,(z - z_{nk})}\right|^2 &= \left|\frac{\omega_n(\psi(w))}{c^n(w^n - 1)}\,\frac{i\,n\,c^n}{\omega_n'(z_{nk})\,\psi'}\,\frac{w - w_{nk}}{z - z_{nk}}\,\frac{\psi'}{n}\,\frac{w^n - 1}{w - w_{nk}}\right|^2 \\ &\leq \frac{M_1}{n^2}\left|\frac{w^n - 1}{w - w_{nk}}\right|^2 \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

[2]) Das heißt, daß $\max_{z\in\overline{D}} |f(z) - T_n(z)| \leq \max_{z\in\overline{D}} |f(z) - \pi_n(z)|$ ist für alle Polynome $\pi_n(z)$ vom Grade $\leq 2n-1$.

ist, so daß der vom Summanden 1 in $g_{nk}(z)$ herrührende Beitrag zu $N_n(z)$ $(z \in C)$ durch

$$\frac{M_1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 = M_1$$

abgeschätzt werden kann. Dabei machten wir Gebrauch von

$$\begin{aligned} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 &= \left(\frac{1 - (\overline{w}\, w_{nk})^n}{1 - (\overline{w}\, w_{nk})} \right) \left(\frac{1 - (w\, \overline{w_{nk}})^n}{1 - (w\, \overline{w_{nk}})} \right) \\ &= \left(1 + (\overline{w}\, w_{nk}) + \cdots + (\overline{w}\, w_{nk})^{n-1}\right) \left(1 + (w\, \overline{w_{nk}}) + \cdots + (w\, \overline{w_{nk}})^{n-1}\right) \\ &= 1 + (w\, \overline{w_{nk}}) + \cdots + (w\, \overline{w_{nk}})^{n-1} \\ &\quad + \overline{w}\, w_{nk} + 1 + \cdots + (\overline{w}\, w_{nk})\, (w\, \overline{w_{nk}})^{n-1} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (\overline{w}\, w_{nk})^{n-1} + \cdots + 1, \end{aligned}$$

was für $k = 1, 2, \ldots, n$ aufsummiert gerade n^2 ergibt. Da weiterhin für beliebige z

$$(4.6) \quad \left| \frac{\omega_n''(z_{nk})}{\omega_n'(z_{nk})} (z - z_{nk}) \right| = \left| \frac{\omega_n''(z_{nk})\, \psi'^2}{n^2 c^n} \right| \left| \frac{i n c^n}{\omega_n'(z_{nk})\, \psi'} \right| \frac{n\, |z - z_{nk}|}{|\psi'|} \leq M_2 n\, |z - z_{nk}|$$

gilt, haben wir für $z \in C$, d.h. $|w| = 1$,

$$(4.7) \quad \begin{cases} N_n(z) \leq M_1 + \dfrac{M_1 M_2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 |z - z_{nk}| \\ \qquad \leq M_1 + \dfrac{M_1 M_2\, |w^n - 1|}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_{nk}}{w - w_{nk}} \right| \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right| \\ \qquad \leq M_1 + \dfrac{2 M_1 M_2 M_3}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right| \leq M_1 + \dfrac{2 M_1 M_2 M_3 M_4}{n} n \log n. \end{cases}$$

Nun gilt aber

$$(4.8) \quad |f(z) - F_n(z)| \leq |f(z) - T_n(z)| + |F_n(z) - T_n(z)| \leq E_n + E_n N_n(z) \quad (z \in \overline{D}),$$

woraus mit (4.7) die Gültigkeit von (4.3) für $z \in C$, also auch für $z \in \overline{D}$ folgt.

Liegt z in B, so wählen wir ein $\delta > 0$ derart, daß $\psi(w)$ in $|w| \geq 1 - \delta$ regulär ist und B in der von $z = \psi(w)$ $(|w| = 1 - \delta)$ beschriebenen JORDAN-Kurve C' gelegen ist. Für $z \in C'$, d.h. $|w| = 1 - \delta$, gilt dann vermöge (4.5)[3]) und (4.6)

$$N_n(z) \leq M_1 + \frac{M_1 M_2}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{w^n - 1}{w - w_{nk}} \right|^2 |z - z_{nk}| \leq M_1 + \frac{M_1 M_2}{n} \sum_{k=1}^{n} M_5(\delta) \leq M_6(\delta),$$

und auf Grund des Maximumprinzips gilt dies auch in B. Zusammen mit (4.8) folgt daraus (4.2).

[3]) Diese Ungleichung gilt ersichtlich auch für $|w| = 1 - \delta$.

5. Die Polynome $H_n(z)$. Schließlich wollen wir annehmen, daß $f(z)$ auf der JORDAN-Kurve C regulär sei und daß $\alpha_{nk}=f'(z_{nk})$ in (1.3) gewählt werde; die $z_{nk}\in C$ sind wieder die Punkte (1.1).

Für die dadurch definierten Interpolationspolynome $H_n(z)$ leiten wir zuerst eine Darstellungsformel her. Darin bedeuten C^1 und C^2 zwei rektifizierbare JORDAN-Kurven, die ein Ringgebiet R begrenzen derart, daß C im Innern von C^1 und C^2 im Innern von C liegt und $f(z)$ im abgeschlossenen Bereich $\bar{R}$ regulär ist. Endlich ist noch die Funktion $f_1(z)$ durch

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1}\frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (z \text{ innerhalb } C^1)$$

erklärt.

Hilfssatz 2. *Ist $P_n(z)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $\leq 2n-1$, so gilt für $H_n(z)$ die Darstellungsformel*

$$(5.1)\quad \begin{cases} H_n(z)=f_1(z)-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^1}\left(\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right)^2\frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt+ \\ \qquad +\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^2}\left(1-\frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right)\frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt \qquad (z\in R)^4). \end{cases}$$

Beweis. Zunächst stellt man leicht fest, daß

$$(5.2)\qquad H_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1+C^2}\left(1-\frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right)\frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (z\in R)$$

ist. Denn ersichtlich stellt die rechte Seite von (5.2) ein Polynom vom Grade $\leq 2n-1$ dar, für das man überdies leicht die Gültigkeit von $H_n(z_{nk})=f(z_{nk})$, $H_n'(z_{nk})=f'(z_{nk})$ verifiziert. Daher ist

$$f_1(z)-H_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^1}\left(\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right)^2\frac{f(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^2}\left(1-\frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right)\frac{f(t)\,dt}{t-z} \qquad (z\in R).$$

Setzt man hierin für $f(t)$ ein beliebiges Polynom $P_n(t)$ vom Grade $\leq 2n-1$ ein, so entsteht links Null, und man erhält durch Subtraktion beider Relationen

$$(5.3)\quad \begin{cases} f_1(z)-H_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^1}\left(\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right)^2\frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt- \\ \qquad -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^2}\left(1-\frac{(\omega_n(z))^2}{(\omega_n(t))^2}\right)\frac{f(t)-P_n(t)}{t-z}\,dt \qquad (z\in R), \end{cases}$$

also gerade (5.1).

Nun wenden wir uns der Untersuchung der Folge $\{H_n(z)\}$ zu.

a. In diesem Abschnitt verlangen wir von C, daß

$$(*)\quad \begin{cases} \text{die Abbildungsfunktion } z=\psi(w) \text{ eine für } |w|\geq 1 \text{ stetige Ableitung } \psi'(w) \\ \text{besitze, die auf } |w|=1 \text{ einer LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung } \alpha \\ (0<\alpha\leq 1) \text{ genüge.} \end{cases}$$

[4]) Für den Fall gewöhnlicher LAGRANGE-Interpolation wurde eine analoge Darstellungsformel für die $L_n(z)$ von WALSH und SEWELL ([11], S. 660) angegeben. In (5.1) werde C^1 im positiven, C^2 im negativen Sinn durchlaufen.

Diese Bedingung (*) ist z. B. sicher dann erfüllt, wenn C rektifizierbar ist, und wenn die Krümmung von C eine stetige Funktion der Bogenlänge ist.

Dann können wir nämlich mit CURTISS ([1], S. 463) behaupten, daß $\omega_n(z)/c^n \to -1$ strebt für $n \to \infty$, gleichmäßig für jeden abgeschlossenen Teil B^* von D. Ist B^* eine zwischen C und C^2 verlaufende JORDAN-Kurve, die C^2 enthält, so hat dies zur Folge, daß $\omega_n(z)/\omega_n(t) \to 1$ strebt, gleichmäßig für $z \in B^*$ und $t \in C^2$. Da weiterhin, sogar im Falle einer allgemeinen JORDAN-Kurve C, die Relation $\lim_{n\to\infty} |\omega_n(\psi(w))|^{1/n} = |c|\,|w|$ gilt für $|w| > 1$ (FEJÉR [3], S. 322–324), so strebt $\omega_n(z)/\omega_n(t) \to 0$, gleichmäßig für $z \in B^*$ und $t \in C^1$. Wählt man also $P_n(z) \equiv 0$ in (5.3) für alle n, so ergibt sich sofort

$$f_1(z) - H_n(z) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

gleichmäßig für $z \in B^*$, also auch innerhalb B^*. Wir bewiesen somit den folgenden

Satz 3. *Ist C eine* JORDAN*-Kurve derart, daß (*) erfüllt ist, so gilt*

$$H_n(z) \to \frac{1}{2\pi i} \int_{C^1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) \qquad (n \to \infty,\ z \in D), \tag{5.4}$$

gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich B von D.

Für z auf C oder außerhalb C findet im allgemeinen keine Konvergenz der Polynome $H_n(z)$ statt. Um dies an einem Beispiel zu zeigen, nehmen wir C: $|z| = 1$ und $f(z) = 1/z$. Man bestätigt sofort, daß

$$H_n(z) = z^{n-1}(2 - z^n)$$

das Polynom vom Grade $2n-1$ ist, für welches $H_n(z_{nk}) = z_{nk}^{-1}$ und $H_n'(z_{nk}) = -z_{nk}^{-2}$ ist, wobei z_{nk} die n-ten Einheitswurzeln bedeuten. Offenbar divergieren $\{H_n(-1)\}$ und $\{H_n(z)\}$ $(|z| > 1)$.

b. Konvergenzaussagen auf C und darüber hinaus lassen sich machen, wenn $f(z)$ im abgeschlossenen Innern der nun beliebigen JORDAN-Kurve C regulär ist, was wir in **b** annehmen wollen. Mit C_ϱ bezeichnen wir im folgenden die analytische JORDAN-Kurve $z = \psi(w)$ $(|w| = \varrho > 1)$, mit D_ϱ ihr Inneres, und $R > 1$ sei die größte aller Zahlen ϱ von der Eigenschaft, daß $f(z)$ in D_ϱ regulär ist.

Satz 4. *Ist C eine beliebige* JORDAN*-Kurve und $f(z)$ in D_R regulär, so konvergiert die Folge $\{H_n(z)\}$ für $z \in \bar{D}$ maximal gegen $f(z)$, d. h. es ist für $z \in \bar{D}$ und jedes ϱ mit $1 < \varrho < R$*

$$|f(z) - H_n(z)| \leq \frac{M(\varrho)}{\varrho^{2n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.5}$$

Beweis. Wir setzen in (5.3)

$$P_n(z) \equiv 0 \quad \text{für alle } n, \qquad C^1 = C_{\varrho+\varepsilon_1} \qquad (0 < \varepsilon_1 < R - \varrho)$$

und wählen ε_2 mit $0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4\varrho}$. Auf Grund des schon in **a** benutzten FEJÉRschen Resultats gilt für $n > n_0$

$$|\omega_n(z)| \leq |c|^n (1 + 2\varepsilon_2)^n \quad (z \in C_{1+\varepsilon_2}), \qquad |\omega_n(t)| \geq |c|^n \left(\varrho + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)^n \quad (t \in C_{\varrho+\varepsilon_1}).$$

Berücksichtigt man dies in (5.3), so kommt sofort — der zweite Term fällt weg —

$$|f_1(z) - H_n(z)| \leq M_1(\varrho)\left(\frac{1+2\varepsilon_2}{\varrho+\frac{\varepsilon_1}{2}}\right)^{2n} < \frac{M_1(\varrho)}{\varrho^{2n}} = \frac{M(\varrho)}{\varrho^{2n-1}}$$

für $z \in C_{1+\varepsilon_1}$, also erst recht für $z \in \overline{D}$.

Wir wollen noch daran erinnern, *daß die Gültigkeit von* (5.5) *die Konvergenz der Folge* $\{H_n(z)\}$ *gegen* $f(z)$ *für* $z \in D_R$ *nach sich zieht* (WALSH [10], S. 78); für $z \in C_R$ und außerhalb von C_R divergiert jedoch $\{H_n(z)\}$ im allgemeinen, selbst wenn $f(z)$ in $\overline{D_R}$ stetig ist (vgl. § 6).

c. Auch über die Güte der Approximation von $H_n(z) \to f(z)$ $(z \in \overline{D})$ wollen wir etwas aussagen. Ist $f(z)$ in D_R regulär, in $\overline{D_R}$ stetig, so bezeichne man mit $T_n(z)$ das zu $f(z)$ und $\overline{D_R}$ gehörige TCHEBYCHEFF-Polynom vom Grade $\leq 2n-1$ und setze

$$E_n = \max_{z \in \overline{D_R}} |f(z) - T_n(z)|.$$

Satz 5. *Ist* C *eine analytische* JORDAN-*Kurve und* $f(z)$ *in* D_R *regulär, in* $\overline{D_R}$ *stetig, so gilt für eine von* n *und* z *unabhängige Konstante* M

$$|f(z) - H_n(z)| \leq M \frac{E_n}{R^{2n}} \qquad (z \in \overline{D};\ n = 1, 2, \ldots). \tag{5.6}$$

Beweis. Aus (2.3) folgt die Existenz einer von n, t und z unabhängigen Konstanten N derart, daß

$$\left|\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(t)}\right| \leq \frac{N}{R^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

für $z \in C$ und $t \in C_R$ gilt. Benützt man dies, um (5.3) abzuschätzen, und setzt dort $P_n(t) = T_n(t)$ ein, so folgt (5.6) sofort für $z \in C$, also auch für $z \in \overline{D}$.

6. Einige Gegenbeispiele. Abschließend wollen wir unsere Resultate noch durch einige Gegenbeispiele ergänzen[5]).

a. Satz 6. *Es gibt eine in* $|z| < 1$ *reguläre, in* $|z| \leq 1$ *stetige Funktion* $f(z)$ *derart, daß die für* $f(z)$ *und die Interpolationspunkte* $z_{nk} = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ *gebildeten Polynomfolgen* $\{L_n(z)\}$ *und* $\{J_n(z)\}$ *für* $z = -1$ *nicht* BOREL-*limitierbar sind.*

Dies verallgemeinert Ergebnisse von FEJÉR ([3], S. 327) und LOSINSKY ([9], S. 319), die bereits die Möglichkeit der Divergenz der Folgen $\{L_n(-1)\}$ und $\{J_n(-1)\}$ (im Spezialfall $\alpha_{nk} = 0$ für alle n und k) feststellten. Satz 6 steht in Analogie zu der bekannten Tatsache, daß es in $|z| < 1$ reguläre, in $|z| \leq 1$ stetige $f(z)$ gibt, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $z = 1$ nicht B-summierbar ist (GAIER [5], S. 329), doch ist der Beweis von Satz 6 schwieriger.

[5]) Bezüglich der $H_n(z)$ war schon im Anschluß an Satz 3 und 4 einiges bemerkt worden.

Beweis. 1. Wir wenden uns zunächst den $L_n(z)$ zu ($n=1, 2, \ldots$). Unsere Entwicklungen werden formal etwas einfacher, wenn wir statt den Interpolationspunkten z_{nk} die Punkte $\zeta_{nk}=-z_{nk}$ wählen, die den ζ_{nk} entsprechenden Polynome $L_n^*(z)$ bilden, und dann $\{L_n^*(1)\}$ untersuchen. Die Grundlage für unseren Beweis bilden die von FEJÉR eingeführten Polynome

$$(6.1)\quad g_\nu(z)=\left(\frac{1}{\nu}+\frac{z}{\nu-1}+\cdots+\frac{z^{\nu-1}}{1}\right)-\left(\frac{z^{\nu+1}}{1}+\cdots+\frac{z^{2\nu}}{\nu}\right)\quad(\nu=1,2,\ldots),$$

für die wir zunächst einige Eigenschaften ableiten[6]).

α) $L_n^*(g_\nu;1)=0$ $(n\geq 2\nu+1)$.

$g_\nu(z)$ ist nämlich ein Polynom vom Grade $2\nu\leq n-1$, das mit $L_n^*(g_\nu;z)$ in den n Punkten ζ_{nk} $(k=1, 2, \ldots, n)$ übereinstimmt, d.h. $L_n^*(g_\nu;z)=g_\nu(z)$, woraus $L_n^*(g_\nu;1)=0$ folgt.

β) $L_n^*(g_\nu;1)\geq 0$ $(\nu=u\,n$, u und n ungerade Zahlen $>0)$.

Dazu ziehen wir die LAGRANGEsche Interpolationsformel

$$(6.2)\qquad L_n^*(g_\nu;z)=\sum_{k=1}^{n} g_\nu(\zeta_{nk})\,l_{nk}(z)$$

heran. [Bezeichnung wie in (2.2), z_{nk} durch ζ_{nk} ersetzt, so daß $\zeta_{nk}^{\varphi n}=(-1)^{\varphi n}$ ist.] Für $g_\nu(z)$ setzen wir

$$g_\nu(z)=\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{z^\varrho}{\nu-\varrho}-\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{z^{\nu+\varrho+1}}{\varrho+1}$$

in (6.2) ein, was

$$(6.3)\qquad L_n^*(g_\nu;z)=\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{1}{\nu-\varrho}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{nk}^\varrho\,l_{nk}(z)-\sum_{\varrho=0}^{\nu-1}\frac{1}{\varrho+1}\sum_{k=1}^{n}\zeta_{nk}^{\nu+\varrho+1}\,l_{nk}(z)$$

ergibt. Der unter dem zweiten Summenzeichen stehende Ausdruck stellt das Polynom vom Grade $\leq n-1$ vor, das z^ϱ in den Punkten ζ_{nk} interpoliert, d.h. dieser Ausdruck ist, für $z=1$ genommen,

$=1\,(0\leq\varrho\leq n-1)$; $\quad=-1\,(n\leq\varrho\leq 2n-1)$; $\quad=1\,(2n\leq\varrho\leq 3n-1)$; ....

Für den ersten Term in (6.3) erhalten wir somit an der Stelle $z=1$

$$\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu-1}+\cdots+\frac{1}{\nu-n+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu-n}+\cdots+\frac{1}{\nu-2n+1}\right)\pm\cdots+\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right).$$

Ganz entsprechend wertet man den zweiten Term in (6.3) aus, und es ergibt sich nach leichter Rechnung

$$(6.4)\qquad \begin{cases} L_n^*(g_\nu;1)=2\left\{\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{\varrho}-\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{n+\varrho}\pm\cdots+\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{(u-1)\,n+\varrho}\right\} \\ \qquad\geq 2\left\{\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{n-1}\frac{1}{(u-1)\,n+\varrho}\right\}\geq 0. \end{cases}$$

[6]) Im folgenden bezeichnet $L_n(f;z)$ [bzw. $L_n^*(f;z)$] das zu $f(z)$ und den z_{nk} [bzw. ζ_{nk}] gehörige Polynom $L_n(z)$ [bzw. $L_n^*(z)$] vom Grade $\leq n-1$.

$\gamma)$ $L^*_{n+\tau}(g_n; 1) = 2\sum_{\varrho=\tau}^{n} \frac{1}{\varrho}$ $(\tau = 2, 4, 6, \ldots; \tau < n;$ n ungerade Zahl $> 0)$.

Die Auswertung von (6.3) ergibt hier, an der Stelle $z = 1$ genommen,

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\tau - 1}\right) + \left(\frac{1}{\tau} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 2\sum_{\varrho=\tau}^{n} \frac{1}{\varrho}$$

$\delta)$ $L^*_{n-\tau}(g_n; 1) = 2\sum_{\varrho=1+\tau}^{n-1-2\tau} \frac{1}{\varrho}$ $(\tau = 0, 2, 4, \ldots; \tau < n/4;$ n ungerade Zahl $> 0)$.

Für $\tau = 0$ ist das richtig, wie aus (6.4) für $u = 1$ folgt. Im Falle $\tau = 2$ hat man

$$L^*_{n-2}(g_n; 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-5} - \\ - \frac{1}{n-4} - \cdots - \frac{1}{n} = 2\sum_{\varrho=3}^{n-5} \frac{1}{\varrho},$$

im Falle $\tau = 4$ ganz analog $L^*_{n-4}(g_n; 1) = 2\sum_{\varrho=5}^{n-9} \frac{1}{\varrho}$, usf., also gerade das Ergebnis $\delta)$.

$\varepsilon)$ $|L^*_n(g_\nu; 1)| \leq M_1 \log n$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$ und $n = 2, 3, \ldots$.

Dies folgt aus einem Ergebnis von Curtiss ([1], S. 467), da gleichmäßig in ν und für $|z| \leq 1$ $|g_\nu(z)| \leq N$ ist, könnte aber auch direkt durch Auswertung bestätigt werden.

Nun gehen wir an die Konstruktion von $f(z)$. Da $g_\nu(z)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ und $|z| \leq 1$ gleichmäßig beschränkt ist, stellt

$$f(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} g_{\nu_r}(z) \tag{6.5}$$

für jede Folge $\{\nu_r\}$ monoton gegen ∞ strebender ganzer Zahlen eine in $|z| < 1$ reguläre, in $|z| \leq 1$ stetige Funktion dar, und es gilt

$$L^*_n(f; z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} L^*_n(g_{\nu_r}; z) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6.6}$$

Die ν_r seien wie folgt gewählt:

a) $\nu_1 = 3$, ν_r alle ungerade,

b) $\nu_r \geq 3^r$ $(r = 1, 2, \ldots)$,

c) $\frac{3}{4}\nu_r \geq 2\nu_{r-1} + 1$,

d) ν_r ungerades Vielfaches aller im Intervall $< \left[\frac{3\nu_{r-1}}{4}\right] + 1, \left[\frac{5\nu_{r-1}}{4}\right] >$ gelegenen ungeraden Zahlen.

Schließlich bemerken wir noch, daß $L^*_n(f; 1) = f(1) = 0$ ist, falls n eine gerade Zahl ist, und daß wegen der Beschränktheit von $f(z)$ in $|z| \leq 1$ analog zu $\varepsilon)$

$$|L^*_n(f; 1)| \leq M_2 \log(n + 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6.7}$$

gilt.

Nun bilden wir die BOREL-Transformation $B(x; L_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, L_n^*$ der Folge (6.6) für $x = \nu_r$ und $z = 1$:

$$B(\nu_r; L_n^*(f;1)) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} u_\sigma(\nu_r)\, L_\sigma^*(f;1) = \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]} + \sum_{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]+1}^{\nu_r} + \sum_{\nu_r+1}^{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]} +$$

$$+ \sum_{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]+1}^{\left[\frac{5\nu_r}{4}\right]} + \sum_{\left[\frac{5\nu_r}{4}\right]+1}^{\infty} = A_r^{(1)} + A_r^{(2)} + A_r^{(3)} + A_r^{(4)} + A_r^{(5)}.$$

Hierin ist unter Benützung bekannter Abschätzungen für u_σ (vgl. HARDY [6], S. 200)

$$(6.8)\quad |A_r^{(1)}| \leq \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]} u_\sigma(\nu_r)\, M_2 \log(\sigma+1) \leq M_3 \sum_{\sigma=1}^{\left[\frac{3\nu_r}{4}\right]} u_\sigma(\nu_r)\, \sigma = o(1) \quad (r \to \infty),$$

und ebenso findet man

$$(6.9)\qquad |A_r^{(5)}| \leq o(1) \quad (r \to \infty).$$

Sodann zeigen wir, daß für ungerades $\sigma \in < \left[\frac{3\nu_r}{4}\right]+1, \left[\frac{5\nu_r}{4}\right] >$ stets $L_\sigma^*(f;1) \geq 0$ gilt, was zusammen mit $L_\sigma^*(f;1) = 0$ für gerades σ

$$(6.10)\qquad A_r^{(2)} \geq 0, \quad A_r^{(4)} \geq 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

nach sich ziehen würde. Tatsächlich ist für die genannten σ

$$(6.11)\quad L_\sigma^*(f;1) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} L_\sigma^*(g_{\nu_t}; 1) = \sum_{t=1}^{r-1} + \frac{L_\sigma^*(g_{\nu_r};1)}{r^2} + \sum_{t=r+1}^{\infty} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Dabei ist für ungerades $\sigma > \frac{3\nu_r}{4} \geq 2\nu_{r-1}+1$, d.h. $\sigma > 2\nu_t + 1$ $(t < r)$ wegen $\alpha)$: $L_\sigma^*(g_{\nu_t}; 1) = 0$, d.h. $\alpha_1 = 0$. Für $t > r$ ist $\nu_t = u\,\nu_{r+1}$ (u ungerade), wegen unserer Konstruktionsvorschrift d) daher $\nu_t = u'\sigma$ (u' ungerade). Der Eigenschaft $\beta)$ zufolge ist daher $L_\sigma^*(g_{\nu_t}; 1) \geq 0$ für unsere σ und alle $t > r$, d.h. $\alpha_3 \geq 0$. $\gamma)$ und $\delta)$ schließlich bestätigen vollends, daß für unsere σ stets $L_\sigma^*(g_{\nu_r}; 1) \geq 0$, d.h. $\alpha_2 \geq 0$ gilt.

Somit bleibt noch die Abschätzung der $A_r^{(3)}$ übrig. Zunächst haben wir

$$A_r^{(3)} = \sum_{\sigma=\nu_r+1}^{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]} u_\sigma(\nu_r)\, L_\sigma^*(f;1) \geq \frac{C_1}{\sqrt{\nu_r}} \sum_{\sigma=\nu_r+1}^{\nu_r+[\sqrt{\nu_r}]} L_\sigma^*(f;1)$$

für ein von r unabhängiges C_1, und unter der Summe interessieren uns wieder die L_σ^* für ungerades σ, da sie ja für gerade σ verschwinden. Nun besagte

aber (6.11) und γ), daß für $\sigma = \nu_r + h$ $(h = 2, 4, \ldots; h \leq [\sqrt{\nu_r}])$

$$L_\sigma^*(f;1) \geq \frac{1}{r^2} L_\sigma^*(g_{\nu_r};1) = \frac{2}{r^2} \sum_{\varrho=n}^{\nu_r} \frac{1}{\varrho}$$

$$\geq \frac{C_2}{r^2} \left(\log \nu_r - \log(h+1)\right)$$

ist, d.h.

$$A_r^{(3)} \geq \frac{C_1 C_2}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu_r}} \sum_h{}' \log \nu_r - \frac{1}{\sqrt{\nu_r}} \sum_h{}' \log(h+1) \right),$$

wobei $\sum_h{}'$ anzeigen soll, daß h alle positiven geraden Zahlen $\leq [\sqrt{\nu_r}]$ durchläuft. In der Klammer ist der erste Term $\cong \frac{1}{2} \log \nu_r$, wogegen der zweite Term sich wie $\frac{1}{4} \log \nu_r$ verhält, wie man mit Hilfe der STIRLINGschen Formel nachweist. Das bedeutet, daß

$$A_r^{(3)} \geq \frac{C_3}{r^2} \log \nu_r \geq \frac{C_3}{r^2} r^3 \log 3$$

gilt, und zusammengenommen mit (6.8) bis (6.10) folgt schließlich

$$\lim_{r \to \infty} B\left(\nu_r; L_n^*(f;1)\right) = +\infty. \tag{6.12}$$

2. Um den $\{J_n(z)\}$ betreffenden Teil von Satz 6 zu beweisen, zeigen wir zunächst

$$J_n(z) = (1 - z^n) L_n(z) + O(1) \qquad (n \to \infty), \tag{6.13}$$

gleichmäßig für $|z| \leq 1$. Diese Relation stammt von LOSINSKY ([9], S. 320) für den Fall, daß bei der Bildung von $J_n(z)$ alle $\alpha_{nk} = 0$ sind, d.h. für die Polynome $\bar{J}_n(z)$ mit $\bar{J}_n(z_{nk}) = f(z_{nk})$, $\bar{J}_n'(z_{nk}) = 0$. Auf Grund von (2.1) sieht man aber sofort, daß

$$J_n(z) - \bar{J}_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} h_{nk}(z),$$

und für diesen Ausdruck hatten wir schon beim Beweis von Satz 1 festgestellt, daß er $o(1)$ ist, gleichmäßig für $|z| \leq 1$, also gilt (6.13). Nimmt man statt den z_{nk} wieder die $\zeta_{nk} = -z_{nk}$ als Interpolationspunkte, so folgt aus (6.13) für die entsprechend zu $J_n(z)$ gebildeten Polynome $J_n^*(z)$ $J_n^*(1) = (1 - (-1)^n) L_n^*(1) + O(1)$ $(n \to \infty)$. Da für unser durch (6.5) erklärtes $f(z)$ für gerades n immer $L_n^*(1) = f(1) = 0$ gilt, folgt daher in diesem Falle

$$J_n^*(1) = 2 L_n^*(1) + O(1) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

im Hinblick auf (6.12) also auch

$$\lim_{r \to \infty} B\left(\nu_r; J_n^*(f;1)\right) = +\infty.$$

Damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

b. Man kann sich fragen, ob sich die Konvergenzverhältnisse der Polynomfolgen $\{L_n(z)\}$ und $\{J_n(z)\}$ für $|z|=1$ verbessern, wenn wir an Stelle der $z_{n\,k}$ in Satz 6 jetzt die regulären Punkte $z_{n\,k}=r\,e^{2\pi i\frac{k}{n}}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots;\ 0<r<1)$ als Interpolationspunkte nehmen. Um überhaupt Konvergenz der $J_n(z)$ in $|z|<1$ erwarten zu können, müssen wir dabei die $\alpha_{n\,k}$ spezialisieren; es ist ja dann notwendig $J_n'(z_{n\,k})=f'(z_{n\,k})+o(1)$. Am günstigsten wird dabei die Wahl $\alpha_{n\,k}=f'(z_{n\,k})$ sein, d.h. statt der Polynome $J_n(z)$ betrachten wir jetzt die schon in **5** behandelten $H_n(z)$.

Satz 7. *Es gibt eine in $|z|<1$ reguläre, in $|z|\leq 1$ stetige Funktion $f(z)$ derart, daß die für $f(z)$ und die Interpolationspunkte $z_{n\,k}=r\,e^{2\pi i\frac{k}{n}}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots;\ 0<r<1)$ gebildeten Polynomfolgen $\{L_n(z)\}$ und $\{H_n(z)\}$ für $z=1$ nicht* BOREL*-limitierbar sind.*

Beweis. Die HERMITEsche Formel liefert für $n=1, 2, \ldots$

$$f(z)-L_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{z^n-r^n}{t^n-r^n}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z}\qquad(|z|<1),$$

während

$$f(z)-s_{n-1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{z^n}{t^n}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z}\qquad(|z|<1)$$

ist $\left(f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ s_n(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu \text{ gesetzt}\right)$, also ist

$$|L_n(z)-s_{n-1}(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|t|=1}\frac{r^n(t^n-z^n)}{t^n(t-z)}\,\frac{f(t)\,dt}{t^n-r^n}\right|$$

$$\leq M r^n\int\limits_{|t|=1}\left|\frac{t^n-z^n}{t-z}\right||dt|\leq 2\pi M n r^n,$$

gleichmäßig für alle z in $|z|<1$, d.h. es ist

$$L_n(z)-s_{n-1}(z)=o(1)\qquad(n\to\infty),\tag{6.14}$$

gleichmäßig für alle z in $|z|\leq 1$[7]. Auf Grund des schon in **6a** erwähnten Resultats des Verfassers über Potenzreihen folgt daraus der auf $\{L_n(z)\}$ bezügliche Teil von Satz 7.

Ganz entsprechend zu (6.14) zeigt man, daß auch

$$H_n(z)-s_{2n-1}(z)=o(1)\qquad(n\to\infty)\tag{6.15}$$

ist, gleichmäßig für $|z|\leq 1$, und wenn $f(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ eine in $|z|<1$ reguläre, in $|z|\leq 1$ stetige Funktion ist, für die $\{s_{n-1}(1)\}$ nicht BOREL-limitierbar ist, so setzen wir $F(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}A_\nu z^\nu=f(z^2)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^{2\nu}$, wofür $\{S_{2n-1}(1)\}=\{s_{n-1}(1)\}$ nicht BOREL-limitierbar ist. Damit ist auch der zweite Teil von Satz 7 bewiesen.

[7]) Dies gilt sogar in $|z|\leq r^{-1}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, wie man durch Benützung einer BERNSTEINschen Polynomabschätzung (z.B. WALSH [10], S. 77) feststellt.

Literatur.

[1] CURTISS, J.: Interpolation in regularly distributed points. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 458—473 (1935). — [2] CURTISS, J. H.: A note on the degree of polynomial approximation. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 873—878 (1936). — [3] FEJÉR, L.: Interpolation und konforme Abbildung. Göttinger Nachr. **1918**, 319—331. — [4] FEJÉR, L.: Beste Approximierbarkeit einer gegebenen Funktion durch ein Polynom gegebenen Grades, wenn das Polynom sonst beliebig oder wenn es noch einer interpolatorischen Beschränkung unterworfen ist. Math. Nachr. **4**, 328—342 (1950/51). — [5] GAIER, D.: Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Math. Z. **56**, 326—334 (1952). — [6] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [7] JACKSON, D.: A formula of trigonometric interpolation. Rend. Circ. Mat. Palermo **37**, 371—375 (1914). — [8] JACKSON, D.: The Theory of Approximation. New York 1930. — [9] LOSINSKY, S.: Sur le procédé d'interpolation de FEJÉR. C. R. (Dokadly) Acad. Sci. URSS. **24**, 318—321 (1939). — [10] WALSH, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [11] WALSH, J. L., and W. E. SEWELL: Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials. Duke Math. J. **6**, 658—705 (1940). — [12] ZYGMUND, A.: Trigonometric interpolation. Chicago 1950.

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Keplerstr. 10.

(Eingegangen am 2. Juli 1954.)

LAUGWITZ, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 134—149 (1954)

Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom.

II: Riemannsche Geometrie in lokal-linearen Räumen[1]).

Von
DETLEF LAUGWITZ.

§ 7. Einführung des affinen Zusammenhanges.

Definition. Ein B-lokal-linearer Raum[2]) heißt affin zusammenhängend, wenn für jeden seiner Punkte P feststeht, was es heißt, daß kontravariante Vektoren in infinitesimal benachbarten Punkten P, P' gleich sind, und wenn dies dadurch definiert ist, daß für jeden Punkt P in einem bestimmten, „in P geodätisch" genannten Koordinatensystem $\bar{x}$ ihre Koordinatendarstellungen gleich sind:

$$\bar{\xi}^i(\overset{\circ}{\bar{x}} + \delta\bar{x}) - \bar{\xi}^i(\overset{\circ}{\bar{x}}) = 0 \quad (\delta\bar{x} \text{ infinitesimal, } \overset{\circ}{\bar{x}} \text{ Koordinate von } P,$$
$$\overset{\circ}{\bar{x}} + \delta\bar{x} \text{ Koordinate von } P').$$

Diese Definition ist eine Erweiterung der klassischen Definition von WEYL [1, 100ff.] in der endlichdimensionalen Geometrie. Wenn man die Begriffe „infinitesimal benachbart" usw. vermeiden will, kann man die zur obigen synonyme Definition geben:

Definition. Ein B-lokal-linearer Raum[2]) heißt affin zusammenhängend, wenn für jeden seiner Punkte P feststeht, was es heißt, daß ein in einer Umgebung von P definiertes, in P differenzierbares Feld kontravarianter Vektoren in P stationär ist, und wenn dies dadurch definiert ist, daß in einem bestimmten, „in P geodätisch" genannten Koordinatensystem $\bar{x}$ gilt:

$$\frac{\delta\bar{\xi}^i(\overset{\circ}{\bar{x}})}{\delta\bar{x}^k} = 0 \quad (\overset{\circ}{\bar{x}} \text{ Koordinate von } P).$$

($\bar{\xi}^i(\bar{x})$ ist die Darstellung des Vektorfeldes im Koordinatensystem $\bar{x}$.)

Satz 7.1. *In einem beliebigen Koordinatensystem x ist ein in P stationäres kontravariantes Vektorfeld $\xi^i(x)$ gekennzeichnet durch die Gleichung*

$$\delta\xi^i(\overset{\circ}{x}) = -\,\Gamma^i_{kj}(\overset{\circ}{x})\,\xi^k(\overset{\circ}{x})\,\delta x^j$$

mit

$$\Gamma^i_{kj}(\overset{\circ}{x}) = -\,\frac{\delta^2 x^i(\overset{\circ}{\bar{x}})}{\delta x^r\,\delta\bar{x}^s}\,\frac{\delta\bar{x}^r(\overset{\circ}{x})}{\delta x^k}\,\frac{\delta\bar{x}^s(\overset{\circ}{x})}{\delta x^j}.$$

---

[1]) Wir verwenden hier die Bezeichnungen und Ergebnisse aus I [Math. Z. **61**, 100—118 (1954)]. Die Ziffern in eckigen Klammern [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende von I, ebenso Hinweise auf Sätze, z.B. Hilfssatz 2.8.

[2]) B ist ein BANACH-Raum. Der Raum selbst sei von der Klasse r mit genügend großem r; $r = 4$ reicht für die §§ 7—9 aus.

Beweis.

$$\delta\xi^i(x) = \delta\left(\frac{\delta x^i(\bar{x})}{\delta \bar{x}^j}\,\bar{\xi}^j\right) = \frac{\delta^2 x^i(\bar{x})}{\delta \bar{x}^j\,\delta \bar{x}^k}\,\bar{\xi}^j\,\delta\bar{x}^k + \frac{\delta x^i(\bar{x})}{\delta \bar{x}^j}\,\delta\bar{\xi}^j(x).$$

An der Stelle P gilt $\delta\xi^i(\overset{0}{\bar{x}}) = 0$, und daraus folgt die Behauptung.

Γ^i_{kj} heißt Operator des affinen Zusammenhangs. Er ist in jedem Koordinatensystem durch ein in den unteren Indizes symmetrisches Element von B^1_2 dargestellt.

Hilfssatz 7.1. *Das Transformationsgesetz von Γ ist*:

$$\Gamma^l_{jt} = \frac{\delta x^l}{\delta \bar{x}^k}\left(\frac{\delta^2 \bar{x}^k}{\delta x^j\,\delta x^t} + \bar{\Gamma}^k_{sr}\frac{\delta \bar{x}^s}{\delta x^j}\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\right)$$

($\bar{x}$ bedeutet dabei wieder ein beliebiges, nicht notwendig geodätisches Koordinatensystem.)

Beweis.

$$\delta\bar{\xi}^k = -\,\bar{\Gamma}^k_{lr}\bar{\xi}^l\,\delta\bar{x}^r$$

$$\delta\left(\frac{\delta \bar{x}^k}{\delta x^j}\,\xi\right) = -\,\bar{\Gamma}^k_{lr}\frac{\delta \bar{x}^l}{\delta x^j}\,\xi^j\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\,\delta x^t$$

$$\frac{\delta^2 \bar{x}^k}{\delta x^j\,\delta x^t}\,\xi^j\,\delta x^t + \frac{\delta \bar{x}^k}{\delta x^j}\,\delta\xi^j = -\,\bar{\Gamma}^k_{lr}\frac{\delta \bar{x}^l}{\delta x^j}\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\,\xi\;\delta x^t.$$

Wendet man darauf $\frac{\delta x^l}{\delta \bar{x}^k}$ an, so ergibt sich:

$$\delta\xi^l = -\,\frac{\delta x^l}{\delta \bar{x}^k}\left\{\frac{\delta^2 \bar{x}^k}{\delta x^j\,\delta x^t} + \bar{\Gamma}^k_{sr}\frac{\delta \bar{x}^s}{\delta x^j}\,\frac{\delta \bar{x}^r}{\delta x^t}\right\}\xi^j\,\delta x^t.$$

Durch Vergleich mit $\delta\xi^l = -\,\Gamma^l_{jt}\,\xi^j\,\delta x^t$ erhält man die Behauptung nach Anwendung von Hilfssatz 2.8 auf die Differenz dieser beiden Gleichungen.

Wir sagen analog zum Gebrauch im Endlichdimensionalen, daß die Vektoren $\xi^i(P+\delta P)$ in einer infinitesimalen Umgebung von P durch infinitesimale Parallelverschiebung aus $\xi^i(P)$ hervorgehen, wenn $\xi^i(P)$ ein in P stationäres Vektorfeld ist.

§ 8. Parallelverschiebung von Tensoren und kovariante Differentiation.

Die infinitesimale Parallelverschiebung von Tensoren wird durch folgende Definition eingeführt:

Definition. Multilinearformen in Vektoren, welche durch Tensoren gegeben sind, ändern sich bei infinitesimaler Parallelverschiebung nicht.

(„Durch infinitesimale Parallelverschiebung hervorgegangen" ist wiederum ein Synonym für „stationäres Feld".)

Hilfssatz 8.1. *Für die infinitesimale Parallelverschiebung eines kovarianten Vektors η^i gilt*:

$$\delta\eta_i = \eta_j\,\Gamma^j_{ik}\,\delta x^k.$$

Beweis. Nach der Definition ist bei infinitesimaler Parallelverschiebung:

$$0 = \delta(\eta_i\,\xi^i) = (\delta\eta_k)\,\xi^k - \eta_i\,\Gamma^i_{kj}\,\delta x^j\,\xi^k.$$

Da dies für beliebige ξ^k gilt, folgt die Behauptung aus der Definition der Gleichheit zweier linearer Funktionale.

Satz 8.1. *Für die infinitesimale Parallelverschiebung eines durch* $T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n}$ *dargestellten Tensors gilt*:

$$\delta T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} = \sum_{j=1}^{n} T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots r \dots k_n} \Gamma^r_{kj} \, \delta x^k - \sum_{j=1}^{m} T^{i_1 \dots r \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \Gamma^{i_j}_{rk} \, \delta x^k .$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\delta \left(\overset{(1)}{\eta}_{i_1} \dots \overset{(m)}{\eta}_{i_m} T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} \underset{(1)}{\xi^{k_1}} \dots \underset{(u)}{\xi^{k_n}} \right) = 0 ,$$

und daraus folgt die Behauptung unter Beachtung der allgemeinen Produktregel (Hilfssatz 4.2, Korollar 1), der Definition der Gleichheit zweier Multilinearformen (§ 2), von Satz 7.1 und von Hilfssatz 8.1.

Hilfssatz 8.1 und Satz 8.1 ermöglichen die Einführung eines kovarianten Differentiationsprozesses.

Definition. Ein in einer offenen Menge eines affin zusammenhängenden Raumes definiertes, stetig differenzierbares Vektorfeld $\xi^i(x)$ ist kovariant differenzierbar, und

$$\frac{\delta^* \xi^i}{\delta x^k} = \xi^i_{;k} = \xi^i_{,k} + \Gamma^i_{jk} \xi^j$$

heißt kovariante Ableitung von $\xi^i(x)$.

Hilfssatz 8.2. *Das „kovariante Differential"* $\delta^* \xi^i = \xi^i_{;k} \, \delta x^k$ *ist die Differenz zwischen Felddifferential im Nachbarpunkt und parallelverschobenem Felddifferential des Ausgangspunktes. Es ist ein kontravarianter Vektor. Die kovariante Ableitung ist ein einfach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der vorangehenden Definition. Es genügt zu zeigen, daß die kovariante Ableitung ein Tensor ist; das bestätigt man durch Rechnung unter Verwendung von Hilfssatz 7.1.

Für die kovariante Differentiation von Tensorfeldern ergibt sich auf die gleiche Weise die Formel:

$$T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n ; l} = T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots k_n , l} + \sum_{j=1}^{m} \Gamma^{i_j}_{rl} T^{i_1 \dots r \dots i_m}_{k_1 \dots k_n} - \sum_{j=1}^{n} T^{i_1 \dots i_m}_{k_1 \dots r \dots k_n} \Gamma^r_{kj \, l} .$$

Eine zweimal differenzierbare Abbildung $x^i(t)$ eines reellen Intervalles in ein Koordinatensystem des B-lokal-linearen affin zusammenhängenden Raumes stellt eine geodätische oder geradeste Linie dar, wenn der Tangentenvektor $\frac{\delta x^i}{dt} = \dot{x}^i$ bei infinitesimaler Parallelverschiebung längs der Kurve Tangentenvektor bleibt.

Satz 8.2. *Für geodätische Linien ist die Differentialgleichung*

$$\frac{\delta^* \dot{x}^i}{dt} = \frac{\delta^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{\delta x^k}{dt} \frac{\delta x^j}{dt} = 0$$

charakteristisch. Es gibt in jedem Punkt und in jeder Richtung in diesem Punkt in einem affin zusammenhängenden Raum der Klasse 3 genau ein geodätisches Kurvenstück.

Beweis. Die Differentialgleichung ergibt sich aus der Definition. Wir schreiben sie als ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{\delta x^i}{dt} = v^i$$

$$\frac{\delta v^i}{dt} = -\Gamma^i_{kj}(x)\, v^k v^j .$$

Da der Raum von der Klasse drei sein sollte, ist Γ stetig differenzierbar; die rechte Seite der zweiten Gleichung ist also nach x und nach v stetig differenzierbar, genügt also nach Hilfssatz 4.4 einer LIPSCHITZ-Bedingung in einer Umgebung der Anfangsdaten $\mathring{x}, \mathring{v}$ bezüglich der Norm $\|x\| + \|v\|$ im Produktraum der $\mathfrak{x} = (x, v)$. Wenn wir das System als eine Differentialgleichung

$$\frac{\delta \mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \left(v^i, -\Gamma^i_{kj}(x)\, v^k v^j\right)$$

in diesem Produktraume schreiben, so gilt daher für $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine LIPSCHITZ-Bedingung in einer Umgebung von $\mathring{\mathfrak{x}} = (\mathring{x}, \mathring{v})$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatze von KERNER [3] (HILLE [1, 95]) ergibt sich die Behauptung.

An dieser Stelle ist wesentlich Gebrauch gemacht worden von speziellen Eigenschaften BANACHscher Räume, welche allgemeinen topologischen Räumen nicht notwendig zukommen. An anderer Stelle wird gezeigt, daß es topologische Vektorräume gibt, in denen sogar bei noch stärkeren als den hier gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen nicht gilt.

Hilfssatz 8.3. *Ist $\xi^i(x)$ ein zweimal stetig differenzierbares kontravariantes Vektorfeld, so gilt*

$$\xi^i_{;a;b} - \xi^i_{;b;a} = R^i_{kab}\, \xi^k$$

mit

$$R^i_{kab} = \Gamma^i_{ka,b} - \Gamma^i_{kb,a} + \Gamma^i_{jb}\Gamma^j_{ka} - \Gamma^i_{ja}\Gamma^j_{kb}.$$

Der Beweis ergibt sich durch direkte Ausrechnung.

Korollar. *R^i_{kab} ist ein Tensor, der antimetrisch in a, b ist.* (Denn $\xi^i_{;a;b} - \xi^i_{;b;a}$ hat diese Eigenschaften.)

R ist das Analogon des RIEMANNschen Tensors der endlichdimensionalen Geometrie und soll hier genau so bezeichnet werden. Einige weitere Eigenschaften sind im folgenden Hilfssatz enthalten:

Hilfssatz 8.4.

$$R^i_{kab} + R^i_{abk} + R^i_{bka} = 0$$

$$R^i_{kab;c} + R^i_{kbc;a} + R^i_{kca;b} = 0$$

(*Identität nach* BIANCHI).

Beweis. Beide Identitäten ergeben sich für in P geodätische Systeme sofort aus der Definition von R, da Γ in P verschwindet. Als Tensorgleichungen gelten die Identitäten dann in jedem Koordinatensystem.

Ein Raum mit $R \equiv 0$ heißt eben; dies ist eine invariante Eigenschaft. Für Ebenheit ist hinreichend, daß es ein Koordinatensystem gibt, in welchem Γ identisch verschwindet.

Die geometrische Bedeutung des RIEMANNschen Tensors ist enthalten im:

Hilfssatz 8.5. *Die Änderung des Vektors ξ^i beim Umfahren des von dx^i, δx^k aufgespannten Flächenelementes ist gegeben durch*

$$\Delta \xi^i = R^i_{kab}\, \xi^k\, dx^a\, \delta x^b .$$

Beweis. Wenn ξ^i von x nach $x+dx+\delta x$ über $x+dx$ verschoben wird, ergibt sich für diesen Anteil der Änderung:

$$\left(\xi^i - \Gamma^i_{kj}(x)\, \xi^k\, dx^j\right) - \left(\frac{\delta \Gamma^i_{us}(x)}{\delta x^t}\, dx^t + \Gamma^i_{rs}(x)\right)\left(\xi^r - \Gamma^r_{uv}\, \xi^u\, dx^v\right) \delta x^s .$$

Dann erhält man die gesamte Änderung $\Delta \xi^i$, wenn man hiervon denselben Ausdruck nach Vertauschung von dx und δx subtrahiert:

$$\Delta \xi^i = \left\{ \left(\Gamma^i_{rs}\Gamma^r_{uv} - \Gamma^i_{rv}\Gamma^r_{us}\right) - \left(\frac{\delta \Gamma^i_{us}}{\delta x^v} - \frac{\delta \Gamma^i_{uv}}{\delta x^s}\right)\right\} \xi^u\, dx^v\, \delta x^s .$$

§ 9. Untermannigfaltigkeiten affin zusammenhängender Räume.

In der Einleitung haben wir zwei Postulate für den dimensionsfreien Aufbau einer Geometrie gestellt. Daß Postulat 2 bei unserem Aufbau der Geometrie des affin zusammenhängenden Raumes erfüllt ist, folgt aus dem Inhalt der §§ 7 und 8.

Um nun noch zu zeigen, daß auch Postulat 1 der Einleitung erfüllt ist, müssen wir differenzierbare Untermannigfaltigkeiten B-lokal-linearer Räume betrachten.

Eine ϱ-mal stetig differenzierbare Abbildung

$$x^i = x^i(u^\alpha)$$

eines B'-lokal-linearen Raumes der Klasse r' in einen B-lokal-linearen Raum der Klasse r heißt eine Einbettung, wenn aus

$$\frac{\delta x^i(u)}{\delta u^\alpha}\left(\delta_1 u^\alpha - \delta_2 u^\alpha\right) = 0 \quad \text{folgt} \quad \delta_1 u^\alpha = \delta_2 u^\alpha .$$

Die Menge der $x^i(u^\alpha)$ heißt Fläche, der B-lokal-lineare Raum heißt Einbettungsraum. Die Menge der $\frac{\delta x^i(u)}{\delta u^\alpha}\eta^\alpha$ ist ein linearer Unterraum des Tangentialraumes des Einbettungsraums im Punkte $x^i(u^\alpha)$; wir nennen diesen linearen Raum den Tangentialraum der Fläche. Die Abbildung des Tangentialraums der B'-lokal-linearen Mannigfaltigkeit im Punkte u^α in den Tangentialraum der Fläche im Punkte $x^i(u^\alpha)$ besitzt eine eindeutige Umkehrung $\delta^\alpha_i(u)$, welche wir als stetig voraussetzen. Daraus folgt, daß B' einem Unter-

raum von B linear homöomorph ist; die Topologie von B' ist also mit der von B eine normierbare Topologie.

Satz 9.1. *Für r', $\varrho \geq 2$ gilt: Wenn der Einbettungsraum einen affinen Zusammenhang Γ^i_{kj} trägt, dann ist auch die Fläche affin zusammenhängend, und der affine Zusammenhang der Fläche ist gegeben durch:*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) = \delta^\alpha_i(u)\left\{\Gamma^i_{kj}[x(u)]\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma} + \frac{\delta^2 x^i(u)}{\delta u^\beta \delta u^\gamma}\right\}.$$

Beweis[3]). $\delta\xi^i = -\Gamma^i_{kj}\,\xi^k\,\delta x^j$ gilt speziell für Flächenvektoren $\xi^k = \frac{\delta x^k(u)}{\delta u^\alpha}\,\xi^\alpha$ und flächenhafte Verschiebungen $\delta x^i = \frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\delta u^\alpha$ und ergibt dann:

$$\delta\xi^i = -\left(\Gamma^i_{kj}\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\right)\xi^\beta\,\delta u^\gamma.$$

Andererseits ist

$$\delta\xi^i = \delta\left(\frac{\delta x^i}{\delta u^\beta}\,\xi^\beta\right) = \frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\beta \delta u^\gamma}\,\xi^\beta\,\delta u^\gamma + \frac{\delta x^i}{\delta u^\beta}\,\delta\xi^\beta,$$

so daß wir haben:

$$\frac{\delta x^i}{\delta u^\beta}\,\delta\xi^\beta = -\left(\Gamma^i_{kj}\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma} + \frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\beta \delta u^\gamma}\right)\xi^\beta\,\delta u^\gamma.$$

Auf der linken Seite steht ein Element des Tangentialraumes der Fläche, also auch auf der rechten Seite; wir dürfen daher den Operator δ^α_i anwenden und erhalten die Behauptung.

Es mag darauf hingewiesen werden, daß es nicht ohne weiteres erlaubt ist, die Klammer in dem Ausdruck für $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ aufzulösen, da jeder einzelne der beiden Summanden im allgemeinen einen Wertebereich haben wird, der nicht ganz im Tangentialraum der Fläche liegt.

Satz 9.1 zeigt, daß Postulat 1 der Einleitung wirklich erfüllt ist. Außerdem ersieht man aus diesem Satz, daß es nichttriviale Beispiele von unendlichdimensionalen affin zusammenhängenden Räumen wirklich gibt. Als Einbettungsraum braucht man, um das zu sehen, nur einen BANACH-Raum zu nehmen.

§ 10. Metrische lokal-lineare Räume und Einführung einer RIEMANNschen Metrik.

Ein lokal-linearer Raum soll metrisch heißen, wenn zwischen P und den Punkten P' einer infinitesimalen Umgebung von P ein Abstand $ds = ds(P, P')$ erklärt ist. Sind in einem Koordinatensystem x die Koordinaten von P

[3]) Zur Schreibweise ist zu bemerken: In der Operatorendeutung der Indizessymbolik ist es erlaubt, für den affinen Zusammenhang in Raum und Fläche den gleichen Kernbuchstaben Γ zu verwenden, da die Art der Indizes für die Unterscheidung sorgt. Wenn man im Endlichdimensionalen zur Summationsdeutung zurückkehren will, ist dies nicht mehr möglich, da z. B. Γ^1_{11} ganz verschiedene Zahlenwerte besitzen wird, je nachdem ob es sich um den affinen Zusammenhang des Raumes oder den der Fläche handelt. — Aus dem gleichen Grunde dürfen wir hier auch schreiben $\xi^k = \frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\xi^\alpha$.

bzw. P' gegeben durch x bzw. $x+\delta x$, so soll gelten:

$$ds = F(x; \delta x),$$

wobei $F(x; \delta x)$ positiv-definit und in δx von erster Ordnung positiv homogen ist. Diesen Ansatz hat für den endlichdimensionalen Fall bereits RIEMANN in seiner Habilitationsvorlesung begründet.

Man überzeugt sich sofort davon, daß differenzierbare Untermannigfaltigkeiten metrischer Räume wiederum metrische Räume sind.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf die Untersuchung derjenigen metrischen Räume, die den klassischen RIEMANNschen Räumen entsprechen. Dazu legen wir einen B-lokal-linearen Raum (B BANACHsch) genügend hoher Klasse r zugrunde und postulieren:

1. Der Abstand infinitesimal benachbarter Punkte ist gegeben durch

$$ds = F(x; \delta x) = (g_{ik}(x)\, \delta x^i\, \delta x^k)^{\frac{1}{2}} \qquad (g_{ik} = g_{ki},\ g_{ik}\xi^i\xi^k \text{ positiv-definit}).$$

2. Die stetige lineare Abbildung $u_i = g_{ik}(x)\, \xi^k$ von B auf $U \subseteq B_1$ besitzt eine in U definierte, stetige und eindeutige Umkehrung $\xi^i = G(u)$. (Diese ist dann natürlich linear.)

Satz 10.1. *Wenn eine B-lokal-lineare Mannigfaltigkeit ein* RIEMANNscher *Raum ist, dann ist die Normtopologie von B euklidisch; es ist notwendig $U = B_1$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.3.

Hilfssatz 10.1. *$(g_{ik}(x)\, \xi^i\, \xi^k)^{\frac{1}{2}}$ ist für jedes x eine Norm aus der Normtopologie von B.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.2.

Korollar. *Es gibt B-lokal-lineare Räume beliebiger unendlicher Dimension, in denen sogar im Kleinen keine* RIEMANNsche *Metrik eingeführt werden kann.*

Denn es gibt dann stets nicht-euklidische Normtopologien[4]).

Es ist merkwürdig, daß man nicht weitere Räume mit RIEMANNschen Metriken ausstatten kann, wenn man für die kovarianten Vektoren nur eine Untermannigfaltigkeit der Menge B_1 heranzieht; denn der Wertebereich U von $g_{ik}\xi^k$ fällt nach dem Bewiesenen stets mit B_1 zusammen. Dies zeigt, daß die Axiome von MICHAL für eine RIEMANNsche Geometrie in BANACH-Räumen nicht unabhängig voneinander sind (MICHAL [4, 551]). Tatsächlich zeigt Satz 10.1, daß der Tangentialraum eines RIEMANNschen Raumes stets zu einem HILBERT-Raum linear homöomorph ist.

Es sei hier erwähnt, daß sich an dieser Stelle ein Zugang zu einem dimensionsfreien Aufbau der FINSLERschen Geometrie eröffnet. Man wird die lokale Metrik F dann als eine beliebige, nicht notwendig euklidische Norm aus der Normtopologie von B zu wählen haben.

Da die Umkehrung von $g_{ik}(x)\, \xi^k$ über dem ganzen Raum B_1 definiert ist, stetig ist und als Wertebereich den ganzen Raum B hat, wird diese Um-

[4]) Vgl. dazu die demnächst im Arch. der Math. erscheinende Arbeit des Verf.: „Über vollständige Normtopologien."

kehrung durch ein Element von B^2 repräsentiert und darf geschrieben werden

$$\xi^k = g^{kj}(x)\, u_j.$$

Es gilt

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k.$$

Hilfssatz 10.2. *g^{ij} stellt einen zweifach kontravarianten Tensor dar und ist symmetrisch in i, j.*

Beweis. Schreiben wir von jetzt an ξ_i für $g_{ik}(x)\, \xi^k$, so gilt

$$\bar{g}^{ij} \bar{\xi}_i \bar{\eta}_j = \bar{\xi}_i \bar{\eta}^i = \bar{g}_{ik} \bar{\eta}^i \bar{\xi}^k = g_{ik} \eta^i \xi^k = \xi_i \eta^i = g^{ij} \xi_i \eta_j.$$

g^{ij} definiert also eine invariante Bilinearform über $\mathfrak{T}_1$, und nach der Definition 2 aus § 6 folgt daraus die Tensoreigenschaft, da die Bedingung $g^{ij} \in B^2$ erfüllt ist. Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von g_{ik}:

$$g^{ij} \xi_i \eta_j = g_{ik} \xi^k \eta^i = g_{ik} \xi^i \eta^k = g^{ij} \xi_j \eta_i.$$

Die RIEMANNsche Metrik g_{ik} kann auch für die Winkelmessung verwendet werden. Der Kosinus des Winkels zwischen ξ^i und η^i ist gegeben durch

$$\frac{g_{ik} \xi^i \eta^k}{\sqrt{g_{ik} \xi^i \xi^k} \sqrt{g_{ik} \eta^i \eta^k}}.$$

Dies ist dem Betrage nach höchstens gleich 1. Denn g_{ik} macht den zweidimensionalen, von ξ^i und η^i aufgespannten linearen Raum zu einem euklidischen, und für euklidische Ebenen ist dies bekannt. Eine entsprechende Argumentation ergibt auch, daß die „GRAMsche" Determinante von n Vektoren $\xi^i_{(1)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$ [5])

$$G_{(n)} = \begin{vmatrix} g_{ik}(x)\, \xi^i_{(1)} \xi^k_{(1)} & g_{ik} \xi^i_{(1)} \xi^k_{(2)} & \cdots & g_{ik} \xi^i_{(1)} \xi^k_{(n)} \\ \vdots & & \cdots & \\ g_{ik} \xi^i_{(n)} \xi^k_{(1)} & & \cdots & g_{ik} \xi^i_{(n)} \xi^k_{(n)} \end{vmatrix}$$

positiv ist, wenn die Vektoren linear unabhängig sind, und sonst verschwindet. Denn in dem von den n Vektoren aufgespannten euklidischen Raum der Dimension $m \leq n$ ist dies bekannt. Ebenso sieht man, daß sich aus n linear unabhängigen Vektoren n neue gewinnen lassen:

$$\eta^i_{(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{G_{(\nu-1)} G_{(\nu)}}} \begin{vmatrix} g_{ik} \xi^i_{(1)} \xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik} \xi^i_{(1)} \xi^k_{(\nu-1)} & \xi^i_{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{ik} \xi^i_{(\nu)} \xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik} \xi^i_{(\nu)} \xi^k_{(\nu-1)} & \xi^i_{(\nu)} \end{vmatrix}$$

Die $\eta^i_{(\nu)}$ sind orthonormiert, d.h. $g_{ik} \eta^i_{(\mu)} \eta^k_{(\nu)} = \delta_{(\mu\nu)}$. (SCHMIDTsche Orthogonalisierung.)

Eine ausgezeichnete, „cartesische" Metrik (δ_{ik} entsprechend) gibt es im allgemeinen natürlich nicht; alle quadratischen Formen $g_{ik}(x)\, \xi^i \xi^k$, die eine Norm aus der Normtopologie von B definieren, sind gleichberechtigt. Geometrisch besteht eine Auszeichnung der δ_{ik}-Metrik ja auch im Endlich-

[5]) Eingeklammerte Indizes haben keine Bedeutung in der Operationskonvention, sondern sind Nummern.

dimensionalen nicht. Gewisse rechnerische Vereinfachungen, die gewöhnlich mit Hilfe der δ_{ik}-Metrik durchgeführt werden können, sind im allgemeinen nicht möglich.

§ 11. Grundlagen der RIEMANNschen Geometrie.

Von jetzt an soll das metrische Feld $g_{ik}(x)$ hinreichend oft differenzierbar sein (in diesem Paragraphen genügt zweimalige Differenzierbarkeit). Der Raum soll von der Klasse $r \geq 2$ sein.

Satz 11.1. *In einem* RIEMANN*schen Raum gibt es genau einen affinen Zusammenhang, der Vektorlängen bei Parallelverschiebung ungeändert läßt. Dieser läßt dann auch die Winkel ungeändert und ist gegeben durch*

$$\Gamma^i_{kj}(x) = \frac{g^{il}(x)}{2}\left\{\frac{\delta g_{lk}(x)}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{kj}(x)}{\delta x^l} + \frac{\delta g_{lj}}{\delta x^k}\right\}.$$

Unter Beachtung der Definition des Verschwindens eines linearen Funktionals und des Hilfssatzes 3.2 kann der Beweis analog zum endlichdimensionalen Fall geführt werden. (Zum Beispiel WEYL [*1*], Kap. II.)

Also ist nach Vorgabe der Metrik auch ein eindeutiger kovarianter Differentiationsprozeß bestimmt.

Hilfssatz 11.1. (*Lemma nach* RICCI) $\frac{\delta^* g_{ik}}{\delta x_j} \equiv 0$.

Beweis.

$$\frac{\delta^* g_{ik}}{\delta x^j} = \frac{\delta g_{ik}}{\delta x^j} - g_{ir}\Gamma^r_{kj} - g_{rk}\Gamma^r_{kj}.$$

Dies ist nach Satz 11.1 identisch Null.

Da der RIEMANNsche Raum ein affin zusammenhängender Raum ist, ist der RIEMANNsche Tensor wie in § 8 erklärbar. Hier kann man auch das Analogon des Krümmungsskalars einführen.

Eine Fläche in einem RIEMANNschen Raum wird wie in § 9 definiert durch eine Einbettungsgleichung $x^i = x^i(u^\alpha)$ mit den dort verlangten Eigenschaften. (Bezeichnungen s. § 9.)

Satz 11.2. *Jede Fläche in einem* RIEMANN*schen Raum ist selbst ein* RIEMANN*scher Raum, dessen nach Satz* 11.1 *definierter affiner Zusammenhang gleich dem nach* § 9 *durch den affinen Zusammenhang des Einbettungsraumes induzierten affinen Zusammenhang ist.*

Beweis.

$$ds^2 = g_{ik}\big(x(u)\big)\,\delta x^i\,\delta x^k = g_{ik}\big(x(u)\big)\,\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}\,\delta u^\alpha\,\delta u^\beta,\quad g_{\alpha\beta}(u) = g_{ik}(x)\,\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}$$

ist eine positiv-definite, symmetrische quadratische Form über dem Tangentialraum der Fläche, die dort eine aus der Normtopologie dieses Raumes stammende Norm definiert, da $\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}$ samt seiner Umkehrung stetig, also beschränkt ist. Daher ist durch $g_{\alpha\beta}$ eine RIEMANNsche Metrik mit nach Hilfssatz 4.2 gegebenen Differenzierbarkeitseigenschaften in der Fläche ein-

geführt. Es gilt

$$g^{\alpha\beta}(u) = g^{ij}\,\delta_i^\alpha\,\delta_j^\beta, \quad \text{denn} \quad g^{\alpha\beta}\,g_{\beta\gamma} = g^{ij}\,\delta_i^\alpha\,\delta_j^\beta\,g_{rk}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha.$$

Es ist der affine Zusammenhang dieses RIEMANNschen Raumes zu berechnen:

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta u^\gamma} = \frac{\delta g_{ik}}{\delta x_j}\,\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta} + 2g_{ik}\,\frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\alpha\,\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \frac{g^{\delta\gamma}}{2}\left\{\frac{\delta g_{\alpha\gamma}}{\delta u^\beta} - \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta u^\gamma} + \frac{\delta g_{\beta\gamma}}{\delta u^\alpha}\right\} = g^{il}\,\delta_i^\delta\,\delta_l^\gamma\,\Gamma_{j,kr}\,\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta}$$

$$+ g^{ij}\,\delta_i^\delta\,\delta_j^\gamma\,g_{sk}\left\{\frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\alpha\,\delta u^\beta}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\gamma} - \frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\alpha\,\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\beta} + \frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\beta\,\delta u^\gamma}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\right\}.$$

Die beiden letzten Glieder können zusammengefaßt werden, da alles übrige symmetrisch in α, β ist; sie müssen sich nämlich wegheben, da sie zusammen schiefsymmetrisch in α, β sind, andererseits aber einem in α, β symmetrischen Ausdruck gleich sein sollen. Damit bleibt:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = g^{il}\,\delta_i^\delta\left(\delta_l^\gamma\,\frac{\delta x^j}{\delta u^\gamma}\right)\Gamma_{j,kr}\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta} + g^{ij}\,\delta_i^\delta\left(\delta_j^\gamma\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\gamma}\right)g_{sk}\,\frac{\delta^2 x^s}{\delta u^\alpha\,\delta u^\beta}.$$

Dies ist aber die Formel für den induzierten Zusammenhang (Satz 9.1):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \delta_i^\delta\left\{\Gamma_{kr}^i\,\frac{\delta x^k}{\delta u^\alpha}\,\frac{\delta x^r}{\delta u^\beta} + \frac{\delta^2 x^i}{\delta u^\alpha\,\delta u^\beta}\right\}.$$

Aus diesem Satz folgt die Existenz nicht-trivialer Beispiele von RIEMANNschen Räumen beliebiger Dimension als Flächen in HILBERT-Räumen. — Man berechnet, daß Kugeln in HILBERT-Räumen konstantes Krümmungsmaß haben.

§ 12. Kurven in RIEMANNschen Räumen.

In diesem Paragraphen wollen wir das bisher Entwickelte zur Behandlung spezieller geometrischer Probleme verwenden, und zwar werden wir die Kurventheorie diskutieren.

Wenn in der Definition der Fläche (§ 9) der B'-lokal-lineare Raum speziell ein offenes reelles Intervall ist, dann sprechen wir von einer Kurve $x^i(t)$. Der Tangentialraum der Kurve besteht aus einer einzigen Geraden, die durch den Tangentenvektor $\xi^i(t) = \frac{\delta^* x(t)}{dt}$ beschrieben wird. Es wird vorausgesetzt, daß dessen Länge

$$\sqrt{g_{ik}(x)\,\xi^i(t)\,\xi^k(t)} = A(t)$$

von Null verschieden ist; das entspricht der für Flächen allgemein gestellten Forderung, daß aus $\frac{\delta x^i}{\delta u^\alpha}\,\delta u^\alpha = 0$ folgen soll $\delta u^\alpha = 0$. Durch $s = s(t)$ mit

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau$$

führen wir auf der Kurve einen neuen Parameter s mit der invarianten Eigenschaft ein, daß

$$g_{ik}(x)\,\frac{\delta x^i}{ds}\,\frac{\delta x^k}{ds} = 1.$$

Dieser ausgezeichnete Parameter führe wie üblich den Namen „Bogenlänge". Wenn nichts anderes bemerkt ist, sollen alle vorkommenden Kurven auf den Parameter Bogenlänge bezogen sein.

Es kann nach den Kurven stationärer Länge gefragt werden, die zwei vorgegebene Punkte (Koordinaten x_0 und x_1) verbinden. Das führt auf das Variationsproblem

$$\delta \int_{x_1}^{x_0} ds = 0,$$

dessen Lösung nach Hilfssatz 4.8 äquivalent ist mit der Lösung der zugehörigen („EULERschen") Differentialgleichung

$$\frac{\delta \sqrt{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k}}{\delta x^j} - \frac{d}{ds}\frac{\delta \sqrt{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k}}{\delta \dot{x}^j} = 0 \qquad \left(\cdot \text{ für } \frac{\delta}{ds}\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\;}}\frac{\delta g_{ik}}{\delta x^j}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k - \frac{\delta}{ds}\frac{1}{\sqrt{\;}}\,g_{ij}\,\dot{x}^i = 0$$

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kj}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^j = 0.$$

Dies ist die Differentialgleichung der geodätischen Linien (§ 8). Die geradesten Linien sind also wie in der klassischen RIEMANNschen Geometrie zugleich die kürzesten.

Von nun an wollen wir annehmen, daß der Raum unendlichdimensional sei, und daß das metrische Feld unendlich oft differenzierbar sei; diese Voraussetzung ist im HILBERT-Raum (g_{ik} konstant) trivialerweise erfüllt.

Existieren die p ($p \leq \infty$) ersten Ableitungen von $x^i(s)$, so ist mit der Kurve ein invariantes begleitendes Vektorgerüst gegeben durch

$$\xi^i_{(n)}(s) = \frac{\delta^* \xi^i_{(n-1)}(s)}{ds}; \qquad \xi^i_{(1)}(s) = \xi^i(s) = \frac{\delta x^i}{ds}.$$

Von den $\xi^i_{(n)}$ seien die ersten q ($q \leq p$) linear unabhängig. Dann kann man auf sie das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren (§ 10) anwenden und erhält ($G_{(m)}$ bezeichnet die m-te GRAMsche Determinante; $G_{(0)} = 1$)

$$\eta^j_{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{G_{(n-1)}(s)\,G_n(s)}} \begin{vmatrix} g_{ik}\left(x(s)\right)\xi^i_{(1)}\,\xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik}\left(x(s)\right)\xi^i_{(1)}\,\xi^k_{(n-1)}\,\xi^j_{(1)}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{ik}\left(x(s)\right)\xi^i_{(n)}\,\xi^k_{(1)} & \cdots & g_{ik}\left(x(s)\right)\xi^i_{(n)}\,\xi^k_{(n-1)}\,\xi^j_{(n)}(s) \end{vmatrix}.$$

Wir setzen jetzt $p = q = \infty$ voraus und erhalten $\eta^j_{(k)}$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Da $\eta^i_{(k)}$ ein Linearkompositum der $\xi_{(j)}$ ($j = 1, \ldots, k$) ist, kann man $\frac{\delta^* \eta_{(k)}}{ds}$ jedenfalls linear aus den $\xi_{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, k+1$) kombinieren. Damit haben wir die Fundamentalformeln der Kurventheorie:

$$\frac{\delta^* \eta^i_{(k)}}{ds} = \sum_{j=1}^{k+1} \varkappa_{(kj)}(s)\,\eta^i_{(j)}(s).$$

Es gilt wegen der Orthonormalität der $\eta_{(j)}$:

$$0 = \delta^*(g_{ik}\eta^i_{(j)}\eta^k_{(l)}) = g_{ik}\left(x(s)\right)\frac{\delta^*\eta^i_{(j)}}{ds}\eta^k_{(l)} + g_{ik}\left(x(s)\right)\eta^i_{(j)}\frac{\delta^*\eta^k_{(l)}}{ds} = \varkappa_{(jl)} + \varkappa_{(lj)}.$$

(nach dem RICCIschen Lemma, § 11).

Die Matrix der Krümmungen $\varkappa_{(jl)}$ ist also schiefsymmetrisch, und da für $l \geq j+2$ gilt $\varkappa_{(jl)} = 0$, sind höchstens in den beiden Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente vorhanden. Wir schreiben $\varkappa_{(j)}$ für $\varkappa_{(j,j+1)} = -\varkappa_{(j+1,j)}$ und haben die verallgemeinerten FRENETschen Formeln:

$$\frac{\delta^*}{ds}\eta^i_{(j)} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)}, \qquad \varkappa_{(0)} = 0, \qquad \varkappa_{(m)} = g_{ik}\frac{\delta^*\eta^i_{(m)}}{ds}\eta^k_{(m+1)}.$$

Die Krümmungen sind Invarianten der Kurve, wie man schon an der Darstellung $g_{ik}\frac{\delta^*\eta^i_{(m)}}{ds}\eta^k_{(m+1)}$ erkennt. Sie können sogar explizit berechnet werden. Wegen $\xi_{(n+1)} = \frac{\delta^*\xi_{(n)}}{ds}$ gilt

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}\xi^i_{(m)}\xi^k_{(n)}) = g_{ik}\xi^i_{(m+1)}\xi^k_{(n)} + g_{ik}\xi^i_{(m)}\xi^k_{(n+1)}.$$

Die kovariante Differentiation der Definitionsgleichung von $\eta^i_{(l)}$ nach s ergibt einen Ausdruck, dessen Skalarprodukt mit $\eta^i_{(l+1)}$ wie bei BLASCHKE, Math. Z. **6**, 98 (1921) als $\frac{\sqrt{G_{(l-1)}G_{(l+1)}}}{G_{(l)}}$ erwiesen wird.

Man beachte, daß bei der Definition der Normalen mit Hilfe des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens die Krümmungen $\varkappa_{(j)}$ automatisch positiv sind.

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Satz 12.1. *In einem unendlichdimensionalen* RIEMANNschen *Raum mit unendlich oft differenzierbarem metrischem Feld gilt für eine unendlich oft differenzierbare Kurve, deren Ableitungen linear unabhängig sind:*

$$\frac{\delta^*\eta^i_{(j)}}{ds} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)} \qquad (\varkappa_0 = 0)$$

mit $\varkappa_{(m)} = \frac{\sqrt{G_{(m+1)}G_{(m-1)}}}{G_{(m)}} > 0$. Die Krümmungen $\varkappa_{(m)}$ sind unendlich oft differenzierbare Funktionen von s.

(Die letzte Aussage folgt aus der Differenzierbarkeit der Vektoren $\xi^i_{(n)}$ und dem Nichtverschwinden der GRAMschen Determinanten.)

Dieses Ergebnis ist für den speziellen Fall des euklidischen, $\aleph_0$-dimensionalen Raumes der stetigen reellwertigen Funktionen über einem reellen Intervall unter dem Skalarprodukt $\int f g\, dx$ von G. KOWALEWSKI [*1*] erhalten worden.

Dieses Invariantensystem ist vollständig, wie aus dem nachfolgenden Satz folgt.

Satz 12.2. *Es seien positive stetige Funktionen $\varkappa_n(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ vorgegeben mit folgenden Eigenschaften: a) Es gibt ein M so, daß $|\varkappa_n(s)| \leq M$ für*

alle n, s; b) aus $|s-s_0|\to 0$ folgt $\sup_n |\varkappa_n(s)-\varkappa_n(s_0)|\to 0$. Dann gibt es höchstens eine Kurve $x(s)$, die bei vorgegebenem Anfangspunkt $x^i(s_0)=\mathring{x}$ und vorgegebenem orthonormalen Vektorgerüst $\mathring{\eta}^i_{(n)}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ die $\varkappa_n(s)$ als Krümmungen und die $\mathring{\eta}^i_{(n)}$ als Normalenvektoren in $\mathring{x}$ hat.

Beweis. Wir fassen das unendliche System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\delta^* \eta^i_{(j)}}{ds} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)}; \qquad \frac{\delta x^i}{ds} = \eta^i_{(1)}(s)$$

oder

$$\frac{\delta \eta^i_{(j)}}{ds} = -\varkappa_{(j-1)}\eta^i_{(j-1)} + \varkappa_{(j)}\eta^i_{(j+1)} - \Gamma^i_{kr}\left(x(s)\right)\eta^k_{(1)}(s)\,\eta^r_{(j)}(s); \qquad \frac{\delta x^i}{ds} = \eta^i_{(1)}(s)$$

auf als eine einzige gewöhnliche Differentialgleichung im Raume $\mathfrak{B}$, dessen Elemente die unendlichen Vektoren

$$\mathfrak{y} = \{\eta^i_{(0)}, \eta^i_{(1)}, \eta^i_{(2)}, \ldots\}; \qquad \sup_n \|\eta^i_{(n)}\| < \infty; \qquad x^i = \eta^i_{(0)}$$

sind und in dem eine Norm eingeführt ist durch $\|\mathfrak{y}\| = \sup_{n=0}^{\infty} \|\eta_{(n)}\|$. Dieser Raum $\mathfrak{B}$ ist ein BANACH-Raum, da der ursprüngliche Raum diese Eigenschaft hatte. Das Differentialgleichungssystem der Fundamentalformeln schreiben wir in $\mathfrak{B}$:

$$\frac{\delta \mathfrak{y}(s)}{ds} = K(s)\,\mathfrak{y}(s) - \Gamma\left(\mathfrak{y}(s)\right).$$

Dabei bedeutet $K(s)$ die Matrix:

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\varkappa_2 & 0 & \varkappa_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Diese stellt einen durch $\max\{2M, 1\}$ beschränkten linearen Operator in $\mathfrak{B}$ dar, da

$$\|K(s)\,\mathfrak{y}(s)\| = \sup_n \{\|-\varkappa_{(n-1)}\eta_{(n-1)} + \varkappa_{(n)}\eta_{(n+1)}\|,$$

$$\|\eta_1\|\} \leq \max\{2M, 1\} \sup_{n=0}^{\infty} \|\eta_{(n)}\|.$$

$\Gamma(\mathfrak{y})$ bedeutet den Vektor mit den Komponenten:

$$\{0,\ \Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}\eta^j_{(1)}, \ldots, \Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}\eta^j_{(n)}, \ldots\}.$$

Die Gültigkeit einer LIPSCHITZ-Bedingung für $\Gamma(\mathfrak{y})$ in einer Umgebung der Anfangsbedingung $\mathring{\mathfrak{y}}$ ergibt sich daraus, daß $\Gamma^i_{kj}(\mathring{\eta}_{(0)})\,\eta^k_{(1)}$ in einer Umgebung von $\mathring{\mathfrak{y}}$ nach Hilfssatz 2.2 eine gleichmäßige obere Schranke $\tilde{M}$ besitzt:

$$\sup_n \|\Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}\eta^j_{(n)} - \Gamma^i_{kj}(\tilde{\eta}_{(0)})\,\tilde{\eta}^k_{(1)}\tilde{\eta}^j_{(n)}\| \leq \sup \|\Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta^k_{(1)}(\eta^j_{(n)} - \tilde{\eta}^j_{(n)})\| +$$

$$+ \sup \|(\Gamma^i_{kj}(\eta_{(0)})\,\eta_{(1)} - \Gamma^i_{kj}(\tilde{\eta}_{(0)})\,\tilde{\eta}_{(1)})\,\tilde{\eta}_{(n)}\| \leq (\tilde{M} + L\cdot\|\tilde{\mathfrak{y}}\|) \sup_n \|\eta^j_{(n)} - \tilde{\eta}^j_{(n)}\|.$$

Der erste Summand $K(s)\,\mathfrak{y}(s)$ genügt sogar gleichmäßig im ganzen Intervall einer LIPSCHITZ-Bedingung, da $K(s)$ ein gleichmäßig beschränkter linearer Operator ist, der $\mathfrak{B}$ in sich abbildet; die Stetigkeit in s bezüglich der Norm von $\mathfrak{B}$ ist nach der Voraussetzung b) gesichert. Aus alledem folgt nach dem Satz von KERNER [3] (HILLE [1, 95]) die Existenz und Eindeutigkeit eines Lösungsvektors $\mathfrak{y}(s)$ in einem an s_0 anschließenden Intervall für die vorgegebene Anfangsbedingung $\overset{\circ}{\mathfrak{y}}$. (Damit ist nicht gesagt, daß es nicht Lösungen geben könnte, welche nicht in $\mathfrak{B}$ liegen. Solche Lösungen interessieren uns aber hier nicht, da für Kurven jedenfalls $||\eta_{(n)}|| = 1$ für $n \geq 1$, also $||\mathfrak{y}|| = \max\{1, ||\eta_{(0)}||\}$ sein muß, so daß der Vektor

$$\mathfrak{y} = \{\eta_{(0)}, \eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \ldots\}$$

in $\mathfrak{B}$ liegt.)

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von KERNER liefert die Behauptung.

Satz 12.2 besagt, daß die *abzählbar* unendlich vielen Krümmungen unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen ein vollständiges Invariantensystem für eine Kurve bilden. Das gilt auch dann, wenn der Raum selbst von überabzählbarer Dimensionszahl ist. Die Merkwürdigkeit dieses Ergebnisses zeigt sich besonders deutlich, wenn der RIEMANNsche Raum speziell ein HILBERT-Raum ist ($\Gamma \equiv 0$). Denn dann besagt der Satz, daß eine Kurve den von ihrem Anfangsvektorgerüst aufgespannten abzählbardimensionalen Unterraum niemals verläßt. Dieses Resultat ist ein duales Gegenstück zu dem Satz, daß in einem HILBERT-Raum für jeden Vektor höchstens abzählbar viele FOURIER-Koeffizienten von Null verschieden sind.

GREENWOOD [1] hat die KOWALEWSKIschen Fundamentalformen im Raum der stetigen Funktionen diskutiert unter der Annahme, daß alle Krümmungen $\varkappa_{(j)}(s)$ konstant sind. Er kommt dabei zu dem Schluß, daß im HILBERT-Raum von $\aleph_0$ Dimensionen der Satz nicht mehr wahr sei, daß die Krümmungen eine Kurve bis auf Bewegungen festlegten. Unter Bewegungen versteht GREENWOOD dabei isometrische lineare Abbildungen des HILBERT-Raumes auf sich. Satz 12.2 ermöglicht es, sein Gegenbeispiel zu durchschauen. Man wähle als abzählbardimensionalen HILBERT-Raum H_1 den von den Normalen $\eta_{(n)}(s_0)$ einer beliebigen Kurve aufgespannten Raum und als HILBERT-Raum H_2 den von irgendeiner echten unendlichen Teilfolge $\tilde{\eta}_k = \eta_{n_k}$ aufgespannten echten Unterraum von H_1; dann gibt es in H_2 eine Kurve mit denselben Krümmungen und dem Anfangsvektorgerüst, das durch die geordnete Teilfolge gegeben ist. Aber die isometrische lineare Abbildung von H_1 auf H_2, welche durch $F\,\eta_k = \tilde{\eta}_k$ vermittelt wird, ist im Sinne von GREENWOOD keine Bewegung.

Dieser GREENWOODsche Bewegungsbegriff ist aber nicht sehr sinnvoll. Ist H_1 nämlich in einem HILBERT-Raum H eingebettet, in dem es unendlich viele von H_1 linear unabhängige Vektoren gibt, dann gibt es Bewegungen im Sinne von GREENWOOD von H, welche H_1 in H_2 und die eine der betrachteten Kurven in die andere überführen. Man sollte unter einer Bewegung (wobei von Orientierung abgesehen wird) lieber eine isometrische lineare Abbildung

verstehen; dies ist auch eine Verallgemeinerung der endlichdimensionalen Definition, und dabei wird das bei GREENWOOD mögliche Vorkommnis vermieden, daß zwei Mengen, die in einem Raum nicht durch Bewegungen ineinander übergeführt werden können, in einem einbettenden Raume doch ineinander bewegbar werden. Bei dieser Definition können wir dann den Inhalt von Satz 12.2 auch so aussprechen, daß die Krümmungen eine Kurve gerade bis auf Bewegungen festlegen. Um eine solche Bewegung für Kurven mit gleichen Krümmungen in einem HILBERT-Raum zu erhalten, braucht man nur die durch die eindeutige, geordnete Zuordnung der Anfangsvektorgerüste gegebene lineare Abbildung zu nehmen.

Der folgende Satz zeigt, daß die Krümmungen unabhängige Invarianten der Kurve sind.

Satz 12.3. *Es seien für $s_0 \leq s \leq s_1$ abzählbar unendlich viele positive, unendlich oft differenzierbare Funktionen $\varkappa_{(n)}(s)$ vorgegeben, für welche die Voraussetzungen von Satz 12.2 zutreffen, ferner abzählbar unendlich viele Orthonormalvektoren $\mathring{\tilde{\eta}}^i_{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\mathring{x}^i$. Dann gibt es stets eine Kurve $x^i(s)$ mit $x^i(s_0) = \mathring{x}^i$, deren Krümmungen die $\varkappa_{(n)}(s)$ sind und deren Normalengerüst für $s = s_0$ durch die $\mathring{\tilde{\eta}}^i_{(n)}$ gegeben ist.*

Beweis. Wie im Beweise zu Satz 12.2 erhält man jedenfalls einen Lösungsvektor $\mathfrak{y}(s) = \{x(s), \tilde{\eta}_{(1)}(s), \tilde{\eta}_{(2)}(s), \ldots\}$, der in $\mathfrak{B}$ gelegen ist und für $s = s_0$ die Anfangsbedingung erfüllt. Die $\tilde{\eta}_{(n)}(s)$ bilden nicht nur für $s = s_0$, sondern für alle s ein Orthonormalsystem, wie man folgendermaßen einsieht:

$$\frac{\delta}{ds}\left(g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\tilde{\eta}^k_{(n)}\right) = g_{ik}(x)\,\frac{\delta^*\tilde{\eta}^i_{(m)}}{ds}\tilde{\eta}^k_{(n)} + g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\frac{\delta^*\tilde{\eta}^i_{(n)}}{ds}$$

$$= \sum_r \varkappa_{(mr)}\left(g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(r)}\tilde{\eta}^k_{(n)}\right) + \sum_r \varkappa_{(nr)}\,g_{ik}(x)\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\tilde{\eta}^k_{(r)}.$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für die Matrix $\left(a_{(mn)}(s)\right) = \left(g_{ik}(x(s))\,\tilde{\eta}^i_{(m)}\tilde{\eta}^k_{(n)}\right)$ mit der Anfangsbedingung $a_{(mn)}(s_0) = \delta_{(mn)}$. Mit $\|(a_{(mn)})\| = \sup_{m,n}|a_{(mn)}|$ gilt, daß die rechte Seite dieser Differentialgleichung einer LIPSCHITZ-Bedingung mit der Konstanten $4M$ genügt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Krümmungen sind auch die als Koeffizientenmatrizen auftretenden Krümmungsmatrizen in dem so normierten Matrixraum stetige Funktionen von s. Daraus folgt wieder nach dem KERNERschen Satze die Eindeutigkeit der Lösung, und da $a_{(mn)}(s) = \delta_{(mn)}$ wegen der Schiefsymmetrie der $\varkappa_{(mn)}$ eine Lösung ist, ist es die einzige.

Ist $\mathfrak{y}(s) \in \mathfrak{B}$ der nach dem Beweise zu Satz 12.2 konstruierte Lösungsvektor der Fundamentalformeln, so gilt für ihn:

$$\|\mathfrak{y}(s)\| = \sup_n \|\tilde{\eta}_{(n)}(s)\| = A(s) < \infty,$$

also

$$\sup_{m,n}\left|\left(g_{ik}(x(s))\,\tilde{\eta}^i_{(m)}(s)\,\tilde{\eta}^k_{(n)}(s)\right)\right| \leq \|g_{ik}(s)\| \cdot \sup_{m,n}\|\tilde{\eta}^i_{(m)}(s)\| \cdot \|\tilde{\eta}^k_{(n)}(s)\|$$

$$= \|g_{ik}\| \cdot A^2 < \infty;$$

diese Matrix liegt also für alle s in dem Matrizenraum. Da sie auch die Anfangsbedingungen und die Matrixdifferentialgleichung erfüllt, folgt wegen der Eindeutigkeit:

$$g_{ik}\left(x(s)\right)\tilde{\eta}^i_{(m)}(s)\,\tilde{\eta}^k_{(n)}(s) \equiv \delta_{(m\,n)}, \qquad \text{für alle } m, n, s.$$

Die $\tilde{\eta}^i_{(n)}(s)$ bilden also ein Orthonormalsystem.

Wir müssen nun noch zeigen, daß die $\tilde{\eta}^i_{(n)}$ das begleitende Vektorgerüst der Kurve $x^i(s)$ darstellen und daß die $\varkappa_{(n)}(s)$ deren Krümmungen sind. Zunächst bemerken wir, daß $x^i(s)$ wegen des Bestehens des Differentialgleichungssystems der Fundamentalformeln unendlich oft differenzierbar ist, da g_{ik} und damit Γ diese Eigenschaft hat. Wir berechnen die kovarianten Ableitungen von $x^i(s)$:

$$\xi_{(1)}(s) = \frac{\delta^* x(s)}{ds} = \frac{\delta x(s)}{ds} = \tilde{\eta}_{(1)}(s),$$

$$\xi_{(2)}(s) = \frac{\delta^* \xi_{(1)}(s)}{ds} = \varkappa_{(1)}(s)\,\tilde{\eta}_{(2)}(s),$$

$$\xi_{(3)}(s) = \frac{\delta^* \xi_{(2)}(s)}{ds} = \varkappa'_{(1)}(s)\,\tilde{\eta}_{(2)}(s) + \varkappa_{(1)}(s)\left\{-\varkappa_{(1)}(s)\,\tilde{\eta}_{(1)}(s) + \varkappa_{(2)}(s)\,\eta_{(3)}(s)\right\}.$$

$$\vdots$$

Bezeichnen wir wieder mit $\eta^i_{(n)}$ die durch SCHMIDTsche Orthogonalisierung aus den $\xi^i_{(n)}$ gewonnenen Normalenvektoren von $x(s)$, so muß jedenfalls gelten

$$\tilde{\eta}_{(n)}(s) = (-1)^{\delta_{(n)}}\eta_{(n)}(s).$$

Denn nach den Ausdrücken für die $\xi_{(n)}$ sind auch die $\eta_{(n)}$ Orthonormalvektoren mit der Eigenschaft, daß jeweils der n-te von ihnen sich aus den $\xi_{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ linear kombinieren läßt, da der Koeffizient von $\eta_{(n)}$ im Ausdruck für $\xi_{(n)}$ wegen $\varkappa_\nu(s) > 0$ nicht verschwindet.

Die zu $x(s)$ gehörigen Krümmungen sind definiert durch

$$k_{(n)}(s) = g_{ik}\left(x(s)\right)\frac{\delta^* \eta_{(n)}}{ds}\,\eta_{(n+1)} = (-1)^{\delta_{(n)}+\delta_{(n+1)}}\varkappa_{(n)}(s).$$

Da $k_{(n)}$ und $\varkappa_{(n)}$ beide stets positiv sind, gilt

$$\delta_{(n)} + \delta_{(n+1)} \equiv 0 \pmod 2.$$

Es sind also entweder alle $\delta_{(n)} \equiv 1 \pmod 2$ oder alle $\delta_{(n)} \equiv 0 \pmod 2$. Da $\eta_{(1)}(s) = \tilde{\eta}_{(1)}(s) = \xi_{(1)}(s)$, sind also alle $\delta_{(n)} \equiv 0 \pmod 2$. Damit ist bewiesen, daß $\varkappa_{(n)}(s)$, $\eta^i_{(n)}(s)$ wirklich die zu $x^i(s)$ gehörigen Krümmungen und Gerüstvektoren sind.

Göttingen, Nußanger 70.

(Eingegangen am 22. Juni 1954.)

ROSENBERG, A.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 150—159 (1954)

Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linear transformations*).

By
ALEX ROSENBERG.

Introduction.

If $\mathfrak{M}$ is a left vector space and $\mathfrak{N}$ a right vector space over a division ring D, and if they are linked by an inner product (x, f) which is a non-degenerate bilinear function from $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ to D, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ are called dual spaces over D [4], [7]. If $\mathfrak{K}$ is a subspace of $\mathfrak{M}$, the annihilator of $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{N}$ is the set of all vectors f in $\mathfrak{N}$ such that $(\mathfrak{K}, f) = 0$. The annihilator is a subspace of $\mathfrak{N}$ and is denoted by $\mathfrak{K}'$. A similar definition holds for the annihilator $\mathfrak{L}'$ in $\mathfrak{M}$ of a subspace $\mathfrak{L}$ of $\mathfrak{N}$. A subspace $\mathfrak{K}$ of $\mathfrak{M}$ is called closed if $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}$ [7]. Closure of subspaces in this sense is the same as closure in the $\mathfrak{N}$-topology of $\mathfrak{M}$: The neighborhoods of an element x of $\mathfrak{M}$ are the cosets $x + \mathfrak{F}'$ where $\mathfrak{F}$ is any finite-dimensional subspace of $\mathfrak{N}$ [4, p. 16]. It is then known that a semi-linear transformation T of $\mathfrak{M}$, with associated automorphism σ of D, is continuous in this topology if and only if there exists a semi-linear transformation T^* of $\mathfrak{N}$, with associated automorphism σ of D, such that $(xT, f) = \sigma(x, T^* f)$; in particular, a linear transformation T of $\mathfrak{M}$ is continuous if and only if there exists a linear transformation T^* of $\mathfrak{N}$ such that $(xT, f) = (x, T^* f)$, [4, p. 17]. If T is a continuous semi-linear transformation, T^* is called the adjoint of T. The ring of all continuous linear transformations will be denoted by $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. We shall always write linear transformations of $\mathfrak{M}$ on the right, linear transformations of $\mathfrak{N}$ on the left. Thus if T, S are in $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $(TS)^* = T^* S^*$ and the mapping $T \to T^*$ gives an isomorphism of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. In general if R is a ring generated by continuous semi-linear transformations we shall denote the ring generated by the adjoints of elements of R by R^*.

Rings of the form $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ are of interest for two reasons. Firstly, they form a special class of primitive rings [3] and the latter play a role in the general structure theory of rings analogous to that played by simple rings in the structure theory of rings with descending chain condition. Secondly, the rings of all bounded operators on BANACH spaces are rings of this type.

In this paper we study simple finite-dimensional subalgebras (over the center of D) of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. First the centralizer of such an algebra is determined and is seen to be isomorphic to $L(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ dual spaces over a division ring. Taking the centralizer again yields the original subalgebra. Next, we

*) Presented to the American Mathematical Society, May 1, 1954. Part of this work was carried out while the author held a research grant from the National Science Foundation.

specialize to the case where D is an algebraically closed field and then can prove a refinement of the first result as well as being able to find all those subalgebras whose centralizers are simple finite-dimensional algebras. In the third section, still sticking to an algebraically closed field, we show that an isomorphism between two simple finite-dimensional subalgebras can be extended to an inner one of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ if and only if the centralizers are isomorphic. Finally, if $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ are dual spaces over a division ring, both of countably infinite dimension, we show that every isomorphism of two simple finite-dimensional subalgebras of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ can be extended to an inner one of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

I should like to take this opportunity to thank Prof. I. KAPLANSKY who first suggested some of these problems to me. My thanks are also due to Prof. N. JACOBSON for allowing me to read parts of a manuscript of a forthcoming book on the theory of rings.

§ 1. Centralizers of subalgebras.

Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be a pair of dual spaces over a division ring D, whose center we denote by Φ. We write $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ for the ring of all linear transformations with adjoints on $\mathfrak{N}$ and $F = F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ for its socle, all those elements of A whose ranges are finite-dimensional. We shall use the notations E and E_c for the ring of all endomorphisms of the abelian group $\mathfrak{M}$ and for the ring of all endomorphisms which are continuous in the $\mathfrak{N}$-topology, respectively. For each α in D we denote the mapping $x \to \alpha x$ of $\mathfrak{M}$ by α_L; α_L is a continuous semi-linear transformation with adjoint $f \to f\alpha$ on $\mathfrak{N}$. We write D_L for the set of α_L and note that the center of A is Φ_L [5, p. 266].

Let B_0 be a simple finite-dimensional subalgebra[1]) of A containing the unit of A. We wish to study the centralizer $C = A(B_0)$ of B_0 in A, i.e., the set of all those c in A such that $bc = cb$ for every b in B_0. Now C can also be thought of as the set of all those continuous endomorphisms of $\mathfrak{M}$ which commute with every element of B_0 and D_L, $C = E_c(B_0 D_L)$. Furthermore, $B_0 D_L \cong B_0 \otimes_\Phi D_L$ [1, Theorem 7.1 D], and the latter is a simple ring satisfying the descending chain condition [1, Corollary 7.1 C].

For future applications in establishing a GALOIS theory for A we shall study a slightly more general situation: We let B be a simple subring of E_c, satisfying the descending chain condition and containing the unit of A. We further suppose that $B \supset D_L$ and has a finite left basis of continuous semi-linear transformations over it. Clearly $B_0 D_L$ satisfies all these conditions. Also, such rings are of interest since the fixed rings of certain kinds of groups of automorphisms of A are precisely the centralizers in E_c of rings satisfying the same conditions as B [9, p. 282]. Even though the elements of B are not necessarily semi-linear transformations we may speak of their adjoints; since every b in $B = \sum \alpha_L T$, T independent continuous semi-linear transformations, $b^* = \sum \alpha_L^* T^*$ is a perfectly well defined mapping of N and B^* is isomorphic to B. Of course, the equation $(xb, f) = (x, b^* f)$ will in general be false.

[1]) Throughout this paper all algebras have base field Φ_L.

B is simple with the descending chain condition and so every unitary right B-module will be completely reducible [6, Lemma 1]. Thus let $\mathfrak{U}$ be an irreducible right B-submodule of $\mathfrak{M}$. Since $D_L \subset B$, $\mathfrak{U}$ is a subspace and since B has finite left dimension over D_L, $\mathfrak{U}$ is a finite-dimensional subspace of $\mathfrak{M}$. Now if $(\mathfrak{U}, f) = 0$, by writting $b = \sum \alpha_L T$, with T continuous semi-linear transformations in B, we easily verify $(\mathfrak{U}, b^* f) = 0$ so that $\mathfrak{U}'$ is a left B^*-module. Since $\mathfrak{N}$ is a completely reducible left B^*-module we may write $\mathfrak{N} = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{U}'$ where $\mathfrak{V}$ is a left B^*-module and so a subspace. But then by Theorem III-10 of [7] the dimension of $\mathfrak{V}$ is the dimension of $\mathfrak{U}$, so that $\mathfrak{V}$ is an irreducible left B^*-module also. Since it can easily be seen that $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}' = 0$, the same theorem yields $\mathfrak{M} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{V}'$, so that $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ are a pair of dual spaces over D which are also irreducible right B and left B^*-modules respectively. We now define a linear transformation e on $\mathfrak{M}$ by $u e = u$, u in $\mathfrak{U}$; $x e = 0$, x in $\mathfrak{V}'$. It is then easily verified that e has an adjoint e^* which is the identity on $\mathfrak{V}$ and annihilates $\mathfrak{U}'$ so that e is in $E_c(B) = C$.

Clearly eCe is a ring of endomorphisms of $\mathfrak{U}$ which commute with those induced on $\mathfrak{U}$ by B. Conversely if c_1 is an endomorphism of $\mathfrak{U}$ commuting with those induced by B, it commutes with those induced by D_L and so is a linear transformation of $\mathfrak{U}$, and thus has an adjoint c_1^* on $\mathfrak{V}$. We then extend c_1 to an element c of A, by letting $c = c_1$, $c^* = c_1^*$ on $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{V}$, and letting $\mathfrak{V}' c = c^* \mathfrak{U}' = 0$. It is then clear that c is in eCe, so that eCe is the ring of all endomorphisms of $\mathfrak{U}$ commuting with B. Thus by SCHUR's Lemma eCe is a division ring and B induces the ring of all linear transformations on the finite-dimensional right eCe-space $\mathfrak{U}$. Then

Lemma 1. $\mathfrak{U} eC = \mathfrak{M}$, $C^* e^* \mathfrak{V} = \mathfrak{N}$.

Proof. For any x in $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{U} + xB$ is a finite-dimensional subspace and a completely reducible right B-module. Then just as above we can write $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{L}'$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{R}'$ where $\mathfrak{L}$ is a completely reducible left B^*-module and a space dual to $\mathfrak{R}$ relative to the bilinear form linking $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$. We write $\mathfrak{R} = \sum_1^n{}_{\oplus} \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}_i$ irreducible right B-modules. All the $\mathfrak{U}_i$ are B isomorphic, and we denote a fixed such isomorphism of $\mathfrak{U}_1$ onto $\mathfrak{U}_i$ by e_{1i}. By requiring e_{1i} to annihilate $\mathfrak{U}_j$, $j \neq 1$, we extend it to a mapping of all of $\mathfrak{R}$ and since $D_L \subset B$, e_{1i} is a linear transformation of $\mathfrak{R}$. Therefore e_{1i} has an adjoint e_{1i}^* on $\mathfrak{L}$, and if we set $\mathfrak{L}' e_{1i} = 0 = e_{1i}^* \mathfrak{R}'$, e_{1i} becomes an element of C. Proceeding similarly with the inverse B-isomorphism of $\mathfrak{U}_i$ onto $\mathfrak{U}_1$, we obtain an element e_{i1} of C such that $e_{1i} e_{i1} = e$ and $e_{i1} e_{1i} = e_{ii}$, where e_{ii} is an element of C which is the identity map on $\mathfrak{U}_i$ and annihilates $\sum_{j \neq i}{}_{\oplus} \mathfrak{U}_j \oplus \mathfrak{L}'$. Since $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U} e e_{1i}$, we see that $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{U} eC$ and so $\mathfrak{M} = \mathfrak{U} eC$. Similarly, $\mathfrak{N} = C^* e^* \mathfrak{V}$.

We recall that a ring R is right primitive if it admits a faithful irreducible right-module [3, Theorem 21]. If, moreover, R has a minimal right ideal, it is known that there exists a pair of dual spaces $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ over a division ring, such that $F(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \subseteq R \subseteq L(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, [4, Theorem 8]. In this case R possesses both left and right minimal ideals which are of the form Re, eR; $e^2 = e \neq 0$,

eRe a division ring [4, p. 13]. Then, as is easily seen, eR, Re are dual spaces over eRe with regard to the bilinear function $(ep, qe) = epqe$. Furthermore a right multiplication by an element of R on eR is a linear transformation on eR, with adjoint the left multiplication by the same element on Re, and it can be shown that $F(eR, Re) \subseteq R \subseteq L(eR, Re)$[2].

Lemma 2. *C is a primitive ring with minimal ideals.*

Proof. We first show that C has no nonzero nilpotent two-sided ideals, thus proving that eC is a minimal right ideal [1, Theorem 5.4A]. Thus, let I be a two-sided nilpotent ideal in C. Then $eIe < I$ and since eCe is a division ring, $eIe = 0$. Hence $\mathfrak{U}Ie = \mathfrak{U}eIe = 0$, and since $\mathfrak{M}I = \mathfrak{U}eCI < \mathfrak{U}I$ we have $\mathfrak{M}Ie = \mathfrak{U}Ie = 0$, so that $Ie = 0$. But then $I^*e^* = 0$ and since $I^*\mathfrak{V} = I^*\mathfrak{N}$, $I^*\mathfrak{N} = I^*e^*\mathfrak{V} = 0$, $I^* = I = 0$. To complete the proof we note that $eCd = 0$ implies $\mathfrak{M}d = \mathfrak{U}eCd = 0$ so that $d = 0$. Thus eC is faithful as well as being irreducible.

We now know that $F(eC, Ce) \subseteq C \subseteq L(eC, Ce)$ and shall finish up by proving that $C \cong L(eC, Ce)$. We first have

Lemma 3. *For any x in $\mathfrak{M}$ let $\sum_1^n{}_{\oplus}\, \mathfrak{U}_i = \sum_1^n{}_{\oplus}\, \mathfrak{W}_i$ be two splittings of $\mathfrak{U} + xB$ into irreducible right B-modules with $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{U}$. Let e_{1i}, f_{1j} be B isomorphisms of $\mathfrak{U}$ onto $\mathfrak{U}_i$ and $\mathfrak{W}_j$ respectively extended to elements of C as in Lemma 1. Then $f_{1j} = \sum_i \alpha_{ij} e_{1i}$, α_{ij} in eCe.*

Proof. From the definitions given in the proof of Lemma 1 it is clear that $\sum e_{ii}$ acts as the identity on $\mathfrak{U} + xB$. Thus $f_{1j} = f_{1j}\sum e_{ii} = \sum (f_{1j}e_{i1})\, e_{1i}$, and $f_{1j}\, e_{i1}$ is clearly an element of eCe.

Now let τ be any element of $L(eC, Ce)$ with adjoint τ^*. That is, $(ec)^\tau$ and $(de)^{\tau^*}$ are again element of eC and Ce respectively, and $(ec)^\tau de = ec\,(de)^{\tau^*}$. For any x in $\mathfrak{M}$ and f in $\mathfrak{N}$, we have $\mathfrak{U} + xB = \sum_1^n{}_{\oplus}\, \mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{V} + B^*f = \sum_1^m{}_{\oplus}\, \mathfrak{V}_j$ where $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}$; $\mathfrak{U}_i$ an irreducible right B-module, $\mathfrak{V}_j$ an irreducible left B^*-module. Then as in Lemma 1, there are elements e_{1i}, g_{j1} in eC and Ce, respectively such that $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}e_{1i}$, $\mathfrak{V}_j = g_{j1}^*\mathfrak{V}$. Thus $x = \sum_1^n u_i e_{1i}$, $f = \sum_1^n g_{j1}^* v_j$, u_i in $\mathfrak{U}$, v_j in $\mathfrak{V}$. Now for any τ in $L(eC, Ce)$ we define

$$x\,t = \sum_1^n u_i\,(e_{1i})^\tau, \qquad t^*\,f = \sum_1^m (g_{j1}^{\tau^*})^*\, v_j.$$

We first show that t is a well defined mapping of $\mathfrak{M}$. Let $x = \sum u_i e_{1i} = \sum w_j f_{1j}$ be two different splittings of x arising from two, not necessarily distinct, splittings of $\mathfrak{U} + xB$. By Lemma 3, $f_{1j} = \sum \alpha_{ij} e_{1i}$, α_{ij} in eCe. Thus,

$$\sum_j w_j (f_{1j})^\tau = \sum_j w_j (\sum \alpha_{ij}\, e_{1i})^\tau = \sum_{i,j} w_j\, \alpha_{ij} (e_{1i})^\tau,$$

[2]) This method of proving Theorem 8 of [4] is due to Prof. KAPLANSKY. It has only been published in mimeographed lecture notes, but will be included in a forthcoming book by Prof. JACOBSON.

since τ is linear with regard to eCe. But $\sum_j w_j \alpha_{ij} = u_i$ so that $\sum w_j (f_{1j})^\tau = \sum u_i (e_{1i})^\tau$. A similar calculation shows that t^* is a well defined mapping of $\mathfrak{N}$.

It is easily seen that t is a linear transformation of $\mathfrak{M}$ and we shall now show that t^* is its adjoint on $\mathfrak{N}$:

$$(xt, f) = \left(\sum_i u_i (e_{1i})^\tau, \sum_j g_{j1}^* v_j\right) = \sum_{i,j} \left(u_i (e_{1i})^\tau g_{j1}, v_j\right)$$

$$= \sum_{i,j} \left(u_i e_{1i} (g_{j1})^{\tau^*}, v_j\right) = (x, t^* f).$$

Finally $xb = \sum (u_i e_{1i}) b = \sum (u_i b) e_{1i}$, so $xbt = \sum (u_i b)\,(e_{1i})^\tau = \sum u_i (e_{1i})^\tau b = xtb$ so that t is in C. Now if c is in C it becomes an element of $L(eC, Ce)$ by letting it act on eC as a right multiplication. Thus the embedding of C into A as a subring of $L(eC, Ce)$ which we have given above, coincides with the already given embedding of C as $E_c(B)$. Thus the mapping $\tau \to t$ is a homomorphism of $L(eC, Ce)$ onto C. The kernel is either 0 or contains $F(eC, Ce)$, the socle of $L(eC, Ce)$ [3, Theorem 29]. But e is in $F(eC, Ce)$ and is not mapped into 0, thus C is isomorphic to $L(eC, Ce)$.

Now if S is the socle of C, $F = F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ the socle of A, e is in $S \cap F$, and so $S \cap F$ is a nonzero two-sided ideal of the simple ring S, so that $S = S \cap F < F$. Since $\mathfrak{M} = \mathfrak{U} eC$, and $eC < S$, $\mathfrak{M} S = \mathfrak{M}$ and $S^* \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ by a similar argument. The last two conditions are known to be independent [10, p. 131].

The index of D_L in B, $i[B:D_L]$ as defined by DIEUDONNÉ [2, p. 159] is the number of minimal right or left ideals that occur in a direct sum decomposition of B; it is well known that $i[B:D_L] =$ dimension of $\mathfrak{U}$ as a right eCe-space. The right and left heights of C in A have also been defined in [2]: $h[A:C]_r =$ the number of irreducible right C-modules that occur in a direct sum decomposition of $\mathfrak{M}$, $h[A:C]_l =$ the number of irreducible left C^*-modules that occur in a direct sum decomposition of $\mathfrak{N}$. We proceed to show that $i[B:D_L] = h[A:C]_l = h[A:C]_r$. Let $x_1, x_2, \ldots, x_k$ be an eCe basis of $\mathfrak{U}$. Then $x_i eC$ is a nonzero homomorphic image of the irreducible right C-module, eC, and so is itself irreducible. Since $\mathfrak{U} eC = \mathfrak{M}$, the sum of the $x_i eC$ is $\mathfrak{M}$, and it only remains to show that the $x_i eC$ are independent. If x is in $x_i eC \cap \sum_{j \neq i} x_j eC$, $x = x_i e d_i = \sum_{i \neq j} x_j e d_j$, d_r in C. But there is a b in B such that $x_i b = x_i$; $x_j b = 0$, $j \neq i$; thus $x = x_i b e d_i = \sum_{i \neq j} (x_j e d_j) b = 0$. Exactly the same proof works for $\mathfrak{N}$.

Finally we compute $E_c(C)$. Clearly $E(C) > E_c(C) > B$. Now C is a completely reducible ring of endomorphisms of $\mathfrak{M}$, and so by a result of DIEUDONNÉ [2, p. 157], $E(C)$ is isomorphic to the ring of all linear transformations on a right eCe space of dimension $h[A:C]_r$, i.e. $E(C) \cong B$. Furthermore $\mathfrak{U} = \mathfrak{M} e$ is a right $E(C)$-module, and since it already is irreducible as a right B-module it also is an irreducible right $E(C)$-module. Furthermore the ring of endomorphisms of $\mathfrak{U}$ that commute with those induced by $E(C)$ is precisely eCe [2, p. 157], and so B and $E(C)$ induce the same ring on $\mathfrak{U}$. Since $E(C)$ is simple, no element of it annihilates $\mathfrak{U}$ and so $B = E(C) = E_c(C)$.

We have proved

Theorem 1. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be a pair of dual spaces over a division ring D. Let B be a subring of E_c, the ring of all continuous endomorphisms of $\mathfrak{M}$, which contains the unit of E_c and satisfies*

(i) *B is simple with the descending chain condition.*

(ii) *B contains D_L and has a finite left basis of continuous semi-linear transformations over it.*

Then if $C = E_c(B)$, the centralizer of B in C, C is a subring of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ satisfying:

(i) *C is a ring of the form $L(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$, $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ dual spaces over a division ring.*

(ii) *If S is the socle of C, $S < F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$; $\mathfrak{M}S = \mathfrak{M}$; $S^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$.*

(iii) $i[B:D_L] = h[A:C]_r = h[A:C]_l$.

(iv) $E_c\big(E_c(B)\big) = B$.

If $B = B_0 D_L \cong B_0 \otimes_{\Phi} D_L$ with B_0 a finite-dimensional simple subalgebra of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, we have that $A(B_0) = E_c(B)$ and that $A\big(A(B_0)\big) = E_c\big(E_c(B)\big) \cap A = B_0 D_L \cap A = B(D_L) = B_0$ by Lemma 7.3 of [1]. Thus

Corollary 1. *If B_0 is a simple finite-dimensional subalgebra of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $A(B_0)$ has all the properties of C in Theorem 1 and $A\big(A(B_0)\big) = B_0$.*

§ 2. The algebraically closed case.

We now specialize to the case $D = \Phi$, an algebraically closed field. Then $B = B_0$ simply becomes a matric algebra over Φ and so $eCe = \Phi_L e$. Moreover the irreducible right $C = E_c(B) = A(B_0)$-modules are now subspaces and so C is the ring of all continuous linear transformations on a pair of dual spaces over Φ. However, even more is true: Let $x_1 \dots x_k$ be a $\Phi_L e = eCe$ basis of $\mathfrak{U}$ and let $f_1, \dots, f_k$ be the dual basis of $\mathfrak{V}$, i.e. $(x_i, f_j) = \delta_{ij}$. As we saw $x_i eC$ and $C^* e^* f_j$ are irreducible right C- and left C^*-modules whose direct sum is $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ respectively. Now if $i \neq j$ $(x_i ec, d^* e^* f_j) = (x_i ecde, f_j) = 0$ since $ecde$ is in $\Phi_L e$. If $(x_i ec, C^* e^* f_i) = 0$, $(x_i ecCe, f_i) = 0$ so that $ecCe = 0$. Now if $ec \neq 0$, the right annihilator of Ce would be a nonzero two-sided ideal and so contain S, the socle of C [3, Theorem 29]. Thus $eCe = 0$, a contradiction. Similarly we see that $(x_i eC, d^* e^* f_i) = 0$ implies $de = 0$ so that $\mathfrak{M}_i = x_i eC$, $\mathfrak{N}_i = C^* e^* f_i$ are dual spaces over Φ. Moreover $(x_i ec, d^* e^* f_i) = \alpha$ where $ecde = \alpha_L e$ in $\Phi_L e$, so that the inner product between $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ as subspaces of $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ is the same as that linking eC, Ce. It follows that C is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$, the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$, since the irreducible C and C^* modules are unique [4]. Thus we have

Theorem 2. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over an algebraically closed field Φ and let B be a simple finite-dimensional subalgebra of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, containing the unit element of $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Then $\mathfrak{M} = \sum_1^k{}_{\oplus} \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^k{}_{\oplus} \mathfrak{N}_i$; $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_j) = 0$; $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ dual spaces, and $A(B)$ is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$, the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$. Furthermore, $k^2 = [B:\Phi_L]$ and $A\big(A(B)\big) = B$.*

The splitting of the dual spaces $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ into a direct sum of the isomorphic[3]) dual spaces $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ can also be expressed by saying that $\mathfrak{M}$ is a direct sum of closed irreducible right C-subspaces, $\mathfrak{M}_i$, and that C is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}/(\mathfrak{M}_i)')$.

In this case we can prove a converse:

Theorem 3. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over an algebraically closed field Φ. Let C be a subalgebra of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, containing the unit of A and satisfying*

(i) *C is of the form $L(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$; $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ dual spaces over a division ring.*

(ii) *If $S = F(\mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ is the socle of C, $S < F(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ and $\mathfrak{M}S = \mathfrak{M}$, $S^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$.*

Then $h[A:C]_r = h[A:C]_l = k < \infty$ and $A(C)$ is isomorphic to the algebra of $k \times k$ matrices over Φ.

Proof. $\mathfrak{M}$ splits into a direct sum of a certain number of isomorphic irreducible right C-modules which are all subspaces since $C > \Phi_L$ [6, Lemma 1]. Hence for any s in S, the dimension of $\mathfrak{M}s$ is at least the number of these summands. Since s is finite valued, $h[A:C]_r = k < \infty$[4]). Now an irreducible right C-module is isomorphic to a minimal right ideal and so is also an irreducible S module. Thus by Theorem 6 of [10] $\mathfrak{M} = \sum_1^k{}_{\oplus} \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^k{}_{\oplus} \mathfrak{N}_i$; $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_j) = 0$; $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i$ dual spaces over Φ; and S is isomorphic to $F(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$ the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$. Since $\mathfrak{M}_i C = \mathfrak{M}_i S C = \mathfrak{M}_i S$, $\mathfrak{M}_i$ and $\mathfrak{N}_i$ are irreducible right C and left C^*-modules respectively and since the irreducible representations of C and C^* are unique [4], C is isomorphic to $L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$, the ring it induces on $\mathfrak{M}_i$. Hence $L(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1) \cong L(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$ where the isomorphism is effected by restricting the same element of C to $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{M}_i$. Thus by [5, Theorem 7, p. 266] there exist an invertible semi-linear transformation e_{1i} of $\mathfrak{M}_1$ to $\mathfrak{M}_i$ which has an adjoint e_{1i}^* from $\mathfrak{N}_i$ to $\mathfrak{N}_1$, such that $\mathfrak{M}_1 e_{1i} c = \mathfrak{M}_1 c e_{1i}$. Since $\Phi_L < C$, e_{1i} is actually a linear transformation of $\mathfrak{M}_1$ onto $\mathfrak{M}_i$. By defining $\mathfrak{M}_j e_{1i} = 0$, $j \neq 1$, e_{1i} becomes an element of $A(C)$, since e_{1i}^* can be extended in the obvious way. From this point on the proof that $A(C) = \Phi_k$ is well known, for example it may be found on p. 44 of [1].

Theorem 3 shows that in the algebraically closed case we get a one-to-one correspondence between the simple subalgebras of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ and those algebras C having the properties listed in the theorem. This is the beginning of a GALOIS theory for A and we hope to develop such a theory in a subsequent paper.

§ 3. Isomorphic subalgebras.

We have

Theorem 4. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over an algebraically closed field Φ and let $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Let B and $\bar{B}$ be two Φ-isomorphic[5]) simple finite-dimensional subalgebras of A, both containing the unit of A. Then the isomorphism*

[3]) For the obvious definitions of direct sum and isomorphism of dual spaces cf. [7, p. 160].

[4]) We take this opportunity to remark that this argument shows that what was called "the height of B in A" on p. 126 of [10] is finite.

[5]) I.e., the isomorphism leaves Φ elementwise fixed.

between B and $\overline{B}$ can be extended to an inner one of A if and only if $A(B)$ and $A(\overline{B})$ are also Φ-isomorphic.

Proof. If the isomorphism can be extended to an inner one it is clear that $A(B)$ and $A(\overline{B})$ are also conjugate [2, p. 175].

Now suppose that $A(B)=C$, and $A(\overline{B})=\overline{C}$ are Φ-isomorphic. Then since B and $\overline{B}$ are isomorphic, Theorem 2 yields $h[A:C]_r = h[A:\overline{C}]_r = \sqrt{[B:\Phi]} = k < \infty$. Let $\mathfrak{M}=\sum_1^k{}_{\oplus}\,\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}=\sum_1^k{}_{\oplus}\,\mathfrak{N}_i$ be a splitting for C as described in Theorem 2 and let $\overline{\mathfrak{M}}=\sum_1^k{}_{\oplus}\,\overline{\mathfrak{M}}_i$, $\overline{\mathfrak{N}}=\sum_1^k{}_{\oplus}\,\overline{\mathfrak{N}}_i$ be such a splitting for $\overline{C}$. If τ is a Φ-isomorphism of C onto $\overline{C}$ the mapping $c\to\tau(c)$ where c and $\tau(c)$ are restricted to $\mathfrak{M}_i$ and $\overline{\mathfrak{M}}_i$ respectively induces an isomorphism of $L(\mathfrak{M}_i,\mathfrak{N}_i)$ onto $L(\overline{\mathfrak{M}}_i,\overline{\mathfrak{N}}_i)$. Again by [5, Theorem 7, p. 266] there is an invertible semi-linear transformation P_i from $\mathfrak{M}_i$ onto $\overline{\mathfrak{M}}_i$, with adjoint P_i^* from $\overline{\mathfrak{N}}_i$ to $\mathfrak{N}_i$ such that $\mathfrak{M}_i c P_i = \mathfrak{M}_i P_i \tau(c)$. Since τ is the identity on Φ it follows that P_i is actually linear. We now define a linear transformation P on $\mathfrak{M}$ by requiring it to act as P_i on $\mathfrak{M}_i$ and a linear transformation P^* on $\mathfrak{N}$ by requiring it to act as P_i^* on $\overline{\mathfrak{N}}_i$. It can then be verified that P^* is the adjoint of P, so that P is in A, and that $c=P\,\tau(c)\,P^{-1}$ [6]). Since $B=A(C)$ and $\overline{B}=A(\overline{C})$ this implies also that $P\overline{B}P^{-1}=B$. Now if σ is the given Φ-isomorphism of B onto $\overline{B}$ the mapping $P^{-1}bP\to\sigma(b)$ is a Φ-automorphism of $\overline{B}$. But by a well known theorem [1, Corollary 7.2D] every such automorphism of $\overline{B}$ is inner. Hence there is an element Q in $\overline{B}$ such that $QP^{-1}bPQ^{-1}=\sigma(b)$.

The condition that $C\cong\overline{C}$ when $B\cong\overline{B}$ can be reformulated in terms of the dual spaces $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. For since dual spaces over Φ are isomorphic if and only if the rings of all continuous linear transformations are Φ-isomorphic [7, Theorem III-4], $C\cong\overline{C}$ is equivalent to requiring $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ and $\overline{\mathfrak{M}}_j$, $\overline{\mathfrak{N}}_j$ to be isomorphic. Thus if every isomorphism between finite-dimensional simple subalgebras of A can be extended to an inner one, any two splittings of $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ into a direct sum of k isomorphic dual spaces must be equivalent in the sense that the summands from each splitting are isomorphic to one another. We do not know of an example of dual spaces over an algebraically closed field where two inequivalent splittings into the same number of isomorphic dual spaces exist, but we conjecture that there are such spaces, and in fact examples can probably be found already amongst complex BANACH spaces. We state this last problem explicitly for $k=2$, keeping in mind that in a BANACH space closure of a subspace in the sense $\mathfrak{F}''=\mathfrak{F}$ is the same as closure in the norm topology [7, p. 172]: *Is there a complex* BANACH *space* $\mathfrak{B}$ *such that* $\mathfrak{B}=\mathfrak{E}_1\oplus\mathfrak{E}_2=\mathfrak{F}_1\oplus\mathfrak{F}_2$, *where* $\mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{F}_i$ *are closed subspaces,* $\mathfrak{E}_1$ *is isomorphic to* $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{F}_1$ *isomorphic to* $\mathfrak{F}_2$, *but* $\mathfrak{E}_1$ *is not isomorphic to* $\mathfrak{F}_1$?

Now a HILBERT space $\mathfrak{M}$ is completely characterized by its dimension (cardinality of a maximal ortho-normal set), and if $\mathfrak{M}_i$ is a closed subspace of $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M}$ is a direct sum of a finite number of copies of $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}$ and

[6]) These calculations are carried out in detail in the proof of Theorem 7 of [10].

$\mathfrak{M}_i$ have the same dimension, so that $\mathfrak{M}_i$ is isomorphic to $\mathfrak{M}$. Thus if $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$ a complex HILBERT space, C is always isomorphic to $\bar{C}$ and we have

Corollary 2. *Let B and $\bar{B}$ be two simple isomorphic finite-dimensional subalgebras of A, the ring of all bounded operators on a complex* HILBERT *space. Then the isomorphism between B and $\bar{B}$ can be extended to an inner one of A.*

If $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}^*$, the space of all linear functionals on $\mathfrak{M}$, it is clear that the $\mathfrak{M}_i$ are also isomorphic to $\mathfrak{M}$ and so we get the algebraically closed case of Théorème 8a of [2]. Finally if both $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ have countable dimension over Φ, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ is isomorphic to $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ [7, Lemma, p. 171]. However, in that case we shall obtain the extension of isomorphism theorem even in the division ring case in the next section.

Some of the results of these last two paragraphs have been obtained for *-subalgebras of the ring of all bounded operators on a HILBERT space in [8].

§ 4. Isomorphic subalgebras in the countable-countable case.

We have

Theorem 5. *Let $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ be dual spaces over a division ring D both of countable dimension over D. Let B be a subring of E_c, the ring of continuous endomorphisms of $\mathfrak{M}$, which contains the unit of E_c and satisfies:*

(i) *B is simple with the descending chain condition.*

(ii) *B contains D_L and has a finite left basis of continuous semi-linear transformations over it.*

Then $\mathfrak{M}=\sum_1^\infty{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{N}=\sum_1^\infty{}_\oplus\,\mathfrak{V}_i$, where $\mathfrak{U}_i(\mathfrak{V}_i)$ are irreducible finite-dimensional right B (left B^*)-subspaces, $(\mathfrak{U}_i,\mathfrak{V}_j)=0$, and $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{V}_i$ are dual spaces over D.

Proof. This proof is modeled after that of the Lemma on p. 171 of [7]. Let $\{x_h\}$ be a basis of $\mathfrak{M}$, $\{f_h\}$ a basis of $\mathfrak{N}$. We suppose that $\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\ldots,\mathfrak{U}_n$; $\mathfrak{V}_1,\mathfrak{V}_2,\ldots,\mathfrak{V}_n$ with the desired properties have already been constructed and proceed to show how the next batch of $\mathfrak{U}$'s is added. It is clear that $\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i$, $\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{V}_i$ are finite-dimensional dual spaces, thus by Theorem III-2 of [7] we may write $\mathfrak{M}=\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i\oplus\left(\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{V}_i\right)'$, $\mathfrak{N}=\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{V}_i\oplus\left(\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i\right)'$ where $\mathfrak{M}_0=\left(\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{V}_i\right)'$, $\mathfrak{N}_0=\left(\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i\right)'$ are dual spaces which are right B and left B^*-modules respectively. Now let x_k be the first element of the basis not in $\sum_1^n{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i$ and suppose its component in $\mathfrak{M}_0$ is $\bar{x}_k$. Then $\bar{x}_kB$ is a completely reducible right B-submodule of $\mathfrak{M}_0$ and we may write $\bar{x}_kB=\sum_{n+1}^m{}_\oplus\,\mathfrak{U}_i$ where the $\mathfrak{U}_i$ are finite-dimensional irreducible B-subspaces of $\mathfrak{M}_0$. But then as in the proof of Lemma 1, $\mathfrak{M}_0=\bar{x}_kB\oplus\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{N}_0=\mathfrak{L}\oplus(\bar{x}_kB)'$ where $\mathfrak{L}$ is a finite-dimensional subspace which is also a left B^*-module and is dual to $\bar{x}_kB$.

But in finite-dimensional dual spaces all subspaces are closed, so that if we define $\mathfrak{V}_i = \left(\sum_{j \neq i} \mathfrak{U}_j\right)' \cap \mathfrak{L}$, $i, j = n+1, \ldots, m$, it is easily seen that $\mathfrak{L} = \sum_{n+1}^{m} \oplus \mathfrak{V}_i$ and the new $\mathfrak{V}_i$ satisfy all the requirements of the theorem. By interchanging the roles of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ at the next step we build the required decomposition.

As an immediate application we have

Theorem 6. *Let $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ be dual spaces over a division ring D with center Φ, both of countable dimension. Let B_0 and $\overline{B}_0$ be two Φ-isomorphic simple finite-dimensional subalgebras of $A = L(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ containing the unit of A. Then the isomorphism can be extended to an inner one of A.*

Proof. We form the rings $B = B_0 D_L$, $\overline{B} = \overline{B}_0 D_L$. As before $B \cong B_0 \otimes_\Phi D_L$, $\overline{B} \cong \overline{B}_0 \otimes_\Phi D_L$ and so the given isomorphism between B_0 and $\overline{B}_0$ can be extended in an obvious manner to an isomorphism of B onto $\overline{B}$ leaving D_L elementwise fixed. Let $\mathfrak{M} = \sum_1^\infty \oplus \mathfrak{U}_i = \sum_1^\infty \oplus \overline{\mathfrak{U}}_i$, $\mathfrak{N} = \sum_1^\infty \oplus \mathfrak{V}_i = \sum_1^\infty \oplus \overline{\mathfrak{V}}_i$, where the $\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_i$ are a splitting for B as in Theorem 5, and the $\overline{\mathfrak{U}}_i, \overline{\mathfrak{V}}_i$ are a splitting for $\overline{\mathfrak{B}}$ as in Theorem 5. Since all irreducible right B and $\overline{B}$-modules are isomorphic there exists an invertible endomorphism $\mathfrak{P}_i$ of $\mathfrak{U}_i$ onto $\overline{\mathfrak{U}}_i$ such that $\mathfrak{U}_i b P_i = \mathfrak{U}_i P_i \sigma(b)$, where σ is the given isomorphism of B onto $\overline{B}$ [2, p. 175]. If α is in D, $\sigma(\alpha_L) = \alpha_L$ so that P_i is a linear transformation. Since $\mathfrak{U}_i$ and $\overline{\mathfrak{U}}_i$ are finite-dimensional P_i has an adjoint P_i^* from $\overline{\mathfrak{V}}_i$ to $\mathfrak{V}_i$. Then exactly as in the proof of Theorem 4 we construct an invertible element P of A such that $\sigma(b) = P^{-1} b P$.

References.

[1] Artin, E., Nesbitt C. and Thrall R.: Rings with minimum condition. Ann Arbor 1948. — [2] Dieudonné, J.: La théorie de Galois des anneaux simples et semi-simples. Comment. Math. Helv. **21**, 154—184 (1948). — [3] Jacobson, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945). — [4] Jacobson, N.: On the theory of primitive rings. Ann. of Math. **48**, 8—21 (1947). — [5] Jacobson, N.: Lectures in abstract algebra, vol. II. New York 1953. — [6] Kaplansky, I.: Representations of separable algebras. Duke Math. J. **19**, 219—222 (1952). — [7] Mackey, G. W.: On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 155—207 (1945). — [8] Nakamura, M., and Turumaru T.: Simple algebras of completely continuous operators. Tôhoku Math. J. **4**, 303—308 (1952). — [9] Nakayama, T.: Galois theory of simple rings. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 276—292 (1952). — [10] Rosenberg, A.: Subrings of simple rings with minimal ideals. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 115—138 (1952).

Dept. of Math., Northwestern University, Evanston, Illinois (U.S.A.).

(Eingegangen am 30. Mai 1954.)

SCHÜTTE, K.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 160—179 (1954)

Ein widerspruchsloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage.

Von
KURT SCHÜTTE.

Zur Begründung der klassischen Analysis, deren Problematik in der imprädikativen Definition der reellen Zahl zugleich mit der uneingeschränkten Anwendung des tertium non datur liegt, besteht die Aufgabe, ein entsprechendes formales System als widerspruchsfrei nachzuweisen.

Als widerspruchsfrei bekannt ist eine „verzweigte" oder „konstruktive" Analysis, in der man nach LORENZEN[1]) die Fundamentalsätze der Analysis gewinnt, wenn man diese Sätze geeignet formuliert und die klassischen Beweise in geeigneter Weise abändert bzw. präzisiert. Diese Analysis hat eine verzweigte Typenlogik als Rahmen. Sie schließt die imprädikativen Begriffsbildungen vollständig aus und liefert demgemäß die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen, die z. B. in dem Satz von der unteren Grenze zum Ausdruck kommt, nur für einen prädikativen Mengenbegriff, wobei eine Menge reeller Zahlen natürlich nicht unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen definiert sein kann. Die reellen Zahlen der verzweigten Analysis sind zwar in einer beschränkten Sprache überabzählbar, aber abzählbar in einer hinreichend umfassenden Sprache.

In der vorliegenden Arbeit wird eine andere Möglichkeit zum widerspruchslosen Aufbau der Analysis angegeben. Hierbei liegt das von ACKERMANN[2]) als widerspruchsfrei nachgewiesene typenfreie System der Logik zugrunde. Dieses System läßt imprädikative Begriffsbildungen zu, was allerdings nur bei einer Einschränkung des tertium non datur in widerspruchsfreier Weise möglich ist. Das tertium non datur ist in dem typenfreien System nicht allgemein gegeben, aber doch weitgehend herleitbar. So läßt sich z. B., wie ACKERMANN gezeigt hat, in seinem System die gesamte verzweigte Typenlogik einschließlich des tertium non datur entwickeln.

Um die klassischen Schlußweisen trotz der hier eingeschränkten Anwendbarkeit des tertium non datur nach Möglichkeit zu retten, definieren wir den Mengenbegriff und damit den Begriff der reellen Zahl durch eine Herleitbarkeitsforderung, in der das tertium non datur enthalten ist. Hierzu wird ein fiktiver Beweisbarkeitsbegriff gebraucht, den wir im § 1 mit einer Erweiterung

[1]) LORENZEN, P.: Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis. Math. Z. **54**, 1—24 (1951). — Maß und Integral in der konstruktiven Analysis. Math. Z. **54**, 275—290 (1951).

[2]) ACKERMANN, W.: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. Math. Z. **55**, 364—384 (1952) u. **57**, 155—166 (1953).

des ACKERMANNschen Systems einführen und als widerspruchsfrei nachweisen. Das erweiterte System dürfte auch ohne den Einbau der Analysis von Interesse sein. § 3 zeigt, daß die in der verzweigten Typenlogik definierbaren Mengen unter den im § 2 eingeführten Mengenbegriff fallen. Demgemäß umfassen die im § 5 erklärten reellen Zahlen die reellen Zahlen der verzweigten Analysis. Dabei kommt man im Unterschied zur verzweigten Analysis mit einem einfachen logischen Rahmen ohne Typeneinteilung aus. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ergibt sich hier in anderer Weise als in der verzweigten Analysis, nämlich nicht durch eine Beschränkung der Sprache, sondern durch die starken Beweismittel des logischen Systems, in dem die reellen Zahlen mittels einer Herleitbarkeitsforderung abgegrenzt sind.

Eine Gemeinsamkeit mit der verzweigten Analysis besteht darin, daß ein Ausdruck, der auf die Gesamtheit der reellen Zahlen Bezug nimmt, im allgemeinen keine Menge darstellt. Daher sind auch hier zur Gewinnung der Fundamentalsätze geeignete Abänderungen oder Ergänzungen der klassischen Beweise vorzunehmen. § 6 gibt ein Beispiel dafür.

§ 1. Das logische System.

Wir legen ein nach ACKERMANN gebildetes typenfreies logisches System zugrunde, in dem nur Grundzeichen für konstante *Grundterme*, das *Abstraktionszeichen* λ und die logischen Zeichen $\vee$, $\bar{}$, (x) der *Disjunktion*, *Negation* und *Generalisation* (mit gebundenen Variablen) verwendet werden.

Als Mitteilungszeichen für *Terme* bzw. *Formeln* dienen kleine bzw. große deutsche Buchstaben, als Zeichen für *gebundene Variablen* kleine lateinische Buchstaben. Freie Variablen treten nicht auf. Durch die Schreibweise $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ sollen in einer Formel $\mathfrak{A}$ gewisse Stellen, die durch den Term $\mathfrak{t}$ besetzt sind, gekennzeichnet werden. Dabei ist zugelassen, daß $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ nicht auftritt. Entsprechend sind $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ und $\mathfrak{s}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ zu verstehen.

Terme bzw. *Formeln* sind Zeichenreihen, die sich nach folgenden Vorschriften bilden lassen:

1. Jeder Grundterm ist ein Term.
2. Sind $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ Terme, so ist $\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ eine Formel.
3. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ eine Formel, so ist $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Term.
4. Mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}[\mathfrak{t}]$ sind auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\bar{\mathfrak{A}}$, $(x)\mathfrak{C}[x]$ Formeln.

Herleitungen (formale Beweise) erfolgen aus den *Grundformeln* mittels *Schlußregeln*. Als *Grundformeln* dürfen beliebige Formeln der Gestalt

$$\varphi(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varphi}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n),$$

wo φ ein Grundterm ist, festgelegt werden. Dabei besteht nur die Bedingung, daß eine Formel nicht zugleich mit ihrer Negation als Grundformel auftritt. *Schlußregeln* sind:

I. Die elementaren Schlußregeln [3]) der *Vertauschung* und *Zusammenziehung* von Disjunktionsgliedern, der *Abschwächung* durch ein zusätzliches

[3]) Vgl. z. B. SCHÜTTE, K.: Zur Widerspruchsfreiheit einer typenfreien Logik. Math. Ann. **125**, 394—400 (1953).

Disjunktionsglied, des Überganges von $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{R}$ zu $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{R}$ (*Kompositionsschluß*), von $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{R}$ zu $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{R}$ (*Negationsschluß*), von $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{R}$ (*Schnitt*), von $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{R}$ zu $\overline{(x)}\,\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{R}$ (*Allschluß*) und von $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{R}$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{R}$ zu $\lambda_{x_1 \ldots x_n}\, \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{R}$ bzw. $\overline{\lambda_{x_1 \ldots x_n}\, \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{R}$ (*Abstraktionsschlüsse*).

II. *Unendliche Induktion. Ist* $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{R}$ *für jeden Term* $\mathfrak{t}$ *herleitbar, so gilt auch* $(x)\,\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{R}$ *als herleitbar.*

Stellt man die Eigenschaft der Beweisbarkeit (Herleitbarkeit) in dem System selbst formal dar, so läßt sich die Formel, welche besagt: „$\mathfrak{A}$ *ist beweisbar oder* $\mathfrak{A}$ *ist nicht beweisbar*", nicht allgemein in dem System herleiten. Um trotzdem das entsprechende tertium non datur zu gewinnen, führen wir mit einem neuen Symbol B eine *fiktive Beweisbarkeit* ein. Das geschieht unter schrittweiser Erweiterung des bisher angegebenen Systems. Zunächst erweitern wir den Formelbegriff so, daß mit $\mathfrak{A}$ auch $B(\mathfrak{A})$ eine Formel ist, lassen aber die Grundformeln und Schlußregeln unverändert. So erhalten wir ein System Σ_0.

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ bilden wir das System Σ_n aus dem System Σ_0, indem wir zu den Grundformeln die durch folgende Regel erklärten *B_n-Grundformeln* hinzunehmen.

B-Regel. Läßt sich in Σ_{n-1} *aus den Annahmeformeln*

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r,\ (x)\,\mathfrak{B}_1[x], \ldots, (x)\,\mathfrak{B}_s[x]$$

auf eine Formel $\mathfrak{C}$ *schließen, so gilt*

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1) \vee \cdots \vee \overline{B}(\mathfrak{A}_r) \vee \overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x]) \vee \cdots \vee \overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x]) \vee B(\mathfrak{C})$$

als B_n*-Grundformel.*

Zu dieser Regel sind einige Erläuterungen zu geben:

1. Für das Schließen werden nicht nur die oben angegebenen Schlußregeln zugelassen, sondern auch diejenigen Umkehrungen, die sich aus den Herleitungsmöglichkeiten im ganzen ergeben[4]). Diese Umkehrungen sind die Schlüsse von $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{R}$, von $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{R}$, von $\lambda_{x_1 \ldots x_n}\, \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{R}$ bzw. $\overline{\lambda_{x_1 \ldots x_n}\, \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n) \vee \mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n] \vee \mathfrak{R}$ und von $(x)\,\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{R}$ für jeden Term $\mathfrak{t}$. Eine weitere Schlußregel werden wir später hinzufügen.

2. Die Formeln $\mathfrak{A}_i$ bzw. $(x)\,\mathfrak{B}_i[x]$ dürfen auch fehlen. Ist insbesondere $\mathfrak{C}$ ohne Benutzung von Annahmeformeln zu erschließen, so gilt $B(\mathfrak{C})$ als B_n-Grundformel.

3. Auch die Formel $\mathfrak{C}$ darf fehlen, nämlich wenn die *leere Formel* aus den Annahmeformeln zu erschließen ist. Die leere Formel, die durch *Schnitt* aus

[4]) Vgl. z. B. SCHÜTTE, K.: Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann. **122**, 369—389 (1951), insbesondere § 2.

einer Formel und ihrer Negation zu erhalten ist, und aus der durch *Abschwächung* jede beliebige Formel folgt, stellt den *Widerspruch* dar.

Um die Widerspruchsfreiheit der Systeme Σ_n nachzuweisen, gebrauchen wir einige Hilfsbegriffe und Hilfssätze.

Als *B-Formeln* bezeichnen wir die leere Formel, alle Formeln der Gestalt

$$B(\mathfrak{A}), \quad (x)B(\mathfrak{B}[x]), \quad \overline{B}(\mathfrak{C}), \quad \overline{(x)}B(\mathfrak{D}[x])$$

und alle Disjunktionen aus solchen Formeln.

Unter *B_n-Sätzen* verstehen wir die Formeln folgender drei Arten:

a) B_n-Grundformeln,

b) B-Formeln, die durch *unendliche Induktion* aus B_n-Grundformeln zu gewinnen sind, also

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1)\vee\cdots\vee\overline{B}(\mathfrak{A}_r)\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x])\vee\cdots\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x])\vee(x)\,B(\mathfrak{C}[x]),$$

wenn

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1)\vee\cdots\vee\overline{B}(\mathfrak{A}_r)\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x])\vee\cdots\vee\overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x])\vee B(\mathfrak{C}[\mathfrak{t}])$$

für jeden Term t eine B_n-Grundformel ist.

c) B-Formeln, die aus Formeln a) bzw. b) durch *Abschwächungen* hervorgehen.

Satz 1. B-Formeln, die aus B_n-Sätzen durch *Vertauschungsschlüsse, Zusammenziehungen* oder *Abschwächungen* entstehen, sind B_n-Sätze.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Satz 2. Durch *Schnitt* von zwei B_n-Sätzen ergibt sich ein B_n-Satz.

Beweis. $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{S}$ und $\overline{\mathfrak{S}}\vee\mathfrak{T}$ seien B_n-Sätze. Ist $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{T}$ ein B_n-Satz, so auch $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}$. Andernfalls enthalten $\mathfrak{R}, \mathfrak{T}$ Disjunktionsglieder $\mathfrak{R}^*, \mathfrak{T}^*$, so daß $\mathfrak{R}^*\vee\mathfrak{S}$ und $\overline{\mathfrak{S}}\vee\mathfrak{T}^*$ B_n-Grundformeln sind bzw. aus solchen Grundformeln durch unendliche Induktion entstehen. Dann ist, wie aus der B-Regel hervorgeht, auch $\mathfrak{R}^*\vee\mathfrak{T}^*$ eine B_n-Grundformel bzw. durch unendliche Induktion aus solchen Formeln zu gewinnen. In jedem Falle ist $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}$ ein B_n-Satz.

Satz 3. Ist $\overline{B}(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])\vee\mathfrak{R}$ ein B_n-Satz, so auch $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ ein B_n-Satz, so auch $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}$. Andernfalls enthält $\mathfrak{R}$ ein Disjunktionsglied $\mathfrak{R}^*$, so daß $\overline{B}(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])\vee\mathfrak{R}^*$ eine B_n-Grundformel ist bzw. aus solchen Grundformeln durch unendliche Induktion entsteht. Dann gilt dasselbe für $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}^*$, und $\overline{(x)}B(\mathfrak{A}[x])\vee\mathfrak{R}$ ist ein B_n-Satz.

Satz 4. Jede B-Formel, die durch *unendliche Induktion* aus B_n-Sätzen entsteht, ist ein B_n-Satz.

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}\vee B(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ für jeden Term t ein B_n-Satz. Ist $\mathfrak{M}$ ein B_n-Satz, so auch $\mathfrak{M}\vee(x)B(\mathfrak{A}[x])$. Andernfalls enthält $\mathfrak{M}$ zu jedem Term t ein Disjunktionsglied $\mathfrak{M}_\mathfrak{t}$, so daß $\mathfrak{M}_\mathfrak{t}\vee B(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ eine B_n-Grundformel ist. Entsteht $\mathfrak{M}^*$ aus $\mathfrak{M}$, indem eventuell auftretende Disjunktionsglieder der Form $B(\mathfrak{C})$ und $(x)B(\mathfrak{D}[x])$ gestrichen werden, so daß $\mathfrak{M}^*$ nur negierte Disjunktionsglieder enthält, so ist offenbar auch $\mathfrak{M}^*\vee B(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ eine B_n-Grundformel. Da dies für jeden Term t gilt, ist $\mathfrak{M}^*\vee(x)B(\mathfrak{A}[x])$ ein B_n-Satz, also auch $\mathfrak{M}\vee(x)B(\mathfrak{A}[x])$.

Satz 5. Jede in Σ_n herleitbare B-Formel ist ein B_n-Satz.

Beweis. $\mathfrak{F}$ sei eine in Σ_n herleitbare B-Formel. In der Herleitung von $\mathfrak{F}$ eliminieren wir alle diejenigen *Schnitte*, deren Schnittglieder nicht von der Gestalt $B(\mathfrak{A})$ oder $(x)B(\mathfrak{B}[x])$ sind. Diese Schnittelimination läßt sich genau so durchführen wie in dem nicht erweiterten System[5]), da sich die Formelbünde der Schnittglieder bei der angegebenen Einschränkung nicht auf B_n-Grundformeln erstrecken. Die so gewonnene *reduzierte Herleitung* der Formel $\mathfrak{F}$ besteht nur aus B-Formeln. Folglich enthält sie als Grundformeln nur B_n-*Grundformeln* und als Schlüsse nur *Vertauschungen, Zusammenziehungen, Abschwächungen, Schnitte, Allschlüsse* und *unendliche Induktionen*. Da jede B_n-Grundformel ein B_n-Satz ist und nach den Sätzen 1 bis 4 durch die angegebenen Schlüsse B_n-Sätze in B_n-Sätze übergehen, enthält die reduzierte Herleitung der Formel $\mathfrak{F}$ nur B_n-Sätze. Somit ist $\mathfrak{F}$ selbst ein B_n-Satz.

Mit Satz 5 läßt sich nun folgendermaßen die *Widerspruchsfreiheit* der Systeme Σ_n beweisen: Wäre Σ_n widerspruchsvoll, so wäre die leere Formel in Σ_n herleitbar, also nach Satz 5 ein B_n-Satz. Gemäß der Definition der B_n-Sätze müßte die leere Formel eine B_n-Grundformel sein. Dies könnte nach der B-Regel nur dann der Fall sein, wenn bereits Σ_{n-1} widerspruchsvoll wäre. Es gibt also kein erstes und somit überhaupt kein widerspruchsvolles System Σ_n.

Satz 6. Bei $0<m<n$ ist jede B_m-Grundformel zugleich eine B_n-Grundformel.

Beweis durch vollständige Induktion nach m: Zur Gewinnung einer B_m-Grundformel nach der B-Regel sind gewisse Schlüsse in Σ_{m-1} auszuführen.

1. Ist $m=1$, so enthält Σ_{m-1} nur die gewöhnlichen Grundformeln. Diese sind auch Grundformeln von Σ_{n-1}. Da ferner Σ_{n-1} dieselben Schlußregeln wie Σ_{m-1} besitzt, ist jede B_m-Grundformel zugleich B_n-Grundformel.

2. Es sei $m>1$, und die Behauptung möge für $m-1$ gelten. Dann sind die B_{m-1}-Grundformeln, die außer den gewöhnlichen Grundformeln in Σ_{m-1} auftreten, zugleich B_{n-1}-Grundformeln. Daher besitzt Σ_{n-1} alle Herleitungsmöglichkeiten, die in Σ_{m-1} bestehen. Hieraus folgt die Behauptung.

Aus den Sätzen 5 und 6 folgt: *Ist $B(\mathfrak{F})$ in Σ_n herleitbar, so auch $\mathfrak{F}$.*

Beweis. Die Formel $B(\mathfrak{F})$ ist nach Satz 5 nur dann in Σ_n herleitbar, wenn sie ein B_n-Satz ist. Auf Grund der Widerspruchsfreiheit von Σ_n kann $B(\mathfrak{F})$ nicht durch Abschwächung aus einer B_n-Grundformel entstehen, muß also als B_n-Satz selbst eine B_n-Grundformel sein. Das ist nur möglich, wenn $\mathfrak{F}$ in Σ_{n-1} herleitbar ist. Nach Satz 6 ist dann $\mathfrak{F}$ auch in Σ_n herleitbar.

Hiermit haben wir die

Zusatzregel: In jedem System Σ_n darf von $B(\mathfrak{F})$ auf $\mathfrak{F}$ geschlossen werden.

Diese Regel nehmen wir unter den Schlußregeln zur Gewinnung von B_n-Grundformeln auf. Die Sätze 1 bis 5 und die Widerspruchsfreiheit bleiben dabei bestehen. Auch der Satz 6 bleibt gültig, weil die für diesen Satz wesentliche Voraussetzung, daß zur Gewinnung der B_n-Grundformeln für jedes n die *gleichen* Schlußregeln zugelassen sind, gewahrt ist.

[5]) Vgl. die unter [3]) zitierte Arbeit.

Dagegen wäre Satz 6 verletzt, wenn man zur Gewinnung der B_1-Grundformeln den (offenbar richtigen) Satz „$B(\mathfrak{F})$ ist in Σ_0 nicht herleitbar" als Schlußregel hinzunehmen würde. Wir beschränken, um Satz 6 aufrechtzuerhalten, die Schlußregeln zur Gewinnung der B_n-Grundformeln ausdrücklich auf die vorher genannten Regeln einschließlich der Zusatzregel.

Von den Systemen Σ_n gehen wir zu einem umfassenden System über, indem wir die B_n-Grundformeln aller natürlichen Zahlen n als B-Grundformeln zusammenfassen und eine Formel als *herleitbar* bezeichnen, wenn sie in irgendeinem System Σ_n herleitbar ist. Für diesen allgemeinen Herleitungsbegriff gilt folgendes:

I. Aus herleitbaren Formeln entstehen mittels der elementaren Schlußregeln herleitbare Formeln.

Beweis. Es seien etwa $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ herleitbar, d. h. es möge m, n geben, so daß $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ in Σ_m und $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ in Σ_n herleitbar ist. Wir können $m \leq n$ annehmen. Dann ist nach Satz 6 $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ in Σ_n herleitbar. Entsprechendes gilt für die übrigen Schlußregeln.

Auch die vorher genannten Umkehrungen der Schlußregeln sind hier gültig.

II. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{N}$ für jeden Term $\mathfrak{t}$ in einem System $\Sigma_{n_\mathfrak{t}}$ herleitbar, wobei die $n_\mathfrak{t}$ für alle $\mathfrak{t}$ *beschränkt* sind, so ist $(x)\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$ herleitbar.

Beweis. Bei $n_\mathfrak{t} \leq N$ ist nach Satz 6 $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \mathfrak{N}$ für jeden Term $\mathfrak{t}$ in Σ_N herleitbar, also auch $(x)\mathfrak{A}[x] \vee \mathfrak{N}$.

Die *unendliche Induktion* steht uns in dem umfassenden System also nur unter der angegebenen Einschränkung zur Verfügung.

Das umfassende System ist *widerspruchsfrei*; denn die leere Formel ist nicht herleitbar, da sie in keinem System Σ_n herleitbar ist.

Wir definieren die „*Konjunktion*" $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ durch $\overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}$, die „*Implikation*" $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ durch $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$, die „*Äquivalenz*" $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ durch $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$ und die „*Existenzformel*" $(E\,x)\mathfrak{A}[x]$ durch $\overline{(x)\overline{\mathfrak{A}}[x]}$.

Bereits in Σ_1 herleitbar sind:
das spezielle tertium non datur

$$\overline{B}(\mathfrak{F}) \vee B(\mathfrak{F}),$$

die Implikation

$$B\big(B(\mathfrak{F})\big) \to B(\mathfrak{F})$$

(auf Grund der Zusatzregel) und die Äquivalenzen

$$B(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \sim B(\mathfrak{F}) \wedge B(\mathfrak{G}),$$
$$B\big((x)\,\mathfrak{F}[x]\big) \sim (x)\,B(\mathfrak{F}[x]).$$

Dagegen gelten für die Negation, Disjunktion und Existenz nicht allgemein die entsprechenden Äquivalenzen, sondern nur die Implikationen

$$B(\overline{\mathfrak{F}}) \to \overline{B}(\mathfrak{F}),$$
$$B(\mathfrak{F}) \vee B(\mathfrak{G}) \to B(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}),$$
$$(E\,x)\,B(\mathfrak{F}[x]) \to B\big((E\,x)\,\mathfrak{F}[x]\big).$$

Wie wir festgestellt hatten, folgt aus der Herleitbarkeit von $B(\mathfrak{F})$ die Herleitbarkeit von $\mathfrak{F}$. Es gilt auch das Umgekehrte. Ist nämlich $\mathfrak{F}$ in einem System Σ_n herleitbar, so ist $B(\mathfrak{F})$ in Σ_{n+1} herleitbar. Die Formeln $\mathfrak{F}$ und $B(\mathfrak{F})$ sind also *deduktionsgleich*, d.h. jede dieser beiden Formeln ist dann und nur dann herleitbar, wenn auch die andere herleitbar ist. Die Formeln sind aber nicht äquivalent. Es ist weder $B(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}$ noch $B(\mathfrak{F}) \to B(B(\mathfrak{F}))$ allgemein herleitbar, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei t_0 der Term $\lambda_x \overline{B}(x(x))$. Dann folgt aus $\overline{B}(t_0(t_0)) \vee B(t_0(t_0))$ durch Abstraktionsschlüsse $t_0(t_0) \vee B(t_0(t_0))$ und $\overline{B}(t_0(t_0)) \vee \overline{t}_0(t_0)$.

1. Wäre $B(t_0(t_0)) \to t_0(t_0)$, also $\overline{B}(t_0(t_0)) \vee t_0(t_0)$ herleitbar, so erhielte man durch Schnitte $\overline{B}(t_0(t_0))$ und $t_0(t_0)$. Mit $t_0(t_0)$ müßte auch $B(t_0(t_0))$ herleitbar sein, und man hätte einen Widerspruch.

2. Aus der in Σ_1 herleitbaren Formel $\overline{B}(t_0(t_0)) \vee \overline{t}_0(t_0)$ folgt, daß man in Σ_1 von $B(t_0(t_0))$ auf $\overline{t}_0(t_0)$ schließen kann. Also ist $\overline{B}(B(t_0(t_0))) \vee B(\overline{t}_0(t_0))$ eine B_2-Grundformel. Durch Schnitt mit den B_1-Grundformeln $\overline{B}(B(t_0(t_0))) \vee B(t_0(t_0))$ und $\overline{B}(\overline{t}_0(t_0)) \vee \overline{B}(t_0(t_0))$ ergibt sich $\overline{B}(B(t_0(t_0)))$. Wäre $B(t_0(t_0)) \to B(B(t_0(t_0)))$ herleitbar, so erhielte man $\overline{B}(t_0(t_0))$, woraus sich wie vorher mit $t_0(t_0)$ und $B(t_0(t_0))$ ein Widerspruch ergibt.

Wir bezeichnen eine Formel $\mathfrak{A}$ als *„ausgezeichnet"*, wenn die Formeln $\mathfrak{A} \vee B(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A} \vee B(\overline{\mathfrak{A}})$ herleitbar sind. Für solche Formeln gelten die Äquivalenzen $\mathfrak{A} \sim B(\mathfrak{A})$ und $\overline{\mathfrak{A}} \sim B(\overline{\mathfrak{A}})$, wie sich aus den Voraussetzungen unter Benutzung der B_1-Grundformel $\overline{B}(\mathfrak{A}) \vee \overline{B}(\mathfrak{A})$ ergibt.

Satz 7. Ist für einen Grundterm φ entweder $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ oder $\overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n)$ eine Grundformel, so ist $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ eine ausgezeichnete Formel.

Beweis. Ist $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ bzw. $\overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n)$ Grundformel, so ist $B(\varphi(t_1, \ldots, t_n))$ bzw. $B(\overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n))$ eine B_1-Grundformel. In jedem Falle sind

$$\overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n) \vee B(\varphi(t_1, \ldots, t_n)) \quad \text{und} \quad \varphi(t_1, \ldots, t_n) \vee B(\overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n))$$

in Σ_1 herleitbar.

Ausgezeichnete Formeln lassen sich in folgender Weise zu ausgezeichneten Formeln zusammensetzen:

Satz 8. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}[t_1, \ldots, t_n]$ ausgezeichnet, so auch $B(\mathfrak{A})$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bzw. $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n](t_1, \ldots, t_n)$.

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{A}$ ausgezeichnet. Dann sind die Formeln $B(\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A}))$, $B(\mathfrak{A} \vee \overline{B}(\mathfrak{A}))$ und $B(\mathfrak{A}) \vee B(\overline{\mathfrak{A}})$ herleitbar. Durch Schnitte mit den B_1-Grundformeln

$$\overline{B}(\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A})) \vee \overline{B}(\mathfrak{A}) \vee B(B(\mathfrak{A})) \quad \text{und} \quad \overline{B}(\mathfrak{A} \vee \overline{B}(\mathfrak{A})) \vee \overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}) \vee B(\overline{B}(\mathfrak{A}))$$

ergibt sich $\overline{B}(\mathfrak{A}) \vee B(B(\mathfrak{A}))$ und $B(\mathfrak{A}) \vee B(\overline{B}(\mathfrak{A}))$. Das heißt $B(\mathfrak{A})$ ist ausgezeichnet.

2. Die übrigen Behauptungen ergeben sich aus den Voraussetzungen mit den gewöhnlichen Schlußregeln unter Benutzung der in Σ_1 herleitbaren

Formeln

$$\overline{B}(\mathfrak{A}) \vee B(\overline{\overline{\mathfrak{A}}}),$$

$$\overline{B(\mathfrak{A}) \vee B(\mathfrak{B})} \vee B(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}), \qquad \overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}) \vee \overline{B}(\overline{\mathfrak{B}}) \vee B(\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}),$$

$$\overline{B}(\mathfrak{C}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \vee B\left(\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n]\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)\right),$$

$$\overline{B}(\overline{\mathfrak{C}}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \vee B\left(\overline{\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n]}\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)\right).$$

Satz 9. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ in einem System Σ_n für jeden Term $\mathfrak{t}$ als ausgezeichnet nachweisbar, so auch $(x)\mathfrak{A}[x]$.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus den Voraussetzungen mit den B_1-Grundformeln

$$\overline{(x)}\, B(\mathfrak{A}[x]) \vee B\left((x)\,\mathfrak{A}[x]\right), \qquad \overline{B}(\overline{\mathfrak{A}}[\mathfrak{t}]) \vee B\left(\overline{(x)}\,\mathfrak{A}[x]\right)$$

durch gewöhnliche Schlüsse.

Führen wir für die „Ausgezeichnetheit" ein Symbol A durch die Definition

$$A(\mathfrak{A}) \equiv B\left(\{\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A})\} \wedge \{\mathfrak{A} \vee B(\overline{\mathfrak{A}})\}\right)$$

ein, so erhalten wir gemäß den Beweisen zu Satz 8 und 9 die Formeln

$$B\left(A(\mathfrak{A})\right) \to A\left(B(\mathfrak{A})\right)$$

$$A(\mathfrak{A}) \to A(\overline{\mathfrak{A}})$$

$$A(\mathfrak{A}) \wedge A(\mathfrak{B}) \to A(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$$

$$A(\mathfrak{C}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \to A\left(\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n]\,(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)\right)$$

$$(x)\, A(\mathfrak{A}[x]) \to A\left((x)\,\mathfrak{A}[x]\right).$$

Dabei gilt auch die letzte Formel ohne Einschränkung. Eine Einschränkung ist nur erforderlich, wenn aus $A(\mathfrak{A}[\mathfrak{t}])$ für jeden Term $\mathfrak{t}$ auf $A\left((x)\mathfrak{A}[x]\right)$ geschlossen werden soll. Dieser Schluß ist aber mit der obigen Formel nur nach unendlicher Induktion möglich.

§ 2. Einführung des Mengenbegriffs.

Wir drücken Mengen und deren Elemente durch Terme aus. Der Term $\mathfrak{a}$ soll dann und nur dann ein Element der durch den Term $\mathfrak{m}$ gegebenen Menge darstellen, wenn die Formel $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ gilt. Jedoch soll nicht jeder Term eine Menge darstellen. Um der klassischen Mathematik möglichst zu entsprechen, verlangen wir von einem „*Mengenterm*" $\mathfrak{m}$, daß nicht nur das tertium non datur für die Formeln $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ gilt, sondern daß auch die Unterscheidung zwischen $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ und $B\left(\mathfrak{m}(\mathfrak{a})\right)$, die ja in der klassischen Mathematik nicht auftritt, weitgehend entbehrlich ist. Das wird durch die Forderung erreicht, daß $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ für jeden Term $\mathfrak{a}$ eine ausgezeichnete Formel sein soll. Demgemäß definieren wir $M(\mathfrak{m}) \equiv (x) A\left(\mathfrak{m}(x)\right)$, d. h. ausführlicher

$$M(\mathfrak{m}) \equiv (x)\, B\left(\{\overline{\mathfrak{m}}(x) \vee B(\mathfrak{m}(x))\} \wedge \{\mathfrak{m}(x) \vee B(\overline{\mathfrak{m}}(x))\}\right),$$

wo $M(\mathfrak{m})$ bedeuten soll: „$\mathfrak{m}$ *ist ein Mengenterm*".

Es gelten unter anderem die Formeln

$$M(\mathfrak{m}) \to B\left(\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{m}(\mathfrak{a})\right) \quad \text{und} \quad M(\mathfrak{m}) \to B\left(B(\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a})) \vee B(\mathfrak{m}(\mathfrak{a}))\right).$$

Die Sätze 7 bis 9 geben uns Möglichkeiten zur Bildung von Mengentermen.

Die *Vereinigung* bzw. den *Durchschnitt* der durch Mengenterme $\mathfrak{s}$, t gegebenen Mengen stellen die Mengenterme

$$\lambda_x\{\mathfrak{s}(x) \vee \mathfrak{t}(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_x\{\mathfrak{s}(x) \wedge \mathfrak{t}(x)\}$$

dar. Auch für das *Komplement* zu einem Mengenterm t haben wir einen Mengenterm, nämlich $\lambda_x \overline{\mathfrak{t}}(x)$.

Wir definieren

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} \equiv (x)\{\mathfrak{s}(x) \to \mathfrak{t}(x)\}.$$

Es gelten die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\overline{\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}} \vee \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}),$$

$$M(\mathfrak{r}) \wedge M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{r} \subset \mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} \to \mathfrak{r} \subset \mathfrak{t}).$$

Durch die Definition

$$\mathfrak{s} =_{\mu} \mathfrak{t} \equiv \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t} \subset \mathfrak{s}$$

erhalten wir für Mengenterme eine Gleichheitsrelation mit tertium non datur.

Unter einem *„Prädikat"* verstehen wir einen Ausdruck $\mathfrak{P}[a]$ der aus einer Formel $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$ entsteht, indem ein Term t an gewissen Stellen durch die *Nennvariable a* ersetzt wird. Tritt die Nennvariable in $\mathfrak{P}[a]$ nicht auf, so sprechen wir von einem *konstanten Prädikat*. Eine Eigenschaft von Prädikaten möge als *„logisch progressiv"* bezeichnet werden, wenn folgendes gilt:

I. Haben $\mathfrak{P}[a]$, $\mathfrak{Q}[a]$ bzw. $\mathfrak{R}[\mathfrak{t}_1[a], \ldots, \mathfrak{t}_n[a], a]$ diese Eigenschaft, so auch $\overline{\mathfrak{P}}[a]$, $\mathfrak{P}[a] \vee \mathfrak{Q}[a]$ bzw. $\lambda_{x_1 \ldots x_n}\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n, a]$ $(\mathfrak{t}_1[a], \ldots, \mathfrak{t}_n[a])$.

II. Ist in einem System Σ_n zu jedem Term t die Eigenschaft für $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}, a]$ nachweisbar, so auch für $(x)\mathfrak{P}[x, a]$.

Von Prädikaten, die sich auf Mengen beziehen sollen, hat man zu verlangen, daß $\mathfrak{P}[\mathfrak{s}]$ äquivalent zu $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$ ist, wenn $\mathfrak{s}$, t gleiche Mengen darstellen. Wir verlangen außerdem, daß $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$ für jeden Mengenterm t eine ausgezeichnete Formel ist. Demgemäß bezeichnen wir $\mathfrak{P}[a]$ als *„Mengenprädikat"*, wenn die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to A(\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} =_{\mu} \mathfrak{t} \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{s}] \sim \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]\})$$

für alle Terme $\mathfrak{s}$, t herleitbar sind.

Mengenprädikate sind insbesondere

a) alle ausgezeichneten Formeln (als konstante Prädikate),

b) $a(\mathfrak{t})$ für jeden Term t,

c) $a \subset \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \subset a$ für jeden Mengenterm $\mathfrak{m}$.

Ferner ist die Mengenprädikateigenschaft ohne Schwierigkeit als *logisch progressiv* nachweisbar.

Mengen von Paaren stellen wir ebenfalls durch Terme dar, wobei $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ein Element von $\mathfrak{m}$ sein soll, wenn $\mathfrak{m}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ gilt. Die Aussage „$\mathfrak{m}$ *stellt eine Paarmenge dar*" wird durch

$$M_2(\mathfrak{m}) \equiv (x)\,(y)\,A\big(\mathfrak{m}(x, y)\big)$$

gegeben. Entsprechend sind $M_3, M_4, \ldots$ zu definieren.

Ein Mengenterm $\mathfrak{m}$ soll als Repräsentant einer *Menge von Mengen* angesehen werden, wenn $\mathfrak{m}(\mathfrak{a})$ nur auf Mengenterme $\mathfrak{a}$ zutrifft. Die genaue Definition der Aussage „$\mathfrak{m}$ *stellt eine Menge von Mengen dar*", die wir durch $M^2(\mathfrak{m})$ ausdrücken, lautet:

$$M^2(\mathfrak{m}) \equiv M(\mathfrak{m}) \wedge (x)\,B\big(\mathfrak{m}(x) \to (y)\,\{\{\bar{x}(y) \vee B(x(y))\} \wedge \{x(y) \vee B(\bar{x}(y))\}\}\big).$$

Bei einer Menge von Mengen läßt sich die *Vereinigung*

$$\cup\,\mathfrak{m} \equiv \lambda_x (E\,y)\,\{\mathfrak{m}(y) \wedge y(x)\}$$

und der *Durchschnitt*

$$\cap\,\mathfrak{m} \equiv \lambda_x (y)\,\{\mathfrak{m}(y) \to y(x)\}$$

bilden. Allgemein gelten nämlich die Formeln

$$M^2(\mathfrak{m}) \to M(\cup\,\mathfrak{m}),$$

$$M^2(\mathfrak{m}) \to M(\cap\,\mathfrak{m}).$$

Beweis. Aus der Annahme, daß für alle Terme $\mathfrak{s}$, t die Formeln

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s}) \vee B\big(\mathfrak{m}(\mathfrak{s})\big), \quad \mathfrak{m}(\mathfrak{s}) \vee B\big(\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s})\big), \quad \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s}) \vee \overline{\mathfrak{s}}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\mathfrak{s}(\mathfrak{t})\big), \quad \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{s}) \vee \mathfrak{s}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\overline{\mathfrak{s}}(\mathfrak{t})\big)$$

gelten, können wir unter Benutzung von B_1-Grundformeln auf

$$\overline{\cup\,\mathfrak{m}}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\cup\,\mathfrak{m}(\mathfrak{t})\big), \quad \cup\,\mathfrak{m}(\mathfrak{t}) \vee B\big(\overline{\cup\,\mathfrak{m}}(\mathfrak{t})\big)$$

und die entsprechenden Formeln für den Durchschnitt schließen. Die Behauptungen ergeben sich dann aus B_2-Grundformeln durch unendliche Induktion in Σ_2.

Eine *Abzählung* der Mengenterme ist nicht möglich, da die Abgrenzung der Mengenterme unter Bezugnahme auf die Deduzierbarkeit mit weitgehend zugelassener unendlicher Induktion vorgenommen wurde. Die unendliche Induktion ermöglicht es, in jedem System Σ_n bei Einführung einer Herleitungsordnung zu jeder beliebig großen konstruktiv gegebenen Ordnungszahl der zweiten Zahlenklasse Herleitungen zu bilden. Da die Gesamtheit dieser Ordnungszahlen nicht finit erfaßt werden kann, ist eine finite Abzählung aller Herleitungen und ebenso aller Mengenterme unmöglich.

Ferner ist die Annahme widerlegbar, daß die Gesamtheit der *Mengen*[6]) eines Systems Σ_n abzählbar sei, wenn man von einer solchen Abzählung verlangt, daß ein Funktionsterm $\mathfrak{f}[a]$ existiert mit den Eigenschaften:

[6]) Wir beziehen uns nicht auf *Mengenterme*, sondern auf *Mengen*, indem wir bei der 2. und 3. Forderung die Mengengleichheit verwenden.

1. Für jeden Term t ist $\mathfrak{f}[t]$ ein Mengenterm aus Σ_n.

2. Zu jedem Mengenterm $\mathfrak{m}$ aus Σ_n gibt es einen Term t mit $\mathfrak{m} =_{\mu} \mathfrak{f}[t]$.

3. Aus $\mathfrak{s} = t$ folgt $\mathfrak{f}[\mathfrak{s}] =_{\mu} \mathfrak{f}[t]$[7]).

Bereits ohne Benutzung der für die Abzählung wesentlichen dritten Forderung ergibt sich der Widerspruch: Nach 1. ist $\mathfrak{f}[t](t)$ für jeden Term t in Σ_n als ausgezeichnet nachweisbar, also auch $\overline{\mathfrak{f}[t]}(t)$. Dann ist $\lambda_x \overline{\mathfrak{f}[x]}(x)$ ein Mengenterm $\mathfrak{m}_0$ aus Σ_n. Für jeden Term t ist $\mathfrak{m}_0(t) \vee \mathfrak{f}[t](t)$, $\overline{\mathfrak{m}_0}(t) \vee \overline{\mathfrak{f}[t]}(t)$ und somit $\overline{\mathfrak{m}_0 =_{\mu} \mathfrak{f}[t]}$ herleitbar, was gegen 2. verstößt.

Die Unerfüllbarkeit der Forderungen 1. und 2. bedeutet, daß nicht einmal eine *Abbildung* aller Terme auf die Mengen von Σ_n angegeben werden kann.

§ 3. Einbeziehung der verzweigten Typenlogik.

Der im § 2 eingeführte Mengenbegriff ist so umfassend, daß jede Menge, die sich in der verzweigten Typenlogik unter Zugrundelegung entscheidbarer Prädikate definieren läßt, unter diesen Begriff fällt. Um das zu zeigen, entwickeln wir in ähnlicher Weise, wie es ACKERMANN[8]) getan hat, über gegebenen entscheidbaren Grundprädikaten eine verzweigte Typenlogik als Teilsystem des vorliegenden typenfreien Systems.

Erklärung der *Typen* und deren *Ordnungen*:

1. Typ der Ordnung 0 ist die Zahl „0".

2. Sind $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ Typen von Ordnungen $< \nu$, so ist $\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein Typ der Ordnung ν.

Die Ordnungen der Typen sind natürliche Zahlen.

Erklärung der τ-*Grundterme*: Gegeben sei eine gewisse Menge von Grundtermen, die wir einteilen in *Individuengrundterme*, *Prädikatengrundterme* mit jeweils zugeordneter Stellenzahl und *Typengrundterme*. Diese drei Arten sollen sich nicht überschneiden, und es soll zu jedem Typ ϱ genau einen Typengrundterm τ_ϱ geben.

Erklärung der τ-*Terme* und ihrer Typen:

1. Jeder Individuengrundterm ist ein τ-Term vom Typ 0.

2. Jeder n-stellige Prädikatengrundterm ist ein τ-Term vom Typ 1 (0, ..., 0) mit n Nullen.

3. Ist $\mathfrak{A}[t_1, \ldots, t_n]$ eine τ-Formel der Ordnung ν und sind $t_1, \ldots, t_n$ τ-Terme der Typen $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ von den Ordnungen $\mu_1, \ldots, \mu_n$, so ist

$$\lambda_{x_1 \ldots x_n} \{\tau_{\varrho_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \tau_{\varrho_n}(x_n) \wedge \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

ein τ-Term vom Typ $\nu^*(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$, wo ν^* das Maximum von $\nu, \mu_1 + 1, \ldots, \mu_n + 1$ ist.

Diese Erklärung ist simultan zu nehmen mit der Erklärung der τ-*Formeln* und ihrer Ordnungen:

---

[7]) Bei $\mathfrak{s} = t$ ist die im § 4 erklärte Gleichheit gemeint.

[8]) ACKERMANN: Math. Z. **57**, 159—163 (1953).

1. Sind $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ τ-Terme der Typen $\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ bzw. $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, so ist $\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ eine τ-Formel der Ordnung ν.

2. Ist $\mathfrak{A}$ eine τ-Formel der Ordnung ν, so auch $\overline{\mathfrak{A}}$.

3. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Formeln der Ordnungen μ, ν, so ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ eine τ-Formel, deren Ordnung das Maximum von μ, ν ist.

4. Ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ eine τ-Formel der Ordnung ν und $\mathfrak{t}$ ein τ-Term vom Typ ϱ der Ordnung μ, so ist

$$(x)\{\overline{\tau}_\varrho(x) \vee \mathfrak{A}[x]\}$$

eine τ-Formel, deren Ordnung das Maximum von ν und $\mu + 1$ ist.

Erklärung der *τ-Grundformeln*:

1. Die Prädikatengrundterme sollen für die Individuengrundterme als Argumente entscheidbar sein. Demgemäß setzen wir voraus: Ist φ ein n-stelliger Prädikatengrundterm und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Individuengrundterme, so ist in jedem Falle entweder $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oder $\overline{\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ Grundformel (in entscheidbarer Weise).

2. Es sei $\tau_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel, wenn $\mathfrak{t}$ ein τ-Term vom Typ ϱ ist[9]), und $\overline{\tau}_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel, wenn $\mathfrak{t}$ ein beliebiger anderer Term ist, und zwar auch dann, wenn $\mathfrak{t}$ nicht τ-Term ist.

Der Satz, auf den es uns ankommt, lautet:

Jeder τ-Term der Form $\lambda_x \mathfrak{P}[x]$ ist ein Mengenterm.

Beweis. Jeder τ-Term $\lambda_x \mathfrak{P}[x]$ ist von der Gestalt $\lambda_x\{\tau_\varrho(x) \wedge \mathfrak{G}[x]\}$, wo $\mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ für jeden τ-Term $\mathfrak{t}$ vom Typ ϱ eine τ-Formel ist. Nach Satz 8 handelt es sich um einen Mengenterm, wenn $\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ für jeden Term $\mathfrak{t}$ ausgezeichnet ist.

1. $\mathfrak{t}$ sei nicht ein τ-Term vom Typ ϱ. Dann ist $\overline{\tau}_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel. Folglich sind $\overline{\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]}$ und $B\left(\overline{\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]}\right)$ herleitbar, und $\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ ist ausgezeichnet.

2. $\mathfrak{t}$ sei ein τ-Term vom Typ ϱ. Dann ist $\tau_\varrho(\mathfrak{t})$ Grundformel. Ist die τ-Formel $\mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$ ausgezeichnet, so nach Satz 8 auch $\tau_\varrho(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{G}[\mathfrak{t}]$. Es ist also nur noch zu beweisen:

Jede τ-Formel ist ausgezeichnet.

Um einen Induktionsbeweis für diesen Satz zu führen, definieren wir:

Der *Rang* einer τ-Formel $\mathfrak{F}$ sei die Anzahl derjenigen in $\mathfrak{F}$ auftretenden Terme, deren Typen die gleiche Ordnung wie $\mathfrak{F}$ haben. (Terme höherer Ordnung können in einer τ-Formel nicht auftreten.)

Der *Grad* einer τ-Formel $\mathfrak{F}$ sei die Anzahl derjenigen in $\mathfrak{F}$ auftretenden logischen Zeichen $\vee, \overline{\ }, (x)$, die nicht Bestandteile eines Terms sind.

Wir beweisen die Ausgezeichnetheit der τ-Formel $\mathfrak{F}$ durch Induktion nach Ordnung, Rang und Grad (in dieser Reihenfolge).

I. $\mathfrak{F}$ sei von der Gestalt $\mathfrak{s}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$.

a) $\mathfrak{s}$ sei Prädikatengrundterm. Dann müssen $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ Individuengrundterme sein, und $\mathfrak{F}$ ist nach Satz 7 ausgezeichnet.

[9]) Hierbei handelt es sich um eine in elementarer Weise entscheidbare Eigenschaft des Terms $\mathfrak{t}$.

b) $\mathfrak{F} \equiv \lambda_{x_1 \ldots x_n} \{\tau_{\varrho_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge \tau_{\varrho_n}(x_n) \wedge \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\}$.

Die τ-Formel $\mathfrak{A}[t_1, \ldots, t_n]$ hat entweder kleinere Ordnung als $\mathfrak{F}$ oder gleiche Ordnung und kleineren Rang, kann also nach Induktionsvoraussetzung als ausgezeichnet angenommen werden. Die $\tau_{\varrho_i}(t_i)$ sind Grundformeln, also ebenfalls ausgezeichnet. Dann ist nach Satz 8 auch $\mathfrak{F}$ ausgezeichnet.

II. $\mathfrak{F}$ sei von der Gestalt $\overline{\mathfrak{A}}$ bzw. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$. Die Formeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ haben entweder kleinere Ordnung als $\mathfrak{F}$, oder sie haben gleiche Ordnung, nicht höheren Rang und kleineren Grad als $\mathfrak{F}$. Nach Induktionsvoraussetzung und Satz 8 ist $\mathfrak{F}$ ausgezeichnet.

III. $\mathfrak{F}$ sei von der Gestalt $(x)\{\overline{\tau}_\varrho(x) \vee \mathfrak{A}[x]\}$. Nach Satz 9 genügt es, die Formeln $\overline{\tau}_\varrho(t) \vee \mathfrak{A}[t]$ für alle Terme t in dem System Σ_1 (auf das wir uns hier allgemein beschränken können) als ausgezeichnet nachzuweisen.

a) Ist t nicht ein τ-Term vom Typ ϱ, so ist $\overline{\tau}_\varrho(t)$ Grundformel, folglich $\overline{\tau}_\varrho(t) \vee \mathfrak{A}[t]$ herleitbar und somit ausgezeichnet.

b) Ist t ein τ-Term vom Typ ϱ, so ist $\mathfrak{A}[t]$ eine τ-Formel. Hat der Typ von t kleinere Ordnung als $\mathfrak{A}[t]$, so hat $\mathfrak{A}[t]$ gleiche Ordnung und gleichen Rang wie $\mathfrak{F}$, aber kleineren Grad. Andernfalls hat $\mathfrak{A}[t]$ kleinere Ordnung als $\mathfrak{F}$. In jedem Falle ist $\mathfrak{A}[t]$ nach Induktionsvoraussetzung ausgezeichnet. Da außerdem $\tau_\varrho(t)$ als Grundformel ausgezeichnet ist, so ist nach Satz 8 auch $\overline{\tau}_\varrho(t) \vee \mathfrak{A}[t]$ ausgezeichnet.

Hiermit ist der Induktionsbeweis beendet.

§ 4. Einführung der Arithmetik[10]).

Das Symbol „0" möge einen bestimmten Grundterm darstellen, der im folgenden festgehalten wird. *Das Strichsymbol* bezeichne einen irgendwie ausgewählten Prozeß, der jedem Term t einen Term t' zuordnet, so daß t' den Term t als echten Bestandteil enthält. Zum Beispiel kann $\lambda_x\, t(x)$ für t' genommen werden. Als *„Ziffern"* werden dann die Terme 0, 0', 0'', ... erklärt.

Unter einer n-stelligen *berechenbaren Funktion* verstehen wir eine Vorschrift, die jedem n-tupel von Ziffern eine eindeutig berechenbare Ziffer als *Funktionswert* zuordnet. Es seien gewisse derartige Funktionen gegeben, darunter die *Nachfolgerfunktion*, die der Ziffer $\mathfrak{z}$ den Funktionswert $\mathfrak{z}'$ zuordnet.

Zur Formalisierung dieser Funktionen verwenden wir *„Nennvariablen"* $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Aus einem Term $\mathfrak{f}[t_1, \ldots, t_n]$, in dem die Terme $t_1, \ldots, t_n$ als Bestandteile auftreten, wird ein n-stelliger *Funktionsterm* $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$ gebildet, indem die Terme $t_1, \ldots, t_n$ an den Stellen, an denen sie in $\mathfrak{f}[t_1, \ldots, t_n]$ gemäß dieser Schreibweise auftreten, durch die Nennvariablen $a_1, \ldots, a_n$ ersetzt werden. Jeder gegebenen n-stelligen berechenbaren Funktion ordnen wir einen n-stelligen Funktionsterm zu, insbesondere der Nachfolgerfunktion den Funktionsterm a_1'. Diese Zuordnung soll so getroffen werden, daß je zwei Terme $\mathfrak{f}[\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_m]$, $\mathfrak{g}[t_1, \ldots, t_n]$, die durch Einsetzungen von Termen für

[10]) Um sortenbeschränkende Prädikate zu vermeiden, wird hier ein etwas anderer Weg eingeschlagen, als ihn ACKERMANN für sein System angegeben hat [Math. Z. **57**, 158—159, 163—165 (1953)].

Nennvariablen aus zugeordneten Funktionstermen $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_m]$, $\mathfrak{g}[a_1, \ldots, a_n]$ entstehen, nur dann formal übereinstimmen, wenn die zugehörigen Funktionen und die entsprechenden Terme $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{t}_i$ übereinstimmen. Diese Bedingung ist leicht zu erfüllen, da viele Möglichkeiten für die Bildung von Funktionstermen bestehen. Die den berechenbaren Funktionen zugeordneten Funktionsterme nennen wir *„berechenbare Funktionsterme"*.

Um mit den Termen als Repräsentanten der natürlichen Zahlen zu rechnen, ordnen wir den Termen in folgender Weise *Ziffernwerte* zu:

a) Ein Term erhält den Wert 0, wenn er nicht durch Einsetzungen von Termen für Nennvariablen aus einem berechenbaren Funktionsterm entsteht.

b) Sind $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ Terme mit den Werten $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$, und gehört der Funktionsterm $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$ zu einer berechenbaren Funktion, die dem n-tupel $(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ den Funktionswert $\mathfrak{z}$ zuordnet, so erhält $\mathfrak{f}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ den Wert $\mathfrak{z}$.

Die bei der Zuordnung der Funktionsterme zu beachtende Bedingung sichert die Eindeutigkeit der Wertezuordnung.

Für die Auffassung der Terme als Repräsentanten natürlicher Zahlen gebrauchen wir Grundterme „$=$" und „$\underset{\mathfrak{r}}{<}$" mit folgenden Grundformeln: $=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$ bzw. $\overline{=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)}$ sei Grundformel, je nachdem $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ gleiche oder verschiedene Werte haben. $\underset{\mathfrak{r}}{<}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$ sei Grundformel, wenn der Wert von $\mathfrak{t}_1$ ein echter Bestandteil des Wertes von $\mathfrak{t}_2$ ist. Andernfalls soll $\overline{\underset{\mathfrak{r}}{<}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)}$ Grundformel sein. Statt

$$=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2), \quad \overline{=(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)}, \quad \underset{\mathfrak{r}}{<}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2), \quad \underset{\mathfrak{r}}{<}(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2) \vee =(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$$

werden wir

$$\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \neq \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \underset{\mathfrak{r}}{<} \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_1 \underset{\mathfrak{r}}{\leqq} \mathfrak{t}_2$$

schreiben.

Unter den gegebenen berechenbaren Funktionen möge die *Summe* und das *Produkt* (im Sinne der Ziffern als natürlicher Zahlen) vorkommen. Die zugehörigen Funktionsterme bezeichnen wir mit $a_1 \underset{\mathfrak{r}}{+} a_2$ bzw. $a_1 ; a_2$. Hierfür sind die zahlentheoretischen Grundgesetze wie z. B.

$$\mathfrak{s} ; \mathfrak{t} = \mathfrak{t} ; \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{s} \underset{\mathfrak{r}}{<} \mathfrak{t} \to \mathfrak{s}' \underset{\mathfrak{r}}{\leqq} \mathfrak{t}$$

mit beliebigen Termen $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ herleitbar. Einer Sortenbeschränkung auf Ziffern bedarf es nicht, da sich die Grundterme „$=$" und „$\underset{\mathfrak{r}}{<}$" gemäß der vorgenommenen Wertezuordnung auf eine Deutung *aller* Terme als natürlicher Zahlen beziehen.

Durch Wahl einer geeigneten Abbildung mögen außerdem die Ziffern als rationale Zahlen interpretiert werden. Die Funktionsterme der Addition und Multiplikation, die sich auf diese Interpretation beziehen, bezeichnen wir mit $a_1 + a_2$ bzw. $a_1 \cdot a_2$. Die entsprechende Ordnungsrelation werde durch einen Grundterm „$<$" dargestellt. Für Terme $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ mit den Werten $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ soll $\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_2$ (als Abkürzung für $<(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$) Grundformel sein, wenn im Sinne der Interpretation als rationale Zahlen $\mathfrak{z}_1$ kleiner als $\mathfrak{z}_2$ ist. Andernfalls gilt $\overline{\mathfrak{t}_1 < \mathfrak{t}_2}$ als Grundformel. Hiermit erhalten wir (wiederum ohne sortenbeschränkende

Zusätze) alle Grundgesetze der rationalen Zahlen. Der jeweils gemeinte Variabilitätsbereich wird lediglich durch die Funktionsterme und die als Ordnungsrelationen fungierenden Grundterme gekennzeichnet. Dabei haben wir dasselbe Gleichheitszeichen für die Bereiche der natürlichen Zahlen und der rationalen Zahlen. Es ist allgemein $t = t$, aber nicht immer $\mathfrak{s} = t \to \{\mathfrak{A}[\mathfrak{s}] \to \mathfrak{A}[t]\}$ herleitbar.

Wir bezeichnen ein Prädikat $\mathfrak{P}[a]$ als *„arithmetisch"*, wenn die Formel

$$\mathfrak{s} = t \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{s}] \sim \mathfrak{P}[t]\}$$

für alle Terme $\mathfrak{s}$, t herleitbar ist.

Arithmetische Prädikate sind insbesondere:

a) Alle konstanten Prädikate, für die das tertium non datur gilt,

b) $\mathfrak{s}[a] = t[a]$, $\mathfrak{s}[a] \leqq t[a]$ und $\mathfrak{s}[a] < t[a]$, wenn $\mathfrak{s}[a]$, $t[a]$ aus berechenbaren Funktionstermen durch Einsetzungen beliebiger Terme und der Nennvariablen a entstehen bzw. beliebige Terme sind, welche a nicht enthalten.

Die Eigenschaft, arithmetisch zu sein, erweist sich als *logisch progressiv*. Außerdem überträgt sie sich von $\mathfrak{P}[a]$ auf $B(\mathfrak{P}[a])$. Ist nämlich $\mathfrak{P}[a]$ arithmetisch, so läßt sich mit der B-Regel auf

$$B(\mathfrak{s} = t) \to \{B(\mathfrak{P}[\mathfrak{s}]) \sim B(\mathfrak{P}[t])\}$$

schließen. Gemäß Satz 7 gilt

$$\mathfrak{s} = t \to B(\mathfrak{s} = t),$$

womit sich auch $B(\mathfrak{P}[a])$ als arithmetisch ergibt.

Die unter a) genannten konstanten Prädikate, für die das tertium non datur gilt, lassen sich unter anderem in folgender Weise bilden:

I. Das tertium non datur gilt

a) für die Formeln $\mathfrak{s} = t$, $\mathfrak{s} \leqq t$, $\mathfrak{s} < t$ mit beliebigen Termen $\mathfrak{s}$, t,

b) für alle Formeln der Gestalt $B(\mathfrak{A})$.

II. Gilt das tertium non datur für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}[t_1, \ldots, t_n]$, so auch für $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bzw. $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n](t_1, \ldots, t_n)$.

III. Ist in einem System Σ_n zu jedem Term t das tertium non datur für $\mathfrak{A}[t]$ nachweisbar, so auch für $(x)\mathfrak{A}[x]$.

Die *vollständige Induktion* steht uns in folgender Weise zur Verfügung:

Ist $\mathfrak{P}[a]$ ein arithmetisches Prädikat, so gilt

$$\mathfrak{P}[0] \wedge (x)\{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\} \to \mathfrak{P}[t]$$

für jeden Term t.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, da allgemein $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$ gilt, $\overline{\mathfrak{P}}[\mathfrak{s}] \vee \mathfrak{P}[\mathfrak{s}]$ für jeden Term $\mathfrak{s}$. Mit solchen Formeln erhält man

$$\overline{\mathfrak{P}}[0] \vee \overline{\overline{\mathfrak{P}}[0] \vee \mathfrak{P}[0']} \vee \cdots \vee \overline{\overline{\mathfrak{P}}[0^{(n-1)}] \vee \mathfrak{P}[0^{(n)}]} \vee \mathfrak{P}[0^{(n)}]$$

und weiterhin

$$\mathfrak{P}[0] \wedge (x)\{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\} \to \mathfrak{P}[\mathfrak{z}]$$

für jede Ziffer $\mathfrak{z}$. Hat $\mathfrak{t}$ den Wert $\mathfrak{z}$, so gilt $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}$, und aus der Voraussetzung folgt $\mathfrak{P}[\mathfrak{z}] \to \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$. Mit einem Schnitt ergibt sich die behauptete Formel.

Ohne die Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}[a]$ arithmetisch ist, hat man nur den Satz:

Ist $\mathfrak{P}[0]$ *und* $(x)\{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\}$ *herleitbar, so auch* $\mathfrak{P}[\mathfrak{z}]$ *für jede Ziffer* $\mathfrak{z}$.

Demgemäß hat man allgemein die B_1-Grundformel

$$\overline{B}(\mathfrak{P}[0]) \vee \overline{(x)}\, B(\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']) \vee B(\mathfrak{P}[\mathfrak{z}])$$

für jede Ziffer $\mathfrak{z}$.

§ 5. Einführung der Analysis.

Die *reellen Zahlen* gewinnen wir durch eine Klasseneinteilung der Mengenterme, wobei diese Terme als Mengen rationaler Zahlen aufzufassen sind. Wir definieren

$$\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \equiv (x)\,(y)\,\{\overline{\mathfrak{t}}(x) \vee \overline{x < y} \vee \overline{(z)}\,\{\overline{\mathfrak{s}}(z) \vee y < z\}\}.$$

Dann gelten die Formeln

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\overline{\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t}} \vee \mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t})$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \vee \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s})$$

$$M(\mathfrak{r}) \wedge M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{r} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s} \wedge \mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \to \mathfrak{r} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t}).$$

Erklären wir nun $\mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t}$ als die Konjunktion $\mathfrak{s} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{t}$ als die Negation $\overline{\mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{s}}$, so erhalten wir mit „$\underset{\varrho}{=}$“ eine Äquivalenzrelation und mit „$\underset{\varrho}{<}$“ eine Ordnungsrelation für Mengenterme. Mit diesen Relationen werden die reellen Zahlen einschließlich $+\infty$ und $-\infty$ gegeben. Wir können

$$-\infty \equiv \lambda_x\, x = x \quad \text{und} \quad +\infty \equiv \lambda_x\, x \neq x$$

setzen. Dann gelten für jeden Mengenterm $\mathfrak{m}$ die Formeln

$$-\infty \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{m} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m} \underset{\varrho}{\leqq} +\infty.$$

Ein Mengenterm $\mathfrak{r}$, für den die Formeln $-\infty \underset{\varrho}{<} \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} \underset{\varrho}{<} +\infty$ herleitbar sind, stellt eine *eigentliche reelle Zahl* dar. Der als rationale Zahl aufgefaßte Term $\mathfrak{a}$ entspricht der eigentlichen reellen Zahl, die durch den Term $\lambda_x\, \mathfrak{a} < x$ dargestellt wird.

Eine *Menge reeller Zahlen* wird durch einen Term $\mathfrak{m}$ gegeben, der eine Menge von Mengen darstellt. Als *untere Grenze* zu einem solchen Term $\mathfrak{m}$ haben wir den Mengenterm $\cup\mathfrak{m}$. Es gelten die Formeln

$$M^2(\mathfrak{m}) \to B\,(\mathfrak{m}(\mathfrak{t}) \to \cup\mathfrak{m} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{t}),$$

$$M^2(\mathfrak{m}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B\,((x)\,\{\mathfrak{m}(x) \to \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} x\} \to \mathfrak{t} \underset{\varrho}{\leqq} \cup\mathfrak{m}).$$

Wir bezeichnen $\mathfrak{P}[a]$ als „*reelles Prädikat*“, wenn die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to A(\mathfrak{P}[\mathfrak{t}]),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t} \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{s}] \sim \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]\})$$

für alle Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ gelten. Reelle Prädikate sind insbesondere

a) alle ausgezeichneten Formeln (als konstante Prädikate),

b) $a \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m} \underset{\varrho}{\leqq} a$ für jeden Mengenterm $\mathfrak{m}$.

Jedes reelle Prädikat ist ein Mengenprädikat, da die Formel

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B(\mathfrak{s} \underset{\mu}{=} \mathfrak{t} \to \mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t})$$

herleitbar ist. Umgekehrt lassen sich aus Mengenprädikaten in folgender Weise reelle Prädikate gewinnen. Als den durch $\mathfrak{t}$ bestimmten *Dedekindschen Schnitt* definieren wir

$$\sigma(\mathfrak{t}) \equiv \lambda_x (E\, y)\, \{\mathfrak{t}(y) \wedge y < x\}.$$

Dann sind die Formeln

$$M(\mathfrak{t}) \to M\big(\sigma(\mathfrak{t})\big),$$

$$M(\mathfrak{s}) \wedge M(\mathfrak{t}) \to B\big(\mathfrak{s} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t} \to \sigma(\mathfrak{s}) \underset{\mu}{=} \sigma(\mathfrak{t})\big)$$

herleitbar. Daraus folgt:

Satz 10. Ist $\mathfrak{P}[a]$ ein Mengenprädikat, so ist $\mathfrak{P}[\sigma(a)]$ ein reelles Prädikat.

Weitere Möglichkeiten zur Bildung reeller Prädikate ergeben sich daraus, daß es sich auch hier um eine *logisch progressive* Eigenschaft der Prädikate handelt, wie man ohne Schwierigkeit feststellt.

Entsprechend wie die einstelligen reellen Prädikate werden die mehrstelligen reellen Prädikate $\mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$ erklärt. Offenbar ist $\mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$ ein n-stelliges reelles Prädikat, wenn $\mathfrak{P}[a, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}_1, a, \mathfrak{t}_3, \ldots, \mathfrak{t}_n]$, $\ldots$, $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{n-1}, a]$ für alle Mengenterme $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ einstellige reelle Prädikate sind. Für die mehrstelligen reellen Prädikate bestehen die entsprechenden Bildungsmöglichkeiten wie für die einstelligen.

Unter einer n-stelligen *reellen Funktion* verstehen wir einen Funktionsterm $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$, für den die Formeln

$$M(\mathfrak{t}_1) \wedge \cdots \wedge M(\mathfrak{t}_n) \to M(\mathfrak{f}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\mathfrak{s}_1) \wedge \cdots \wedge M(\mathfrak{s}_n) \wedge M(\mathfrak{t}_1) \wedge \cdots \wedge M(\mathfrak{t}_n) \to \\ B(\mathfrak{s}_1 \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{s}_n \underset{\varrho}{=} \mathfrak{t}_n \to \mathfrak{f}[\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n] \underset{\varrho}{=} \mathfrak{f}[\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]) \end{array} \right.$$

mit beliebigen Termen $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ herleitbar sind. Dabei lassen wir auch zu, daß nicht alle Nennvariablen $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$ auftreten. Dann kann jede n-stellige Funktion zugleich als eine höherstellige Funktion aufgefaßt werden. Man beweist ohne Schwierigkeit:

Satz 11. Ist $\mathfrak{P}[\mathfrak{t}, a_1, \ldots, a_n]$ in einem System Σ_n für jeden Term $\mathfrak{t}$ als reelles Prädikat nachweisbar, so ist $\lambda_x \mathfrak{P}[x, a_1, \ldots, a_n]$ eine reelle Funktion.

Besondere reelle Funktionen sind:

1. Die *konstanten Funktionen*, die keine Nennvariablen enthalten. Sie werden durch beliebige Mengenterme gegeben.

2. Die *uneigentlichen Funktionen* $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n]$, bei denen $\mathfrak{f}[a_1, \ldots, a_n](t)$ von t unabhängig ist[11]). Sie werden gegeben in der Form $\lambda_x \mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$, wo $\mathfrak{P}[a_1, \ldots, a_n]$ ein reelles Prädikat ist (das x nicht enthält).

Die Addition und Multiplikation reeller Zahlen läßt sich einführen durch die Definitionen

$$a_1 \underset{\varrho}{+} a_2 \equiv \lambda_x \overline{(y)}\,(z)\,\{x < y + z \vee \bar{\sigma}(a_1)\,(y) \vee \bar{\sigma}(a_2)\,(z)\}$$

$$a_1 \underset{\varrho}{;} a_2 \equiv \lambda_x \overline{(y)}\,(z)\,\{x < y \cdot z \vee \{\sigma(a_1)\,(y) \sim \sigma(a_2)\,(-z)\} \vee \{\sigma(a_1)\,(-y) \sim \sigma(a_2)\,(z)\}\}.$$

Auf Grund der Progressivität der Mengenprädikateigenschaft und der Sätze 10 und 11 erweisen sich $a_1 \underset{\varrho}{+} a_2$ und $a_1 \underset{\varrho}{;} a_2$ als zweistellige reelle Funktionen (da $\hat{\mathfrak{s}} < \mathfrak{t}$ und $a(\mathfrak{t})$ für alle Terme $\hat{\mathfrak{s}}, \mathfrak{t}$ Mengenprädikate sind). Für Mengenterme lassen sich mit diesen Funktionen die Körpergesetze nachweisen. —

Bei den Beweisführungen innerhalb der hier entwickelten Analysis ist zu beachten:

1. Die Abgeschlossenheit der reellen Zahlen besteht nur für die hier zugelassenen Mengen reeller Zahlen. Das heißt: Nur zu einem Mengenterm $\mathfrak{m}$, für den $M^2(\mathfrak{m})$ gilt, gibt es eine reelle Zahl $\cup\mathfrak{m}$ als untere Grenze.

2. Ein Term $\hat{\mathfrak{s}}$, der einen Bestandteil der Form $M(\mathfrak{u})$ enthält, ist im allgemeinen kein Mengenterm, da $M(\mathfrak{t})$ nicht für alle Terme $\mathfrak{t}$ als ausgezeichnet nachweisbar ist. Das bedeutet, daß ein Ausdruck, der unter Bezugnahme auf die Gesamtheit der reellen Zahlen definiert ist, im allgemeinen keine reelle Zahl darstellt. (Eine solche Definitionsmöglichkeit ist in der verzweigten Analysis überhaupt ausgeschlossen.)

Trotz dieser Einschränkungen, die gegenüber der naiven Analysis bestehen, dürften die Fundamentalsätze der Analysis bei geeigneten Formulierungen in dem vorliegenden System herleitbar sein. Die hierzu erforderlichen Abwandlungen der klassischen Beweise werden im allgemeinen in ähnlicher Weise vorzunehmen sein, wie dies LORENZEN[12]) für die verzweigte Analysis ausgeführt hat.

§ 6. Der Überdeckungssatz von HEINE-BOREL.

Als Beispiel für die Herleitung eines Fundamentalsatzes der Analysis geben wir eine Herleitung des *Überdeckungssatzes von* HEINE-BOREL, wobei wir uns der Einfachheit halber auf *eine* Dimension beschränken.

Für eine reelle Zahl $\mathfrak{r}$ und rationale Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ werden die Aussagen „$\mathfrak{r}$ *liegt in dem abgeschlossenen Intervall* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$" und „$\mathfrak{r}$ *liegt in dem offenen Intervall* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$" wiedergegeben durch

$$\mathfrak{r} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \equiv (y)\,\{\mathfrak{r}(y) \to \mathfrak{a} \leq y\} \wedge (y)\,\{\mathfrak{b} < y \to (E\,z)\,\{\mathfrak{r}(z) \wedge z < y\}\}$$

$$\mathfrak{r} \in (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (E\,y)\,\{\mathfrak{a} < y \wedge (z)\,\{\mathfrak{r}(z) \to y \leq z\}\} \wedge (E\,y)\,\{\mathfrak{r}(y) \wedge y < \mathfrak{b}\}.$$

---

[11]) Das sind Funktionen, die gemäß unserer Interpretation nur die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen.

[12]) Vgl. die unter [1]) zitierten Arbeiten.

Eine *Menge offener Intervalle* mit rationalen Grenzen wird ausgedrückt durch einen Term $\mathfrak{b}$, für den die Formel $M_2(\mathfrak{b})$ gilt. Dabei soll das offene Intervall $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ dann und nur dann zu dieser Menge gehören, wenn $\mathfrak{b}(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ gilt. Dann haben wir für die Aussage „$\mathfrak{b}$ *ist eine Überdeckung des abgeschlossenen Intervalles* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$" die Formel

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (x)\{M(x) \to B(x \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \to (Ey)(Ez)\{\mathfrak{b}(y, z) \wedge x \in (y, z)\})\}.$$

Die Aussage „*Es gibt eine endliche Teilmenge von* $\mathfrak{b}$, *welche* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *überdeckt*" drücken wir aus durch

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv$$
$$(En)(x)\{M(x) \to B(x \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \to (Ey)(Ez)\{\mathfrak{b}(y, z) \wedge x \in (y, z) \wedge y \underset{\nu}{\leqq} n \wedge z \underset{\nu}{\leqq} n\})\}.$$

Als *Überdeckungssatz* nehmen wir die Formel

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \wedge B(M_2(\mathfrak{b})) \to B(\mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})).$$

Der Beweis nach klassischem Muster lautet: u sei die untere Grenze aller rationalen Zahlen v, für die $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, v, \mathfrak{b})$ gilt. Würde u in $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ liegen, so folgte aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ die Existenz eines offenen Intervalles $(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ mit $\mathfrak{b}(\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ und $\mathfrak{u} \in (\mathfrak{s}, \mathfrak{t})$. Dann gäbe es zwischen $\mathfrak{s}$ und u eine rationale Zahl $\mathfrak{v}$, so daß auch noch $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{v}, \mathfrak{b})$ gilt. Dies verstößt gegen die Minimaleigenschaft von u. Also kann u nicht in $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ liegen. Da jedenfalls $\mathfrak{u} \underset{\varrho}{\leqq} \mathfrak{b}$ ist, folgt $\mathfrak{u} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{a}$, woraus sich schließlich $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ergibt.

Die hier gebrauchte untere Grenze u einer Gesamtheit rationaler Zahlen ist bei der vorliegenden Erklärung der reellen Zahlen durch den Term $\lambda_v \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, v, \mathfrak{b})$ darzustellen. Diesen Term können wir jedoch nicht als Mengenterm nachweisen, da er den Ausdruck $M(x)$ enthält. Der klassische Beweis läßt sich daher mit den angegebenen Formeln nicht darstellen. Wir können aber diesen Beweis in seinen wesentlichen Zügen retten, indem wir — entsprechend wie dies nach LORENZEN in der verzweigten Analysis zu erfolgen hat — statt $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ eine andere Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ verwenden, von der sich auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ schließen läßt.

Der in unserem System durchführbare Beweis verläuft folgendermaßen: Es sei

$$\begin{cases} \mathfrak{C}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}) \equiv (Ey)(Ez)\{\mathfrak{b}(y, z) \wedge y < \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} < z \wedge y \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n} \wedge z \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n}\} \\ \wedge (y)(z)\{\mathfrak{b}(y, z) \wedge \mathfrak{a} < z \wedge z \leqq \mathfrak{b} \to (Eu)(Ev)\{\mathfrak{b}(u, v) \wedge u < z \wedge z < v \wedge u \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n} \wedge v \underset{\nu}{\leqq} \mathfrak{n}\}\} \end{cases}$$
$$\mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \equiv (En)\mathfrak{C}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n).$$

Für den Term $\mathfrak{u} \equiv \lambda_v \mathfrak{F}(\mathfrak{b}, v, \mathfrak{b})$ ergeben sich die Formeln

$$M_2(\mathfrak{b}) \to M(\mathfrak{u})$$
$$M_2(\mathfrak{b}) \to B(\overline{(Ey)}(Ez)\{\mathfrak{b}(y, z) \wedge \mathfrak{u} \in (y, z)\}).$$

Hieraus folgt

$$M_2(\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to B(\overline{\mathfrak{u} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]}).$$

Mit den herleitbaren Formeln

$$M_2(\mathfrak{b}) \to B\left(\mathfrak{u} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \vee \mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \vee \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b})\right)$$

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \wedge M_2(\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to B\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b})\right)$$

erhält man

(1) $$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \wedge M_2(\mathfrak{b}) \wedge \mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to B\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right).$$

Um nun von $B\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right)$ auf $\mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zu schließen, beweist man zunächst durch vollständige Induktion

$$\overline{M}_2(\mathfrak{b}) \vee \overline{M}(\mathfrak{r}) \vee B\left(\overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}) \vee \overline{\mathfrak{r} \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} \vee (E\,y)(E\,z)\{\mathfrak{b}(y, z) \wedge \mathfrak{r} \in (y, z) \wedge y \underset{,}{\leqq} \mathfrak{n} \wedge z \underset{,}{\leqq} \mathfrak{n}\}\right).$$

Aus dieser Formel folgt

$$\overline{M}_2(\mathfrak{b}) \vee \overline{(E\,n)}\, B\left(\mathfrak{C}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n)\right) \vee \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Ferner ergibt sich, da $\mathfrak{C}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n})$ unter der Voraussetzung $M_2(\mathfrak{b})$ ausgezeichnet ist;

$$\overline{M}_2(\mathfrak{b}) \vee B\left(\overline{B}((E\,n)\mathfrak{C}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n)) \vee (E\,n) B(\mathfrak{C}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, n))\right).$$

Aus den letzten beiden Formeln und der herleitbaren Formel

(2) $$\overline{B}\left(M_2(\mathfrak{b})\right) \vee M_2(\mathfrak{b})$$

folgt

(3) $$B\left(M_2(\mathfrak{b})\right) \to B\left(B(\mathfrak{F}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right).$$

Die Formeln (1), (2), (3) liefern mit

$$\overline{\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}} \vee B(\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b})$$

die Behauptung

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \wedge B\left(M_2(\mathfrak{b})\right) \to B\left(\mathfrak{D}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{E}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right).$$

Marburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 5. Juni 1954.)

KANOLD, H.-J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 180—185 (1954)

Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen.

Von
HANS-JOACHIM KANOLD.

Wir wollen in dieser Note mit großen deutschen Buchstaben Mengen von natürlichen Zahlen bezeichnen. Ist $\mathfrak{A}$ eine solche Menge und $A(x)$ die Anzahl der $a \in \mathfrak{A}$ mit $a \leq x$, so wird die obere asymptotische Dichte von $\mathfrak{A}$ gegeben durch

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)}{x}. \tag{1}$$

Existiert

$$D^*(\mathfrak{A}) = \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x}, \tag{2}$$

so heißt dieser Grenzwert die natürliche Dichte von $\mathfrak{A}$. Wir sehen sofort, daß die Aussagen $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = 0$ und $D^*(\mathfrak{A}) = 0$ gleichwertig sind. Wir denken uns die Zerlegung einer natürlichen Zahl a in ein Primzahlpotenzprodukt stets geschrieben in der Gestalt

$$a = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}; \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_k. \tag{3}$$

Die Anzahl k der verschiedenen Primteiler von a wollen wir mit $V(a)$, den größten quadratischen Teiler von a mit $Q^2(a)$ bezeichnen, so daß

$$a = f(a)\, Q^2(a) \tag{4}$$

mit quadratfreiem $f(a)$ gilt.

Satz 1. *Es sei K eine beliebig vorgegebene, positive, reelle Zahl und $g(x)$ eine vorgegebene, für $x > K$ definierte Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften*[1]*:*

a) $g(x) > 0$ für $x > K$; b) $g(x)$ strebt monoton mit x gegen ∞. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$, $a > K$ sei bei der Zerlegung (4) die Ungleichung $Q^2(a) \geq g(a)$ erfüllt. Dann ist $D^*(\mathfrak{A}) = 0$.

Beweis. Es sei N eine natürliche Zahl, die der Ungleichung

$$N > K \log N \tag{5}$$

[1]) Es ist klar, daß man für $g(x)$ eine *langsam* wachsende Funktion wählen wird, z. B. $g(x) = x^{\frac{1}{1000}}$ oder $g(x) = \log\log x$. Ist insbesondere $0 < K < 1$ und $g(x) = x$, so ist $\mathfrak{A}$ die Menge der Quadratzahlen; ist $g(x) > x$ für alle $x > K$, so enthält $\mathfrak{A}$ höchstens Elemente $a \leq K$.

genügt. Für alle $a \leq \frac{N}{\log N}$ ist in (4) trivialerweise

$$f(a) \leq \frac{N}{\log N}. \tag{6}$$

Für $K < \frac{N}{\log N} < a \leq N$ ist

$$f(a)\, g\left(\frac{N}{\log N}\right) \leq f(a)\, g(a) \leq f(a)\, Q^2(a) = a \leq N, \tag{7}$$

also

$$f(a) \leq \frac{N}{g\left(\frac{N}{\log N}\right)}. \tag{8}$$

Setzen wir

$$\max\left(\left[\frac{N}{\log N}\right], \left[\frac{N}{g\left(\frac{N}{\log N}\right)}\right]\right) = N', \tag{9}$$

so ist für alle $a \leq N$ die Ungleichung

$$f(a) \leq N' \tag{10}$$

gültig. Wir betrachten nun bei festgehaltenem $f(a) = f$ alle $a = f \cdot Q^2(a) \leq N$. Ihre Anzahl ist höchstens gleich $\left[\left(\frac{N}{f}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$. Dann lassen wir f die natürlichen Zahlen $\leq N'$ durchlaufen und erhalten

$$\begin{cases} A(N) \leq \sum\limits_{f=1}^{N'} \left[\left(\frac{N}{f}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \leq \sqrt{N}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N'}}\right) \\ \qquad < \sqrt{N} + \sqrt{N} \int\limits_1^{N'} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{N} + 2\sqrt{NN'} - 2\sqrt{N} < 2\sqrt{NN'}. \end{cases} \tag{11}$$

Damit wird

$$\frac{A(N)}{N} < 2\sqrt{\frac{N'}{N}}. \tag{12}$$

Beachten wir, daß nach (9)

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N'}{N} = 0 \tag{13}$$

gilt, so folgt also auch $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{A(N)}{N} = 0$ und somit die Richtigkeit von Satz 1.

Nach einem Ergebnis von G. H. Hardy und S. Ramanujan [1] ist bei jedem $\varepsilon > 0$ für $N - o(N)$ Zahlen der Menge $\mathfrak{N}$ aller natürlichen Zahlen $n \leq N$ immer

$$(1 - \varepsilon) \log\log N < V(n) < (1 + \varepsilon) \log\log N. \tag{14}$$

Damit und mit Hilfe des Beweises von Satz 1 gewinnen wir

Satz 2. *Es sei S eine vorgegebene natürliche Zahl, ferner sei ε so vorgegeben, daß $0 < \varepsilon < 1$ gilt. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ sei mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) $V(a) \leq S$; *b) in der Zerlegung* (3) *ist für* $\varkappa > \varepsilon\, k = \varepsilon V(a)$ *mindestens ein* $\alpha_\varkappa$ *größer als* 1. *Dann ist* $D^*(\mathfrak{A}) = 0$.

Beweis. Angenommen, es wäre $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) > \varepsilon' > 0$. Wir wählen die natürlichen Zahlen S' und S'' so, daß die Ungleichungen

$$S' \geq S; \quad \varepsilon\, S' \geq S'' > \frac{4}{\varepsilon'} \tag{15}$$

erfüllt sind. Nun spalten wir $\mathfrak{A}$ in zwei Untermengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ auf, die wie folgt erklärt sind:

$$\begin{cases} \text{Für jedes} \quad a \in \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A} \quad \text{ist} \quad V(a) \leq S'; \\ \text{Für jedes} \quad a \in \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A} \quad \text{ist} \quad V(a) > S'. \end{cases} \tag{16}$$

Dann ist

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}) \leq \overline{D}^*(\mathfrak{A}_1) + \overline{D}^*(\mathfrak{A}_2). \tag{17}$$

Wählen wir jetzt die natürliche Zahl N so groß, daß die Ungleichung $S' < \frac{1}{2} \log \log N$ erfüllt ist, so ist nach dem oben erwähnten Ergebnis von HARDY und RAMANUJAN [s. (14)] sofort zu ersehen, daß

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}_1) = 0 \tag{18}$$

ist. Für jedes $a \in \mathfrak{A}_2$ ist nach der Voraussetzung b) des Satzes, sowie (15) und (16) wegen $\varkappa > \varepsilon V(a) > \varepsilon\, S' \geq S''$ auch

$$a = f(a)\, Q^2(a) > f(a)\, p_{S''}^2 > f(a)\, S''^2 \tag{19}$$

gültig. Für alle $a \in \mathfrak{A}_2$, $a \leq N$ ist daher

$$f(a) < \frac{N}{S''^2}. \tag{20}$$

Setzen wir

$$\left[\frac{N}{S''^2}\right] = N', \tag{21}$$

bezeichnen wir ferner mit $A_2(x)$ die Anzahl der $a \in \mathfrak{A}_2$ mit $a \leq x$, so können wir wie im Beweis von Satz 1 für die Menge $\mathfrak{A}_2$ mit Hilfe von (15) die Abschätzung

$$\frac{A_2(N)}{N} < 2\sqrt{\frac{N'}{N}} \leq \frac{2}{S''} < \frac{\varepsilon'}{2} \tag{22}$$

erhalten. Das ergibt $\overline{D}^*(\mathfrak{A}_2) < \frac{\varepsilon'}{2}$ und nach (17) und (18)

$$\overline{D}^*(\mathfrak{A}) < \frac{\varepsilon'}{2}, \tag{23}$$

was einen Widerspruch zu unserer Annahme am Anfang dieses Beweises darstellt. Also muß $\overline{D}^*(\mathfrak{A}) = 0$ sein. Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3. *Für die Menge* $\mathfrak{V}$ *aller vollkommenen Zahlen ist* $D^*(\mathfrak{V}) = 0$.

Beweis. Bezeichnen wir die Summe der positiven Teiler einer natürlichen Zahl n, einschließlich 1 und n, mit $\sigma(n)$, so heißt n vollkommen, wenn

$$\sigma(n) = 2n \tag{24}$$

ist. Bekanntlich hat jede gerade vollkommene Zahl nur zwei verschiedene Primteiler. Jede ungerade vollkommene Zahl besitzt nach L. EULER [2] genau einen Primteiler in ungerader Potenz, die übrigen Primteiler in gerader Potenz. Nach Satz 2 ergibt sich somit unmittelbar die Richtigkeit von Satz 3.

Wir wollen zum Schluß Mengen $\mathfrak{M}$ betrachten, deren Elemente aus natürlichen Zahlen bestehen, die sich zu je zwei zu befreundeten Zahlenpaaren zusammenfassen lassen. Zwei Zahlen m_1, m_2 bilden bekanntlich ein befreundetes Zahlenpaar, wenn

$$m_1 + m_2 = \sigma(m_1) = \sigma(m_2) \tag{25}$$

gilt. Daraus erhalten wir

$$\frac{\sigma(m_1)}{m_1} = 1 + \frac{m_2}{m_1} \tag{26}$$

Nehmen wir o.B.d.A. an, daß $m_1 \leq m_2$ ist, so muß m_1 eine nichtdefiziente Zahl sein, also

$$\frac{\sigma(m_1)}{m_1} \geq 2 \tag{27}$$

gelten. Das Gleichheitszeichen in (27) liefert $m_1 = m_2$, d.h. die vollkommenen Zahlen. Diese können wir wegen Satz 3 von unseren weiteren Betrachtungen ausschließen. Dann sind alle m_1 abundant. Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält gewisse abundante Zahlen m_1, deren Gesamtheit die Untermenge $\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}$ bildet, und gewisse defiziente Zahlen m_2, deren Gesamtheit die Untermenge $\mathfrak{M}_2 < \mathfrak{M}$ bildet. Wenn wir $\overline{D}^*(\mathfrak{M})$ nach oben abschätzen wollen, so sehen wir, daß

$$\overline{D}^*(\mathfrak{M}) \leq \overline{D}^*(\mathfrak{M}_1) + \overline{D}^*(\mathfrak{M}_2) \leq 2\overline{D}^*(\mathfrak{M}_1) \tag{28}$$

sein muß. Als einfache Folgerung aus Satz 2 ergibt sich nun

Hilfssatz 1. *Es sei h eine vorgegebene natürliche Zahl. $\mathfrak{M}$ sei die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren m_1, m_2 besteht, für die die Bedingung $m_1 + m_2 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$ erfüllt ist. Dann ist $D^*(\mathfrak{M}) = 0$.*

Beweis. Nach (25) bedeutet $\sigma(m_1) = m_1 + m_2 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$, daß m_1 weniger als h verschiedene ungerade Primzahlen in ungerader Potenz enthält. Setzen wir $2h = S$, so sehen wir, daß $\mathfrak{M}_1$ die Voraussetzungen von Satz 2 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ erfüllt. Damit ergibt sich die Richtigkeit von Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren m_1, m_2 besteht, bei denen 2 in m_1 nicht in der gleichen Potenz wie in m_2 enthalten ist. Dann ist $D^*(\mathfrak{M}) = 0$.*

Beweis. Angenommen, es wäre $\overline{D}^*(\mathfrak{M}) > \varepsilon > 0$. Wir wählen in Hilfssatz 1 die natürliche Zahl h so, daß

$$2^{h-2} > \frac{1}{\varepsilon} \tag{29}$$

ist. Aus $m_1 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$ folgt auch $m_1 + m_2 \not\equiv 0 \pmod{2^h}$. Nach Hilfssatz 1 können wir also für den weiteren Beweis $m_1 = 0 \pmod{2^h}$ annehmen. Beachten

wir, daß die Menge aller Vielfachen von 2^k die asymptotische Dichte $\frac{1}{2^k}$ besitzt, so erhalten wir nach (28) und (29)

$$\overline{D}^*(\mathfrak{M}) \leq 2 \cdot \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{30}$$

entgegen unserer Annahme.

Hilfssatz 3. *Es sei* $v = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1} p_i$ *eine gerade vollkommene Zahl. Ferner sei* $m_1 \equiv 0 \pmod{v}$; $m_2 \equiv 0 \pmod{2^{p-1}}$. m_1, m_2 *sei ein befreundetes Zahlenpaar. Dann ist* $m_1 = m_2 = v$.

Beweis. Wir nehmen für m_1 und m_2 die folgenden Primzahlpotenzzerlegungen an:

$$m_1 = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}; \quad 2 < p_2 < \dots < p_k; \quad \alpha_1 \geq p - 1; \quad p_i = 2^p - 1, \tag{31}$$

wobei i eine der Zahlen $2, \dots, k$ bedeutet;

$$m_2 = 2^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}; \quad 2 < q_2 < \dots < q_l; \quad \beta_1 \geq p - 1. \tag{32}$$

Ist wenigstens eine der beiden Zahlen α_1, β_1 gleich $p - 1$, so folgt aus (25), daß

$$m_1 + m_2 \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad \text{d. h.} \quad m_1 \equiv m_2 \equiv 0 \pmod{v} \tag{33}$$

sein muß. Damit ergibt sich aber $\frac{\sigma(m_j)}{m_j} \geq 2$ für $j = 1, 2$ und nach (25) auch $m_1 = m_2 = v$. Ist jede der beiden Zahlen α_1, β_1 größer als $p - 1$, so folgt

$$\begin{cases} 1 + \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sigma(m_1)}{m_1} \geq \frac{2^{p+1} - 1}{2^p} \cdot \frac{p_i + 1}{p_i} = 1 + \frac{2^p}{2^p - 1}; \\ 1 + \frac{2^p - 1}{2^p} = \frac{\sigma(2^p)}{2^p} \leq \frac{\sigma(m_2)}{m_2} = 1 + \frac{m_1}{m_2} \leq 1 + \frac{2^p - 1}{2^p}. \end{cases} \tag{34}$$

Dann müßte aber $m_1 \geq 2^p p_2$, $p_2 = 2^p - 1$ und $m_2 = 2^p$ sein, was nach (25) sofort zum Widerspruch führt.

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *die Menge, die aus allen befreundeten Zahlenpaaren* m_1, m_2 *besteht. Dann ist* $\overline{D}^*(\mathfrak{M}) < 0{,}204$.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 brauchen wir nur diejenigen m_1, m_2 zu betrachten, die den Bedingungen

$$m_1 = 2^\alpha P; \quad m_2 = 2^\alpha Q; \quad \alpha \geq 0; \quad P Q \equiv 1 \pmod{2} \tag{35}$$

genügen. Daraus folgt

$$\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1} - 1} < \frac{\sigma(P)}{P} < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}, \tag{36}$$

wobei für $\alpha = 0$ die obere Schranke durch ∞ ersetzt wird. Weiterhin können wir nach Hilfssatz 3 aus der Untermenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ alle Vielfachen von geraden vollkommenen Zahlen entfernen, ohne unsere Abschätzung zu beeinflussen. Das bedeutet, daß wir z. B. aus $\mathfrak{M}_1$ alle Zahlen weglassen können,

die durch wenigstens eine der folgenden zehn Zahlen teilbar sind:

$$(37) \qquad 2\cdot 3{,}2^2\cdot 7{,}2^3\cdot 5{,}2^4\cdot 11{,}2^4\cdot 13{,}2^5\cdot 17{,}2^5\cdot 19{,}2^5\cdot 23{,}2^5\cdot 29{,}2^4\cdot 31.$$

Denn für diese Zahlen ist offensichtlich (36) nicht erfüllt. Die natürliche Dichte der Menge aller Vielfachen dieser zehn Zahlen existiert und ist größer als 0,212. Alle diese Zahlen sind nichtdefizient. Da nach einem bekannten Ergebnis von Herrn F. BEHREND [3] die obere asymptotische Dichte der Menge aller nichtdefizienten Zahlen kleiner als 0,314 ist, ergibt sich nach (28) sogleich

$$(38) \qquad \overline{D}^*(\mathfrak{M}) < 2(0{,}314 - 0{,}212) = 0{,}204.$$

Damit ist der Beweis von Satz 4 beendet.

Literatur.

[1] RAMANUJAN, S.: Collected papers, 262—275. Cambridge 1927. Vgl. auch P. TURÁN, On a theorem of Hardy and Ramanujan. J. London Math. Soc. **9**, 274—276 (1934). — [2] EULER, L.: Opera postuma, Bd. I, S. 14—15. — [3] BEHREND, F.: Über numeri abundantes. I, II. Sitzgsber. Akad. Berlin **1932**, 322—328; **1933**, 280—293.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 15. Juli 1954.)

BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 186—199 (1954)

Some boundary properties of analytic functions.

By
F. BAGEMIHL and W. SEIDEL.

§1. This paper deals with limits and cluster sets[1]) (Häufungsmengen) of analytic and meromorphic functions in $|z|<R\leq+\infty$ along certain paths and families of paths of a fairly general character. In § 2 we define these families of paths, which we call *tresses*, and give examples thereof to indicate the variety of paths admitted by this definition. In § 3 we show, among other things, the identity between the cluster sets and, in particular, the limits of arbitrary complex-valued continuous functions and those of analytic functions along tresses in $|z|<R$. This generalizes results due to A. ROTH[2]), and the proof is facilitated by MERGELYAN's recent theorem on polynomial approximation. Of the other results in § 3 we mention here the example of an analytic function in $|z|<1$ which, on almost every radius, tends to a prescribed fixed limit in a prescribed fixed direction. The existence or non-existence of radial limits of analytic functions under various conditions is discussed in § 4. In § 5 we show that there exists an analytic function in $|z|<1$ whose cluster set on almost every radius is a given continuum in the extended complex plane, and this is generalized in several directions. The next section deals with the characterization of the function representing the limit values of an analytic function on a tress, and generalizes some theorems proved by A. ROTH. In the final section, we establish the identity between analytic point sets in the extended complex plane and the set of limit values of an analytic function along certain families of paths, and we conclude with a generalization of a well-known example concerning asymptotic values of an entire function given by W. GROSS.

§2. Throughout this paper, let $0<R\leq+\infty$. By a *monotonic boundary path*, abbreviated *mb-path*, in $|z|<R$, we shall mean a simple continuous curve, $z=z(\mu)$ $(0\leq\mu<1)$, in $|z|<R$, with $z(0)=0$, such that, as $\mu\to1$, $|z(\mu)|\to R$ (strictly) monotonically.

If $0<r<R$, we shall denote by C_r the circle $|z|=r$, and by D_r the disk $|z|\leq r$.

Definition 1. In a complex τ-plane, let E be a non-empty set of points on the circle $|\tau|=1$. To every $\tau\in E$, let there correspond an mb-path t_τ in

[1]) Let $f(z)$ be a complex-valued function in $|z|<R\leq+\infty$, and let S be a subset of $|z|<R$. The *cluster set of* $f(z)$ *on* S is the set of all points w in the extended complex plane with the property that there exists a sequence $\{z_\nu\}$ of points in S, with $\lim_{\nu\to\infty}|z_\nu|=R$, such that $\lim_{\nu\to\infty}f(z_\nu)=w$.

[2]) ROTH, ALICE: *Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen*. Commentarii Mathematici Helvetici **11**, 77—125 (1938).

$|z|<R$, such that the intersection of every pair of these mb-paths is the origin, and, for every r such that $0<r<R$, the one-to-one correspondence $\tau \leftrightarrow t_\tau \cap C_r$ $(\tau \in E)$ preserves cyclic order. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ will be called a *tress in* $|z|<R$ *relative to* E, provided that the following conditions are satisfied:

(i) E is an F_σ of first category relative to $|\tau|=1$.

(ii) There exists a decomposition of E,

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{1}$$

where each E_n is closed and nowhere dense relative to $|\tau|=1$, such that, if $T_n=\bigcup_{\tau \in E_n} t_\tau$, then $T_n \cap D_r$ is closed and nowhere dense $(n=1, 2, 3, \ldots; 0<r<R)$.

The following examples indicate to some extent the variety of families of mb-paths that form tresses.

Example 1. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that $0 \leq r<R$ and $\vartheta=\varphi$. Then the set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ of radii[3]) is a tress in $|z|<R$, relative to E.

Example 2. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, where $0 \leq \varphi<2\pi$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that $0 \leq r<R$ and, for R finite, $\vartheta=\varphi+\frac{1}{R-r}$, whereas for $R=+\infty$, $\vartheta=\varphi+r$. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ of spirals is a tress in $|z|<R$, relative to E.

In each of the first two examples, the mb-paths constituting the tress are all congruent to one another. In each of the following two examples, no two of the mb-paths of the tress are congruent.

Example 3. Let E be a non-empty F_σ of first category on $|\tau|=1$, $|\arg \tau| \leq \frac{1}{R}$ if R is finite, $|\arg \tau| \leq 1$ if $R=+\infty$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that, for R finite, $\vartheta=\sin\frac{1}{R-r}+\varphi \cdot (R-r)$, whereas for $R=+\infty$, $\vartheta=\sin r+\frac{\varphi}{1+r}$. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ is a tress in $|z|<R$, relative to E. In case R is finite, all the mb-paths of the tress have one and the same arc of $|z|=R$ as end.

Example 4. Let E be a non-empty F_σ of first category on $\tau|=1$, $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{2}$. For every $\tau=e^{i\varphi} \in E$, define t_τ to be the set of $z=r\,e^{i\vartheta}$ such that, for $\varphi \neq 0$, $r=\frac{\sin(\varphi-\vartheta)}{\sin\varphi}$, $0 \leq r<1$, $|\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$, and $\operatorname{sgn}\vartheta=\operatorname{sgn}\varphi$, whereas for $\varphi=0$, $0 \leq r<1$ and $\vartheta=0$. The set $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$ of circular arcs through the origin and the point $z=1$ is a tress in $|z|<R$, relative to E.

§ 3. Theorem 1[4]). *Let there be given a continuous complex-valued function* $g(z)$ *in* $|z|<R$, *and a tress* $\mathcal{T}=\{t_\tau : \tau \in E\}$, *relative to* E, *in* $|z|<R$. *Then*

[3]) In case $R=+\infty$, these are rays, not radii. We shall, nevertheless, refer to them in the sequel as radii, for the sake of brevity.

[4]) This theorem generalizes results obtained by A. Roth, *loc. cit.*, Theorems II and II'.

there exists a function $f(z)$, regular in $|z|<R$, such that, on every mb-path of $\mathcal{T}$, the cluster set of $f(z)$, $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ coincides with that of $g(z)$, $\Re g(z)$, $\Im g(z)$, respectively.

Proof. We shall retain the notation used in defining tress. Let

$$0<r_0<r_1<\cdots<r_n<\cdots<R,$$

where $\lim_{n\to\infty} r_n=R$, and set $F_0=D_{r_0}\cup(T_1\cap C_{r_1})$,

$$F_n=D_{r_n}\cup\left[\left(\bigcup_{j=1}^{n}T_j\right)\cap(D_{r_{n+1}}-D_{r_n})\right]\cup(T_{n+1}\cap C_{r_{n+1}}),\qquad(n=1,2,3,\ldots).$$

It follows from the definition of $\mathcal{T}$, that each F_n is a bounded closed set whose complement is connected.

We now define, by induction on n, two real-valued functions, $\varphi_n(z)$ and $\psi_n(z)$, on F_n, and a polynomial $p_n(z)$, as follows.

Put

$$\varphi_0(z)=\psi_0(z)=0,\qquad z\in D_{r_0}$$
$$\varphi_0(z)=\Re g(z),\quad \psi_0(z)=\Im g(z),\qquad z\in T_1\cap C_{r_1}.$$

The function $\varphi_0(z)+i\,\psi_0(z)$ is obviously continuous on F_0 and regular at all interior points of F_0. Consequently, according to MERGELYAN's theorem[5]), there exists a polynomial $p_0(z)$ such that

$$|p_0(z)-[\varphi_0(z)+i\,\psi_0(z)]|\leq 1,\qquad z\in F_0.$$

Suppose, now, that $n>0$, and that we have defined the functions $\varphi_{n-1}(z)$ and $\psi_{n-1}(z)$ on F_{n-1}, and the polynomials $p_0(z), p_1(z),\ldots,p_{n-1}(z)$, so that

$$\varphi_{n-1}(z)=\Re g(z),\quad \psi_{n-1}(z)=\Im g(z),\qquad z\in F_{n-1}\cap C_{r_n},$$

and

$$(2)\qquad |p_0(z)+p_1(z)+\cdots+p_{n-1}(z)-g(z)|\leq\frac{1}{2^{n-1}},\qquad z\in F_{n-1}\cap C_{r_n}.$$

By applying TIETZE's theorem[6]) and making use of (2), it is easy to show that there exist real-valued functions $\xi_n(z)$ and $\eta_n(z)$, continuous in $|z|<R$, such that

$$\xi_n(z)=\Re\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\quad \eta_n(z)=\Im\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\qquad z\in F_{n-1}\cap C_{r_n};$$
$$\xi_n(z)=\Re g(z),\qquad \eta_n(z)=\Im g(z),\qquad z\in F_n\cap C_{r_{n+1}};$$

$$(3)\quad |\xi_n(z)-\Re g(z)|\leq\frac{1}{2^{n-1}},\ |\eta_n(z)-\Im g(z)|\leq\frac{1}{2^{n-1}},\ z\in\bigcup_{j=1}^{n}T_j,\ r_n<|z|<r_{n+1}.$$

We now set

$$(4)\qquad \varphi_n(z)=\Re\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\quad \psi_n(z)=\Im\sum_{j=0}^{n-1}p_j(z),\quad z\in D_{r_n},$$

$$(5)\qquad \varphi_n(z)=\xi_n(z),\qquad \psi_n(z)=\eta_n(z),\qquad z\in F_n\cap(D_{r_{n+1}}-D_{r_n}).$$

[5]) MERGELYAN, S. N.: *On the representation of functions by series of polynomials on closed sets* (in Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S. **78**, 405—408 (1951). Amer. Math. Soc. Transl. No. 85, Providence, 1953.

[6]) See, *e.g.*, KURATOWSKI, C.: *Topologie I*, 2d ed., Warszawa-Wrocław, 1948, p. 117.

The function $\varphi_n(z)+i\,\psi_n(z)$ is clearly continuous on F_n and regular at all interior points of F_n. Again by MERGELYAN's theorem there exists a polynomial $p_n(z)$ such that

$$(6)\qquad |p_0(z)+p_1(z)+\cdots+p_n(z)-[\varphi_n(z)+i\,\psi_n(z)]|\leq\frac{1}{2^n},\qquad z\in F_n.$$

This completes the induction.

Let $f(z)=p_0(z)+p_1(z)+\cdots+p_n(z)+\cdots$ for $|z|<R$. If $z\in D_{r_n}$, it follows from (4) and (6) that

$$(7)\qquad |p_{n+j}(z)|\leq\frac{1}{2^{n+j}},\qquad (j=0,1,2,\ldots).$$

Hence, $f(z)$ is regular in $|z|<R$.

Let τ be an arbitrary, fixed element of E. We are going to show that

$$(8)\qquad \lim_{\substack{|z|\to R\\ z\in t_\tau}}\big(\Re f(z)-\Re g(z)\big)=0.$$

According to (ii), there exists an m such that $\tau\in E_m$. Assume that $k\geq 0$, $z\in t_\tau$, and $r_{m+k}\leq|z|<r_{m+k+1}$. Then, by the definition of $f(z)$, we have

$$(9)\qquad |\Re f(z)-\Re g(z)|\leq\gamma_k+\delta_k+\varrho_k,$$

where

$$\gamma_k=\left|\sum_{j=0}^{m+k}\Re p_j(z)-\varphi_{m+k}(z)\right|,$$

$$\delta_k=|\varphi_{m+k}(z)-\Re g(z)|,$$

and

$$\varrho_k=\sum_{j=m+k+1}^{\infty}|\Re p_j(z)|.$$

Applying (6), with $n=m+k$, we obtain

$$(10)\qquad \gamma_k\leq\frac{1}{2^{m+k}}.$$

Making use of (5), (3), and (2), with $n=m+k$, we see that

$$(11)\qquad \delta_k\leq\frac{1}{2^{m+k-1}}.$$

Finally, (7), with $n=m+k+1$, yields

$$(12)\qquad \varrho_k\leq\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+k+1+j}}.$$

Combining (9), (10), (11), and (12), we get

$$(13)\qquad |\Re f(z)-\Re g(z)|\leq\sum_{j=m+k-1}^{\infty}\frac{1}{2^j},$$

which implies (8).

An analogous argument shows that, for every $\tau \in E$,

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} (\Im f(z) - \Im g(z)) = 0, \tag{14}$$

and (8) and (14) yield the relation

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} (f(z) - g(z)) = 0. \tag{15}$$

The conclusion of the theorem is an immediate consequence of (8), (14), and (15).

Corollary 1. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a tress, relative to E, in $|z| < R$, and let there be given a continuous complex-valued function $g(z)$ in $|z| < R$ such that, for every $\tau \in E$, as $|z| \to R$, with $z \in t_\tau$, we have $\Re g(z) \to \alpha(\tau)$ and $\Im g(z) \to \beta(\tau)$, where $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are real, single-valued functions of $\tau \in E$, which may assume the values $\pm \infty$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for every $\tau \in E$, as $|z| \to R$, with $z \in t_\tau$, we have $\Re f(z) \to \alpha(\tau)$ and $\Im f(z) \to \beta(\tau)$.*

Corollary 2. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a tress in $|z| < R$, relative to a closed, nowhere dense set E, with the property*[7]) *that it is possible to take each E_n in (1) to be identical with E. Let α and β be real constants (possibly $\pm \infty$). Then there exists an $f(z)$, regular and not constant in $|z| < R$, such that*

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \Re f(z) = \alpha \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \Im f(z) = \beta$$

uniformly *for* $\tau \in E$.

Proof. It follows from (ii) and the fact that E is closed and nowhere dense, that it is possible to add an mb-path t' to $\mathcal{T}$ [for the purpose of ensuring that the function $f(z)$ finally arrived at is not identically constant] so as to obtain a tress $\mathcal{T}'$ having the properties assumed for $\mathcal{T}$. Let $\alpha' \neq \alpha$. Take $g(z)$ to be any continuous, complex-valued function in $|z| < R$ such that

$$\Re g(z) \to \alpha \quad \text{and} \quad \Im g(z) \to \beta \quad \text{uniformly on} \bigcup_{\tau \in E} t_\tau \quad \text{as} \quad |z| \to R, \tag{16}$$

and

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t'}} \Re g(z) = \alpha'.$$

Corollary 2 now follows from Corollary 1 if we note (16) and the fact that in the proof of Theorem 1, since now all the sets E_n are identical with E, (13) holds for a fixed m independent of the mb-path in $\mathcal{T}$.

Remark 1. As an application of Corollary 2, take E in Example 2 to be a perfect, nowhere dense set. Then[8]), *given a complex constant c, finite or*

[7]) The tresses in Examples 1 to 4, if E there is taken to be closed and nowhere dense, possess this property.

[8]) *Cf.* BAGEMIHL, F., P. ERDÖS and W. SEIDEL: *Sur quelques proprietés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle-unité.* Ann. sci. École norm. sup. (3) **70**, 135—147 (1953), p. 139, Theorem 4. BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: *Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analytic and meromorphic functions.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 1251—1258 (1953), p. 1251, Theorem 1.

infinite, there exists an $f(z)$, regular and not constant in $|z|<R$, such that, along the $2^{\aleph_0}$ prescribed spiral mb-paths in $|z|<R$ constituting the tress corresponding to E, $f(z)\to c$ uniformly as $|z|\to R$.

In Example 1, let $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, where P_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ is a perfect, nowhere dense set, of measure $2\pi-\frac{1}{n}$, so that E is an F_σ of first category and measure 2π. Applying Corollary 1 to the resulting tress $\mathcal{T}$, with $g(z)=\frac{i}{R-|z|}$ if R is finite, $g(z)=i|z|$ if $R=+\infty$, in $|z|<R$, we obtain

Corollary 3[9]. *There exists a function $f(z)$, regular in $|z|<R$, such that, for almost all ϑ in the interval $0\leq\vartheta<2\pi$, $\Re f(r e^{i\vartheta})\to 0$ and $\Im f(r e^{i\vartheta})\to+\infty$ as $r\to R$.*

In other words, for almost all ϑ in the interval $0\leq\vartheta<2\pi$, $f(r e^{i\vartheta})$ tends to ∞ *in the direction of the axis of imaginaries* as $r\to R$. This can be generalized as follows:

Corollary 4. *Let ω be any complex number in the extended complex plane, and let there be given an arbitrary fixed direction. Then there exists a non-constant $F(z)$, regular in $|z|<R$, such that, for almost all ϑ in the interval $0\leq\vartheta<2\pi$, $F(r e^{i\vartheta})$ tends to ω in the prescribed direction as $r\to R$.*

Proof. If $\omega=\infty$, then $F(z)$ can evidently be obtained from the function $f(z)$ in Corollary 3 by multiplying $f(z)$ by a suitable constant of modulus 1.

Suppose that ω is finite. It clearly suffices to assume that $\omega=0$ and that the given direction is opposite to that of the axis of reals. Let $f(z)$ be the function in Corollary 3, and form $F(z)=e^{if(z)}$. Then $\frac{\Im F(z)}{\Re F(z)}=\tan\Re f(z)$, which tends to 0 along almost all radii, whereas $\Re F(z)\to 0$ through positive values along almost all radii. This completes the proof.

If we set $G(z)=e^{f(z)}$ in $|z|<R$, where $f(z)$ is a function satisfying Corollary 3, this corollary yields

Corollary 5[10]. *There exists a $G(z)$, regular in $|z|<R$, such that the cluster set of $G(z)$ on almost every radius of $|z|<R$ is the unit circle $|w|=1$. Consequently*[11], *on almost every radius in $|z|<R$, $G(z)$ is bounded but possesses no limit as $|z|\to R$.*

§ 4. On the other hand, conditions under which the existence of radial limits can be inferred are given by

Theorem 2. *Let A be an arc of $|z|=1$, B be a subset of A, $\mathcal{R}$ be the set of radii in $|z|<1$ terminating in the points of B, and $f(z)$ be a meromorphic function in $|z|<1$, whose cluster set on every radius belonging to $\mathcal{R}$ is not the whole complex plane. If B is of second category relative to A, then there exists*

[9]) This answers a question raised by P. ERDÖS (written communication). Corollaries 3 and 4 sharpen and generalize examples due to Lusin. *Cf.* LUSIN, N., and J. PRIWALOFF: *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*. Ann. sci. Écolé norm. sup. (3) **42**, 143—191 (1925), pp. 183—185.

[10]) This result is generalized below in Corollary 6.

[11]) This answers a question raised by W. RUDIN (oral communication).

a subarc of A, almost every point of which is a FATOU *point*[12]) *of $f(z)$. If B is a residual set relative to A, then the set of* FATOU *points of $f(z)$ is of positive measure on every subarc of A.*

Proof. Suppose that there exists no subarc of A, almost every point of which is a FATOU point of $f(z)$. Then the complement of the set of FATOU points of $f(z)$ is of positive measure on every subarc of A. Hence[13]), there exists a residual subset, C, of A, such that the cluster set of $f(z)$ on every radius terminating in a point of C is the whole complex plane. If B is of second category, then[14]) $B \cap C \neq 0$, contrary to hypothesis. This proves the first part of the conclusion of the theorem, and the second part now follows from the fact that if B is residual, then[15]) B is of second category on every subarc of A.

It is well known that a function $f(z)$, regular in $|z|<1$, which is uniformly bounded on a set of radii of measure 2π, necessarily possesses radial limits. The next theorem shows, however, that for any ε with $0<\varepsilon\leq 2\pi$, there exists a regular function in $|z|<1$ which is uniformly bounded on a set of radii of measure $2\pi-\varepsilon$ and yet has no limit as $|z|\to 1$ along any radius of $|z|<1$. In this connection, the following result due to K. MEIER[16]) is of interest: If $f(z)$ is regular in $|z|<1$, and for every point ζ of an arbitrary set N on $|z|=1$ there exist *two* chords in $|z|<1$ terminating in ζ on which $f(z)$ is bounded, then at almost all points of N, $f(z)$ has a finite angular limit.

Theorem 3. *A necessary and sufficient condition on a non-empty set M of radii of $|z|<1$, that there exist a function $f(z)$, regular in $|z|<1$, which is uniformly bounded on the radii belonging to M and yet has no limit on any radius of $|z|<1$, is that M be nowhere dense.*

Proof. The condition is necessary. For suppose that M is not nowhere dense. Then M is dense in some sector of $|z|<1$, so that, if $f(z)$ is uniformly bounded on M, it must be bounded in this sector, and hence, by a well-known extension of FATOU's theorem, $f(z)$ has radial limits.

The condition is sufficient. For let M be a non-empty, nowhere dense set of radii in $|z|<1$, and let $\overline{M}$ be the closure of M relative to $|z|<1$. Then $\overline{M}$ is a closed, nowhere dense set of radii, relative to $|z|<1$. For every natural

[12]) For a definition of this term, see, *e.g.*, BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: *A general principle involving Baire category, with applications to function theory and other fields.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 1068—1075 (1953), p. 1074, footnote 10. The result referred to in footnote 12 of this paper as having been communicated by M. OHTSUKA is due to E. F. COLLINGWOOD, who informs us that he is publishing it, along with other related results.

[13]) *Ibid.*, p. 1071, Theorem 7 (c).

[14]) See, *e.g.*, HAHN, H.: *Reelle Funktionen (Punktfunktionen)*, p. 134. Leipzig 1932.

[15]) *Ibid.*, p. 136.

[16]) MEIER, K.: *Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen.* Commentarii Mathematici Helvetici **24**, 238—259 (1950), p. 241. We are indebted to E. F. COLLINGWOOD for calling our attention to this paper. A remark of MEIER's on p. 241 is Theorem 9, for G equal to the whole plane, of a paper of the present authors', *loc. cit.*[12]), p. 1072.

number n, let $r_n = 1 - \frac{1}{n}$. The complement of the set $\overline{M} \cap C_{r_n}$ relative to C_{r_n} consists of a finite or an enumerable number of mutually exclusive open arcs. In each of these open arcs that is of length greater than $\frac{1}{n}$ —call its length λ—, take a closed subarc of length $\lambda - \frac{1}{n}$, and denote the union of these finitely many closed subarcs by A_n. Let $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ be a sequence of numbers dense in the complex plane. Take $h(z)$ to be a continuous function on $\overline{M} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ such that $\Re h(z) = 0$ on $\overline{M}$, $\Im h(z) \to +\infty$ as $|z| \to 1$ on every radius belonging to $\overline{M}$, and $h(z) = \varrho_n$ on A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; this is clearly possible since each A_n is a positive distance away from $\overline{M}$. The set $\overline{M} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$ is closed relative to $|z| < 1$, and every radius of $|z| < 1$ that is not in $\overline{M}$ intersects all but a finite number of the sets A_n. A simple modification of the proof of Theorem 1 now yields a regular function $F(z)$ such that $\Re F(z) \to 0$ uniformly and $\Im F(z) \to +\infty$ as $|z| \to 1$ with $z \in \overline{M}$, and the cluster set of $F(z)$ on every radius of $|z| < 1$ that does not belong to $\overline{M}$ is the whole plane. The function $f(z) = e^{F(z)}$ has the required properties.

Remark 2. Theorem 3 obviously holds if the word "regular" therein is replaced by "meromorphic".

Remark 3. As the proof of the sufficiency part of the theorem shows, the function $f(z)$ that was obtained not only has no limit on any radius of $|z| < 1$, but its cluster set on every radius of $|z| < 1$ that does not belong to $\overline{M}$ is the whole plane.

Remark 4. The sufficiency part of the theorem, with obvious trivial modifications, is valid for entire functions.

Remark 5. On the other hand, the necessity part of the theorem cannot be extended to an entire function. Indeed, VALIRON[17]) has proved the existence of entire functions $f(z)$ which are bounded in a sector but do not approach a limit as $z \to \infty$ along any path in the sector.

§ 5. It is easy to show that the cluster set of an $f(z)$, regular in $|z| < R$, on an mb-path in $|z| < R$, is a continuum in the extended complex plane. The following theorem shows that the converse, for an arbitrary continuum, is also true.

Theorem 4[18]). *Let K be an arbitrary continuum in the extended complex plane, and t be an arbitrary mb-path in $|z| < R$. Then there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, whose cluster set on t is K.*

[17]) VALIRON, G.: *Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia.* J. Math. pures appl. (9) **7**, 113—136 (1928), p. 130. *Cf.* also GONTCHAROFF, W.: *Sur les valeurs des fonctions analytiques dans un angle.* Communications de la Société Mathématique de Kharkow (4) **4**, 129—135 (1930).

[18]) For a related theorem, see GROSS, W.: *Über die Singularitäten analytischer Funktionen.* Mh. Math. Phys. **29**, 3—47 (1918), p. 20. *Cf.* also WEIGAND, L.: *Über die Randwerte meromorpher Funktionen einer Veränderlichen.* Commentarii Mathematici Helvetici **22**, 125—149 (1949), p. 127.

Proof. We shall first define a continuous function $h(z)$ on t, whose cluster set on t is K. If K consists of the point at infinity, let $h(z)$ be a finite continuous function on t, which tends to ∞ as $|z| \to R$. Otherwise, let w_0 be a fixed finite point of K. Let $0 < r_1 < \cdots < r_n < \cdots < R$, where $\lim_{n\to\infty} r_n = R$, and set $A_n = t \cap \overline{(D_{r_{n+1}} - D_{r_n})}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. There exists[19]) a sequence of locally connected continua $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ such that $L_n \geqq L_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ and $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$. According to the HAHN-MAZURKIEWICZ theorem[20]) there exists a continuous function $h_n(z)$ (which may assume the value ∞) defined on A_n, which maps A_n onto L_n and whose values at both end points of A_n are w_0 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Let m be the integer such that $m < |w_0| \leq m + 1$. For every natural number n, define a continuous function $h_n^*(z)$ on A_n so that, if $|h_n(z)| \leq m + n$, then $h_n^*(z) = h_n(z)$, but if $|h_n(z)| > m + n$, then $|h_n^*(z)| = m + n$ (see, *e.g.*, KURATOWSKI, *loc. cit.*[19]), p. 271, VI, 2). Define $h(z)$ on t so as to be identical with $h_n^*(z)$ on A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Then $h(z)$ is evidently finite, single-valued, and continuous on t, and the cluster set of $h(z)$ on t is K.

Since t is closed relative to $|z| < R$, by TIETZE's theorem $h(z)$ can be extended to a finite continuous function $g(z)$ in $|z| < R$. Applying Theorem 1, we obtain a function satisfying the conclusion of Theorem 4[21]).

A generalization of Theorem 4 is given by

Theorem 5. *Let $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ be an enumerable number of mb-paths in $|z| < R$, the intersection of every pair of which is the origin, and let $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ be a sequence of arbitrary continua in the extended complex plane. Then there exists a function $f(z)$, regular and not constant in $|z| < R$, such that, for every n, the cluster set of $f(z)$ on t_n is K_n.*

Proof. According to the proof of Theorem 4, for every n there exists a continuous function $g_n(z)$ on t_n, whose cluster set on t_n is K_n. [If all the sets K_n consist of one and the same point c, then in order to ensure that the function $f(z)$ finally obtained is not identically equal to c, let t_0 be an mb-path in $|z| < R$, having only the origin in common with any one of the mb-paths t_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and define $g_0(z)$ on t_0 to be identically equal to some finite constant $c' \neq c$.] Retaining the notation of the proof of Theorem 4, for every n let $s_n = \overline{t_n - D_{r_{n+1}}}$, where the closure is taken relative to $|z| < R$. Then $S = \bigcup s_n$ is closed relative to $|z| < R$, and the function $g^*(z)$ defined on S so as to be identical with $g_n(z)$ on s_n, for every n, is evidently continuous on S. The proof can now be completed by an argument analogous to that in the last paragraph of the proof of Theorem 4.

Remark 6. In case every K_n is a single (finite or infinite) point, Theorem 5 reduces to an earlier result proved by the authors[22]).

[19]) See KURATOWSKI, C.: *Topologie II*. Warszawa-Wrocław, 1950, p. 188.

[20]) *Cf.* HAHN, H.: *loc. cit.*, p. 165.

[21]) A much weaker theorem of approximation than MERGELYAN's would suffice in the present case.

[22]) BAGEMIHL, F., and W. SEIDEL: *loc. cit.*[8]), p. 1251, Theorem 1 for the case $\lambda = \nu = 1$.

The preceding theorem can be extended in a measure- theoretic direction for certain families of mb-paths (*cf.* Remark 8). For the sake of simplicity we shall confine ourselves to radii and prove

Theorem 6. *Let M_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ be enumerably many mutually exclusive measurable subsets of the interval $0 \leq \vartheta < 2\pi$, of respective positive measures m_n, and let K_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ be arbitrary continua in the extended complex plane. Then there exists a function $f(z)$, regular and not constant in $|z|<R$, such that, for every n, for almost all ϑ in M_n, the cluster set of $f(z)$ on the radius* $\arg z = \vartheta$ $(|z|<R)$ *is* K_n.

Proof. Suppose, first, that not all the sets K_n consist of one and the same point. According to LUSIN's theorem[23]), for every n, there exist perfect, nowhere dense subsets $P_{n,j}$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ of M_n, such that $P_{n,j} \subseteq P_{n,j+1}$ and $\lim_{j\to\infty} \text{meas } P_{n,j} = m_n$. As in the proof of Theorem 4, for every n we can find a finite continuous function $d_n(r)$ on $0 \leq r < R$ whose cluster set as $r \to R$ is K_n. Let $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < R$, where $\lim_{n\to\infty} r_n = R$. For every j and every $n \leq j$, define $S_{n,j}$ to be the set of $r e^{i\vartheta}$ satisfying $\vartheta \in P_{n,j}$ and $r_j \leq r < R$, and let $S = \bigcup_{\substack{n,j=1 \\ n\leq j}}^{\infty} S_{n,j}$. Evidently S is a closed set relative to $|z|<R$. For every j and every $n \leq j$, define $h(z) = d_n(|z|)$ for every $z \in S_{n,j}$. The continuity of $h(z)$ on S now follows from the definition of S and the fact that for every j, any two of the perfect sets $P_{1,j}, P_{2,j}, \ldots, P_{j,j}$ are a positive distance apart. In accordance with TIETZE's theorem, extend $h(z)$ to a continuous function $g(z)$ in $|z|<R$. The set of radii $\arg z = \vartheta$, $0 \leq |z| < R$ $\left(\vartheta \in \bigcup_{\substack{n,j=1 \\ n\leq j}}^{\infty} P_{n,j}\right)$ is a tress. An application of Theorem 1 to this tress and our function $g(z)$ now completes the proof of Theorem 6 for this case.

On the other hand, if all the sets K_n consist of one and the same point c, we must ensure that the function $f(z)$ obtained above is not identically constant. Since $\bigcup_{\substack{n,j=1 \\ n\leq j}}^{\infty} P_{n,j}$ is of first category, there exists a radius in $|z|<R$, disjunct from S, and whose intersection with the disk D_r is at a positive distance from $S \cap D_r$ $(0<r<R)$. In this case we impose the further condition on the function $h(z)$ defined above, that it be identically equal to some finite constant $c' \neq c$ on this radius.

Corollary 6. *Let K be an arbitrary continuum in the extended complex plane. Then there exists an $f(z)$, regular (and not constant) in $|z|<R$, such that the cluster set of $f(z)$ on almost every radius of $|z|<R$ is K.*

§ 6. Definition 2. *A restricted tress $\mathfrak{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ in $|z|<R$, relative to E,* is a tress satisfying the following condition:

---

[23]) *Cf.* HOBSON, E. W.: *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, 3. ed., vol. I, p. 192. Cambridge 1927.

(iii) If $z \in \bigcup_{j=1}^{n} T_j - \{0\}$, then the unique $\tau = \tau(z) \in E$ such that $z \in t_\tau$, is a continuous function of z on the set $\bigcup_{j=1}^{n} T_j - \{0\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Remark 7. As is easily seen, the tresses given in Examples 1 to 4 are all restricted tresses. Examples of tresses that are not restricted, even for an enumerable E, can be constructed without difficulty.

As another application of Theorem 1, we prove the following theorem, which contains results due to A. ROTH[24]).

Theorem 7. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress in $|z| < R$, relative to E. Suppose that $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are real-valued functions (which may assume the values $\pm\infty$) of $\tau \in E$. Then, a necessary and sufficient condition that there exist a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for every $\tau \in E$,*

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \Re f(z) = \alpha(\tau) \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \Im f(z) = \beta(\tau),$$

is that $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ be of BAIRE *class ≤ 1 on E.*

Proof. Let $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < R$, where $\lim_{n \to \infty} r_n = R$.

To prove the necessity of the condition, it suffices to note that if $f(z)$ is a regular function in $|z| < R$ satisfying the limit relations in the theorem, and if we set $\alpha_n(\tau) = \Re f(t_\tau \cap C_{r_n})$ and $\beta_n(\tau) = \Im f(t_\tau \cap C_{r_n})$ $\left(n = 1, 2, 3, \ldots; \tau \in \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)$, then, making use of (iii) and the continuity of $f(z)$ on C_{r_n}, we see that $\alpha_n(\tau)$ and $\beta_n(\tau)$ are continuous functions of $\tau \in \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, and we have $\lim_{n \to \infty} \alpha_n(\tau) = \alpha(\tau)$ and $\lim_{n \to \infty} \beta_n(\tau) = \beta(\tau)$ for every $\tau \in E$.

Now let us prove the sufficiency of the condition. Since $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are, by hypothesis, of BAIRE class ≤ 1 on E, there exist real-valued functions $\alpha_n(\tau)$, $\beta_n(\tau)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, each of which is continuous and finite (or even bounded) on E, such that, for every $\tau \in E$, $\lim_{n \to \infty} \alpha_n(\tau) = \alpha(\tau)$ and $\lim_{n \to \infty} \beta_n(\tau) = \beta(\tau)$. For every $\tau \in E$, let

$$\xi(z) = \frac{(|z| - r_n)\,\alpha_{n+1}(\tau(z)) + (r_{n+1} - |z|)\,\alpha_n(\tau(z))}{r_{n+1} - r_n} \tag{17}$$

and

$$\eta(z) = \frac{(|z| - r_n)\,\beta_{n+1}(\tau(z)) - (r_{n+1} - |z|)\,\beta_n(\tau(z))}{r_{n+1} - r_n} \tag{18}$$

for

$$z \in t_\tau \cap \overline{D_{r_{n+1}} - D_{r_n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

It follows from (iii) that, for every $\tau \in E$, $\xi(z)$ and $\eta(z)$ are continuous on $\overline{t_\tau - D_{r_1}}$, where the closure is taken relative to $|z| < R$; moreover, it is evident

[24]) ROTH, A.: *loc. cit.*, pp. 123 and 125, Theorems VI and VI'.

from (17) and (18) that

$$\min\left(\alpha_n(\tau), \alpha_{n+1}(\tau)\right) \leq \xi(z) \leq \max\left(\alpha_n(\tau), \alpha_{n+1}(\tau)\right)$$

and

$$\min\left(\beta_n(\tau), \beta_{n+1}(\tau)\right) \leq \eta(z) \leq \max\left(\beta_n(\tau), \beta_{n+1}(\tau)\right)$$

for $z \in t_\tau \cap \overline{D_{r_{n+1}} - D_{r_n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, so that

$$\lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \xi(z) = \alpha(\tau) \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{|z| \to R \\ z \in t_\tau}} \eta(z) = \beta(\tau).$$

Let

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_j) \cap \overline{(D_{r_{j+1}} - D_{r_j})}\right],$$

and

$$\xi^*(z) = \xi(z), \quad \eta^*(z) = \eta(z), \qquad z \in M.$$

It is clear from (ii) that M is closed relative to $|z| < R$, and (iii) implies that $\xi^*(z) + i\,\eta^*(z)$ is continuous on M, so that, according to TIETZE's theorem, this function can be extended to a continuous function $g(z)$ in $|z| < R$. An application of Corollary 1 now completes the proof.

By combining the methods of proof of Theorems 3 and 7, one readily obtains

Theorem 8. *Let M be a non-empty, closed, nowhere dense set in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, and let $\alpha(\vartheta)$ and $\beta(\vartheta)$ be real-valued functions of* BAIRE *class ≤ 1 on M. Then there exists an $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for every $\vartheta \in M$,*

$$\lim_{r \to R} \Re f(r e^{i\vartheta}) = \alpha(\vartheta) \quad \textit{and} \quad \lim_{r \to R} \Im f(r e^{i\vartheta}) = \beta(\vartheta),$$

and, for every $\vartheta \notin M$ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, the cluster set of $f(z)$ on $\arg z = \vartheta$, as $|z| \to R$, is the whole complex plane.

§ 7. A theorem due to KIERST and MAZURKIEWICZ[25]) asserts that a necessary and sufficient condition that a set of points in the extended complex plane be the set of asymptotic values of a function $f(z)$, regular in $|z| < 1$, is that the set be analytic. This theorem refers to the asymptotic values of $f(z)$ along all possible paths in $|z| < 1$ tending to the boundary. The next two theorems deal with the analogous question for certain specified families of asymptotic paths in $|z| < R$.

Definition 3. Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress in $|z| < R$, relative to E, and assume that the power of E is $2^{\aleph_0}$. Every function that is regular in $|z| < R$ and tends to a limit, finite or infinite, along every mb-path belonging to $\mathcal{T}$, as $|z| \to R$, will be called a *$\mathcal{T}$-function*, and the set of all these limits (regarded as points in the extended complex plane) will be called the *$\mathcal{T}$-set* of this function.

---

[25]) *Cf.* KIERST, S.: *Sur l'ensemble des valeurs asymptotiques d'une fonction méromorphe dans le cercle-unité.* Fundamenta Mathematicae **27**, 226—233 (1936), p. 233. The analogue of this result for entire functions was recently announced by HEINS, M. H.: *The set of asymptotic values of an entire function.* Bull. Amer. Math. Soc. **60**, 150 (1954).

Using this definition, we now formulate

Theorem 9. *Let $\mathcal{T} = \{t_\tau : \tau \in E\}$ be a restricted tress in $|z| < R$, relative to E, where E is of power $2^{\aleph_0}$. A necessary and sufficient condition that a non-empty set A in the extended complex plane be the $\mathcal{T}$-set of some $\mathcal{T}$-function is that A be an analytic set.*

Proof. The condition is necessary. For if A is the $\mathcal{T}$-set of the $\mathcal{T}$-function $f(z)$, then it follows from Theorem 7 that A is the image of a function of BAIRE class defined on the BOREL set E, and hence[26]) A is an analytic set.

The condition is sufficient. For let A be a given non-empty analytic set in the extended complex plane. Then[27]) A is the image of a function $\alpha(\tau) + i\,\beta(\tau)$ defined on E, where $\alpha(\tau)$ and $\beta(\tau)$ are real-valued functions (which may assume the values $\pm\infty$) of BAIRE class ≤ 1 on E. An application of Theorem 7 now yields a $\mathcal{T}$-function whose $\mathcal{T}$-set is A.

Definition 4. Let $f(z)$ be regular in $|z| < R$. By the *radial limit set* of $f(z)$ we shall mean the set of points w in the extended complex plane such that, for some ϑ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $\lim\limits_{r \to R} f(r\,e^{i\vartheta}) = w$.

Theorem 10. *A necessary and sufficient condition that a set A in the extended complex plane be the radial limit set of a function regular in $|z| < R$ is that A be an analytic set.*

Proof. The condition is necessary. For if $f(z)$ is regular in $|z| < R$, then the radial limit set is an analytic set. Indeed, the set V of values of ϑ in the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ for which $\lim\limits_{r \to R} f(r\,e^{i\vartheta}) = w_\vartheta$ (possibly infinite) exists is[28]) an $F_{\sigma\delta}$, and the assertion now follows[29]) from the fact that w_ϑ is of BAIRE class ≤ 1 on V.

The condition is also sufficient. The case in which A is empty is taken care of by an example given by BIEBERBACH[30]). In case A is not empty, let V be a perfect, nowhere dense subset of the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Then, by applying the methods of the sufficiency proofs of Theorems 3 and 9, and noting Remark 4, it is seen that there exists a function $f(z)$, regular in $|z| < R$, such that, for $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $\lim\limits_{r \to R} f(r\,e^{i\vartheta}) = w_\vartheta$ exists if, and only if, $\vartheta \in V$, and $\{w_\vartheta : \vartheta \in V\} = A$.

The following theorem represents a generalization in several directions of a classical example due to W. GROSS[31]).

Theorem 11. *Let A be an arbitrary non-empty analytic set in the extended complex plane. Then there exists an $f(z)$, regular in $|z| < R$, and a subset M*

---

[26]) *Cf.* HAUSDORFF, F.: *Mengenlehre*, 2. ed., p. 269. Berlin u. Leipzig 1927.

[27]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.*[6]), pp. 388, 353, 283.

[28]) *Cf.* HAUSDORFF, F.: *loc. cit.*, p. 273.

[29]) *Ibid.*, p. 269.

[30]) BIEBERBACH, L.: *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2. Aufl., Bd. II, pp. 152—155. Leipzig u. Berlin 1931.

[31]) GROSS, W.: *Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist.* Math. Ann. **79**, 201—208 (1919). *Cf.* also A. ROTH, *loc. cit.*, p. 120, footnote 38.

of the interval $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, *where* M *is an* F_σ *of first category and of positive measure*[32]) *in every subinterval of* $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, *with the following properties:*

(A) *For every* $\vartheta \in M$, $\lim_{r \to R} f(r e^{i\vartheta}) = w_\vartheta$ *(possibly infinite) exists.*

(B) *If* I *is any subinterval of* $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, *then* $A = \{w_\vartheta : \vartheta \in M \cap I\}$, *and for every* $a \in A$, *there are* $2^{\aleph_0}$ *values of* $\vartheta \in M \cap I$ *for which* $w_\vartheta = a$.

Proof. It is an elementary matter to show by mathematical induction that in every subinterval I_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ of $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ with rational end points, there exists a perfect, nowhere dense set P_n of positive measure such that, if $j \neq k$, then $P_j \cap P_k$ is empty. The set $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ is an F_σ of first category, of positive measure in every subinterval of $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, and the set of radii $\arg z = \vartheta$, $|z| < R$ $(\vartheta \in M)$ is evidently a restricted tress in $|z| < R$ (*cf.* Example 1). Denote the RIEMANN sphere by S and the closed unit interval of real numbers by J. If we regard A as a subset of S, then[33]) the Cartesian product $A \times J$ is an analytic set in $S \times J$. For $n = 1, 2, 3, \ldots$ let $h_n(\vartheta)$ be a (single-valued) function of BAIRE class ≤ 1 mapping P_n on $A \times J$, let g be the function that projects $A \times J$ onto A, and set $d_n(\vartheta)$ equal to the composite function $g\, h_n(\vartheta)$; then[27]) $d_n(\vartheta)$ is a function of BAIRE class ≤ 1 mapping P_n onto A in such a manner that every point of A is the image of $2^{\aleph_0}$ values of $\vartheta \in P_n$. If we define $d(\vartheta)$ on M to be identical with $d_n(\vartheta)$ on P_n for every n, then[34]) $d(\vartheta) = \alpha(\vartheta) + i\,\beta(\vartheta)$ is of BAIRE class ≤ 1 on M, and an application of Theorem 7 now completes the proof.

Remark 8. Some of the foregoing theorems and corollaries (Theorems 6, 8, 10, 11, Corollaries 3 to 6), which, for the sake of simplicity, have been stated for radii, can obviously be extended to more general families of mb-paths, for example, those families of which the tresses in Examples 1 to 4 are subfamilies.

Added in proof: Theorem 1 for $R = +\infty$ is a consequence of a theorem due to KELDYSH, M. V., and M. A. LAVRENTIEV, *Sur un problème de M. Carleman* (in Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S. **23**, 746–748 (1939). We are indebted to W. KAPLAN for this reference. *Cf.* also MERGELYAN, S. N.: *Uniform approximations to functions of a complex variable* (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk, N. S. **7**, no. 2 (48), 31–122 (1952). Amer. Math. Soc. Transl. No. 101, p. 34. Providence 1954.

---

[32]) As the proof will show, the theorem holds equally well if the words "positive measure" are replaced by "measure zero". Note that M is independent of A and $f(z)$.

[33]) *Cf.* HAHN, H.: *loc. cit.*, p. 351.

[34]) *Cf.* KURATOWSKI, C.: *loc. cit.*[6]), p. 284.

The Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. (U.S.A.).
Dept. of Math., University of Notre Dame, Notre Dame, Ind. (U.S.A.).

(Eingegangen am 8. Juli 1954.)

KÜNZI, H. P.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 200—205 (1954)

Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet.

Von
HANS P. KÜNZI.

1. Einleitung.

In einer vorangehenden Arbeit [3] wurden Riemannsche Flächen mit endlich vielen einfach- und doppeltperiodischen Enden bezüglich ihrer Wertverteilungsgrößen (Ordnung, Defekt und Verzweigungsindizes) eingehend untersucht. Hierzu wurde eine Uniformisierungsmethode angegeben, die der Art der zu untersuchenden Flächen besonders gut angepaßt war.

In der vorliegenden Arbeit möchte ich in Ergänzung der oben zitierten zeigen, daß sich diese Uniformisierungsmethode auch dann noch anwenden läßt, wenn das Existenzgebiet der oben erwähnten Flächen mehrfach zusammenhängend ist. In unseren weiteren Untersuchungen beschränken wir uns auf den Fall eines endlich zusammenhängenden Existenzgebietes.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit möchte ich auf die von G. AF HÄLLSTRÖM ausgeführten Untersuchungen in seiner interessanten Dissertation [2] hinweisen. Dort versucht der Verfasser, die klassischen Ergebnisse der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre [4] für mehrfach zusammenhängende Gebiete zu erweitern. Es werden zwei verschiedene Typen von Grundgebieten betrachtet, nämlich solche, in denen die Randpunkte (wesentliche Singularitäten für die Funktion) in endlicher Zahl vorkommen und weitere, bei denen unendlich viele Ausnahmepunkte mit einer einzigen Häufungsstelle auftreten.

Zur Ausschöpfung solcher Gebiete werden bestimmte Potentialfunktionen nach H. SELBERG verwendet, die von einer bestimmten Massenbelegung abhängen. HÄLLSTRÖM weist darauf hin, daß die Berechnung der charakteristischen Funktionen zeige, wie die Größen $\mathfrak{m}, \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ für eine Funktion eine so überaus große Mannigfaltigkeit an Größenordnungen besitzen, daß sie eher für die Massenbelegung und deren Potentialfunktion als charakteristisch zu betrachten seien.

Im Falle der endlich vielfach punktierten Ebene gelten die beiden Hauptsätze entsprechend dem klassischen Falle.

Für unendlich viele Ausnahmepunkte ist für die Existenz der Defektrelation eine zusätzliche Bedingung notwendig.

In unseren folgenden Untersuchungen werden wir an Stelle der Ausschöpfung der Ebene durch Niveaulinien gewisser Potentialfunktionen eine unserer Funktionsklasse näher angepaßte, durch kreisähnliche Kurven einführen.

2. Streckenkomplexe mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten.

Wie aus der allgemeinen Theorie der Streckenkomplexe hervorgeht[1]), zeigt Fig. 1 ein Beispiel eines Komplexes, für welchen das Existenzgebiet der zugehörigen Funktion von dreifachem Zusammenhang ist, denn die einzelnen Teilkomplexe häufen sich gegen drei getrennte Punkte. Auf diese Weise gelingt es uns ganz allgemein, Streckenkomplexe von n-fachem Zusammenhang anzugeben.

Wie eingangs erwähnt, beschränken wir uns auf Streckenkomplexe von endlichem Zusammenhang und im weiteren auf solche, bei denen die einzelnen Teilkomplexe periodische Enden aufweisen.

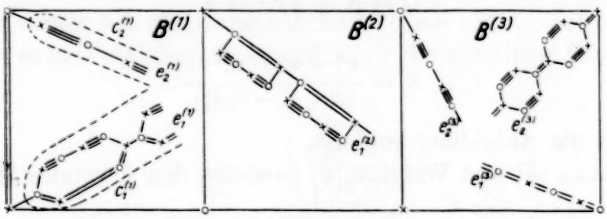


Fig. 1.

Ein Streckenkomplex mit n-fachem Zusammenhang läßt sich durch eine Konfiguration von n Blöcken $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ darstellen. Die einzelnen Enden werden, beginnend bei irgendeinem Ende in jedem Blocke im positiven Drehsinn numeriert $(\mathfrak{e}_1^{(\nu)}, \mathfrak{e}_2^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{e}_{p^{(\nu)}}^{(\nu)})$. Die Anzahl der Enden in den Blöcken ist im allgemeinen voneinander verschieden. Es ist bekannt, daß durch Vorgabe des Streckenkomplexes $\mathfrak{S}$, der Grundpunkte (Verzweigungspunkte) $\mathfrak{a}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ in der w-Ebene und der Zerschneidungskurve k_w der Riemannschen Fläche (vgl. [1], [3]) die Funktion $z = \zeta(w)$ bis auf eine Ähnlichkeitstransformation gegeben ist. Dadurch sind aber auch die Punkte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ (wesentliche Singularitäten in der z-Ebene) festgelegt bis auf die obige Transformation. Für unsere weiteren Berechnungen ist es unnötig, die Lage der Punkte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ zu kennen.

3. Die Uniformisierung.

Zur Uniformisierung denken wir uns aus der gegebenen Riemannschen Fläche diejenigen Teile ausgeschnitten, die im Streckenkomplex $\mathfrak{S}$ je einem Blocke $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ entsprechen. Jeden dieser Blöcke können wir nun nach den Methoden von [3] teils konform, teils quasikonform so in eine schlichte $Z^{(\nu)}$-Ebene abbilden, daß die wesentliche Singularität nach $Z^{(\nu)} = \infty$ fällt. Die n Blöcke werden damit in n schlichte Ebenen $|Z^{(\nu)}| \neq \infty$ uniformisiert.

Es würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, die einzelnen Uniformisierungsmethoden hier wiederzugeben. Wir wollen uns lediglich darauf beschränken, methodisch auf die verschiedenen Schritte hinzuweisen, und übernehmen Resultate und Bezeichnungen so weit dies erforderlich, aus meiner Arbeit [3].

[1]) Vgl. hierzu ELFVING [1].

Ein besonders wichtiges Hilfsmittel in unserem Uniformisierungsverfahren bilden bestimmt konstruierte quasikonforme Abbildungen. Dabei handelt es sich um eineindeutige stetige und stückweise differenzierbare Abbildungen eines Gebietes der $z=x+iy$ Ebene auf ein Gebiet der $w=u+iv$ Ebene. Unter dem *Dilatationsquotienten* einer solchen Abbildungen verstehen wir die Größe

$$D_{w/z}=D_{z/w}=\frac{\operatorname{Max}|dw/dz|}{\operatorname{Min}|dw/dz|}.$$

Für den so eingeführten Verzerrungsquotienten ergibt eine einfache Rechnung

$$D=K+\sqrt{K^2-1}$$

mit

$$K=\frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{|u_x v_y-u_y v_x|}.$$

Für $D\equiv 1$ ist die Abbildung konform.

TEICHMÜLLER [5] und WITTICH [6] bewiesen den folgenden für uns wichtigen

Verzerrungssatz. *Die punktierte z-Ebene sei eineindeutig und quasikonform auf die punktierte w-Ebene abgebildet. Für eine relativ kleine Dilatation, für die das Integral*

$$\iint_{|z|>r}(D_{w/z}-1)\frac{dx\,dy}{|z|^2}$$

konvergiert, gilt bei Annäherung an den unendlichfernen Punkt

$$|w|\sim\text{const}\cdot|z|.$$

Eine derartige quasikonforme Abbildung, die dem obigen Verzerrungssatz genügt, nennen wir kreisähnlich.

Zur Bestimmung gewisser Wertverteilungsgrößen werden wir das Riemannsche Flächenstück, das zu einem Block gehört, in wieder endlich viele Teilstücke zerschneiden. Diese Flächenstücke werden konform und quasikonform in schlichte Gebiete einer Z-Ebene abgebildet und nachher mit den bestimmt konstruierten quasikonformen Abbildungen zu einer schlichten Z-Ebene verheftet. Auf Grund des Teichmüllerschen Verzerrungssatzes ist es uns erlaubt, die Wertverteilungsgrößen im quasikonformen Z-Bild zu berechnen.

Befassen wir uns vorerst nur mit Blöcken $\mathfrak{B}^{(\nu)}$, die ausschließlich einfachperiodische Enden $\mathfrak{e}_\mu^{(\nu)}$ $(\mu=1,2,\dots p^{(\nu)})$ aufweisen. Jeder Block besitzt dann auch $p^{(\nu)}$ logarithmische Elementargebiete, denen auf der Riemannschen Fläche über den Grundpunkten $\mathfrak{a}_k$ logarithmische Windungspunkte entsprechen.

Für ein genügend kleines t schneiden wir das Windungselement $|w-\mathfrak{a}_k|\leq t$ aus der Fläche und uniformisieren dieses mit Hilfe des Logarithmus in eine Halbebene.

Nachdem alle logarithmischen Windungspunkte, die zu einem Block $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ gehören, uniformisiert sind, bleiben noch die Umgebungen (vgl. Fig. 1) der $p^{(\nu)}$ einfachperiodischen Enden, begrenzt durch $\mathfrak{C}_{p^{(\nu)}}^{(\nu)}$, zurück. Diese restlichen

Teilgebiete der Riemannschen Fläche uniformisieren wir mit den ihnen entsprechenden Umkehrfunktionen von $w_\mu^{(\nu)} = R_\mu^{(\nu)}(e^\zeta)$ in Halbstreifen (vgl. [3]) ($R_\mu^{(\nu)}$ bedeutet eine rationale Funktion von e^ζ). Diese $\mathfrak{p}^{(\nu)}$-Halbstreifen müssen jetzt, abgesehen von einer unwesentlichen Nullpunktsumgebung längs ihrer Berandungen so verheftet werden, wie dies durch die Urbilder auf der Riemannschen Fläche vorgegeben ist.

In entsprechender Weise können wir die Uniformisierung vornehmen, wenn neben einfachperiodischen noch doppeltperiodische Enden auftreten (vgl. [3]).

4. Die Wertverteilung.

Sind nach obiger Art sämtliche Blöcke $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) in punktierte Ebenen $Z^{(\nu)} \neq \infty$ uniformisiert, so schöpfen wir die einzelnen Blätter Z durch

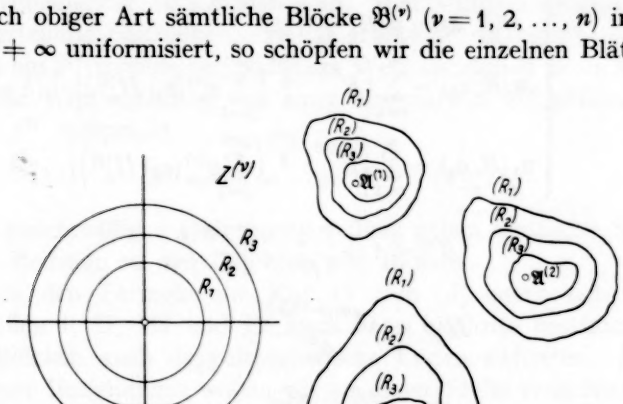


Fig. 2.

konzentrische Kreise $|Z^{(\nu)}| = R$ aus. Diesen n ausschöpfenden Kreissystemen entsprechen auf Grund des angegebenen Verzerrungssatzes n kreisähnliche Kurvensysteme im konformen ζ-Bild der n-fach punktierten Ebene, wobei sich die einzelnen Kurven eines Systems häufen gegen einen der Grundpunkte $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

Diese kreisähnlichen Kurven treten hier an die Stelle der Niveaulinien der Selbergschen Potentiale in der Hällströmschen Ausschöpfung.

Nach den Methoden in [3] berechnen wir jetzt für jedes Blatt $Z^{(\nu)}$ die uns interessierenden Anzahlfunktionen.

Nach den eingeführten Bezeichnungen gibt $\omega_\mu^{(\nu)}$ bzw. $\omega_{\mu'}^{(\nu)}$ ($\mu, \mu' = 1, 2 \ldots \mathfrak{p}^{(\nu)}$) die Anzahl der berandenden Außenknoten einer Periode der rechten bzw. der linken Berandung eines einfachperiodischen Endes an (rechts bzw. links gilt für die Berandung, wenn man vom Anfangsknoten in Richtung des Endes schaut).

Nun werden mit $g_\mu^{(\nu)}$ die Anzahl der in einer Periode des Endes $\mathfrak{e}_\mu^{(\nu)}$ auftretenden Innenknoten bezeichnet. Dann fixieren wir in jedem Block alle algebraischen Elementarpolygone deren $2m$ Seiten von Streckenzyklen $k, k+1$

gebildet sind und bezeichnen diese Anzahl mit $j^{(\nu)}$. Die zugehörigen halben Seitenzahlen seien $m_1, m_2, \ldots, m_{j^{(\nu)}}$.

Jetzt betrachten wir die Ausdrücke

$$\mathfrak{g}_\mu^{(\nu)}(a_k) = \sum_{k=1}^{j^{(\nu)}} m_k \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}_{1\mu}^{(\nu)}(a_k) = \sum_{k=1}^{j^{(\nu)}} (m_k - 1)$$

und bilden nach NEVANLINNA [4], WITTICH [7] und [3] die Anzahlfunktionen für alle $Z^{(\nu)}$-Ebenen mit $|Z| < R$:

(I)
$$\begin{cases} \mathfrak{n}(R) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[R^{\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2}} \left(\sum_{\mu=1}^{p^{(\nu)}} \mathfrak{g}_\mu^{(\nu)} \cdot \Pi_\mu^{(\nu)} \right) \right] \\ \mathfrak{n}(R, a) = \mathfrak{n}(R) + O(1) \\ \mathfrak{n}(R, a_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[R^{\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2}} \left(\sum_{\mu=1}^{p^{(\nu)}} \mathfrak{g}_\mu^{(\nu)}(a_k) \Pi_\mu^{(\nu)} \right) \right] \quad (k = 1, \ldots m) \\ \mathfrak{n}_1(R, a_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[R^{\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2}} \left(\sum_{\mu=1}^{p^{(\nu)}} \mathfrak{g}_{1\mu}^{(\nu)}(a_k) \Pi_\mu^{(\nu)} \right) \right] \end{cases}$$

mit

$$\beta^{(\nu)} = 1 + \left(\frac{2}{p^{(\nu)}} \frac{\log A^{(\nu)}}{2\pi} \right)^2$$

und

$$\Pi_\mu^{(\nu)} = \frac{(A^{(\nu)})^{\mu - 1/p^{(\nu)}}}{A_\mu^{(\nu)}},$$

wobei

$$A^{(\nu)} = \frac{\omega_1^{(\nu)} \ldots \omega_{p^{(\nu)}}^{(\nu)}}{\omega_{1'}^{(\nu)} \ldots \omega_{p'^{(\nu)}}^{(\nu)}}$$

und

$$A_\mu^{(\nu)} = \frac{\omega_1^{(\nu)} \ldots \omega_{\mu-1}^{(\nu)}}{\omega_{1'}^{(\nu)} \ldots \omega_{\mu-1'}^{(\nu)}}.$$

Nach AHLFORS und WITTICH definieren wir die

(II) Ordnung $\lambda = \operatorname{Max}_{(\nu)} \left[\beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2} \right]$,

(III) Defekte $\delta(a_k) = 1 - \lim_{R \to \infty} \frac{\mathfrak{n}(R, a_k)}{\mathfrak{n}(R)}$,

(IV) Indizes $\varepsilon(a_k) = \lim_{R \to \infty} \frac{\mathfrak{n}_1(R, a_k)}{\mathfrak{n}(R)}$.

Die Werte von I eingesetzt, ergibt uns die gewünschten Wertverteilungsgrößen für die betrachtete Funktionsklasse.

5. Ergebnisse.

An Stelle der maximalen Ordnung λ, die wir allgemein als Ordnung der erzeugenden Funktion mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet bezeichnen, können wir noch die partiellen Ordnungen

$$\lambda^{(\nu)} = \beta^{(\nu)} \cdot \frac{p^{(\nu)}}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zum Vergleich heranziehen, welche die Ordnungen der Funktion in den Umgebungen der wesentlichen Singularitäten $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ angeben.

Nach I, II, III und IV können wir für die Wertverteilung folgende Fälle unterscheiden:

(α) Eine der partiellen Ordnungen $\lambda^{(\nu)}$ ist größer als alle andern. In diesem Falle ist für die Wertverteilung nur das Verhalten der Funktion in der Umgebung von $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ maßgebend.

(α') Weisen sämtliche Blöcke gleich viele einfachperiodische Enden auf, d.h. $p^{(1)}=p^{(2)}=\cdots=p^{(n)}$, so kann man daraus noch nicht auf die Gleichheit der partiellen Ordnungen schließen, weil die Asymmetriefaktoren $\beta^{(\nu)}$ im allgemeinen voneinander verschieden sind. Hier würde diejenige Singularität die Wertverteilung bestimmen, der das größte $\beta^{(\nu)}$ zukommt.

(α'') Da ein $\beta^{(\nu)}$ irgendeinen endlichen Wert annehmen kann, so ist es möglich, daß die Wertverteilung von einer Singularität $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ abhängt, der nicht das größte $p^{(\nu)}$ entspricht.

(β) $$\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\cdots=\lambda^{(h)} \qquad (h\leq n).$$

Bei dieser gleichmäßigen Ordnungsverteilung geben sämtliche Singularitäten $\mathfrak{A}^{(1)}\ldots\mathfrak{A}^{(h)}$ Beiträge zu den Defekten und Indizes.

(γ) Nach den Formeln aus Kap. IV von [3] lassen sich die Wertverteilungsgrößen I, II, III und IV auch dann explizite bestimmen, wenn in gewissen Blöcken auch doppeltperiodische Enden auftreten. Auf die Herleitung dieser Beziehungen wollen wir an dieser Stelle verzichten und weisen nur noch darauf hin, daß bei einem solchen Komplex ebenfalls Defekte auftreten können, trotz dem Vorhandensein doppeltperiodischer Enden, nämlich dann, wenn die Ordnung, die zu einem Block mit doppeltperiodischen Enden gehört, kleiner ist als diejenige irgendeines anderen Blockes mit nur einfachperiodischen Enden.

Aus diesen Fallunterscheidungen geht besonders deutlich hervor, wie wesentlich die Asymmetriefaktoren in unserer Funktionsklasse die Wertverteilung beeinflussen.

Literatur.

[1] Elfving, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. Fennicae, N. S. **2**, Nr. 3 (1934). — [2] Hällström, G. af: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. **12**, Nr. 8 (1940). — [3] Künzi, H. P.: Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre. Comm. Math. Helv. 29 (1955). — [4] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen, 2. Aufl. Springer 1953. — [5] Teichmüller, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. Dtsch. Math. **3** (1938). — [6] Wittich, H.: Zum Beweise eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. **51** (1949). — [7] Wittich, H.: Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. **122** (1950).

Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule, Mathemat. Institut.

(Eingegangen am 24. Juli 1954.)

STOLL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 206—234 (1954)

Über meromorphe Modifikationen.

I. Allgemeine Eigenschaften der Modifikationen.

Von

WILHELM STOLL.

Einleitung*).

Die komplexe Zahlenebene R^2 läßt sich bekanntlich mittels eines unendlichfernen Punktes zur Zahlenkugel P^2 abschließen. Eine andere Abschließung zu einer zusammenhängenden, zweidimensionalen, kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist nicht möglich. Dagegen kann der Zahlenraum R^{2n} von n komplexen Veränderlichen in verschiedener Weise, z. B. mit einer unendlichfernen Ebene zum projektiven Raum P^{2n} oder mit n unendlichfernen Ebenen zum n-fachen Produktraum $P^2 \times \cdots \times P^2$ abgeschlossen werden. Man kann dies auch so ausdrücken: Ein Punkt der Zahlenkugel kann nur durch sich selbst ersetzt werden, während eine Ebene der Dimension $n-1$ des projektiven Raumes R^{2n} im Falle $n > 1$ durch n andere Ebenen ersetzt werden kann. Welche solche Ersetzungen sind möglich?

Allgemein kann man fragen, auf wieviel Arten sich eine $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G modifizieren läßt, indem man einen abgeschlossenen Teil M herausstieht und den Rest $A = G - M$ durch eine Menge N zu einer neuen Mannigfaltigkeit H erweitert. BEHNKE und STEIN fassen diesen Begriff der Modifikation genauer so[1]):

1. *Zwei zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ seien gegeben.*

2. *Eine pseudokonforme Abbildung τ bilde die offene Menge $A \subseteq G$ auf $B \subseteq H$ ab.*

3. *Ist U eine Umgebung von $M = G - A$, so hat jeder Punkt $Q \in N = H - B$ eine Umgebung V mit $\tau^{-1}(V \cap B) \subseteq U$.*

BEHNKE und STEIN beweisen, daß mit M auch N „klein" ist, genauer: „Wenn f in einer offenen Umgebung U von M analytisch, in keinem Teil-

*) Die Einleitung gibt eine Übersicht über eine Reihe von Arbeiten, die unter dem gemeinsamen Titel: „Über meromorphe Modifikationen" erscheinen werden. Teil I (§ 1—§ 3), Teil II (§ 4—§ 6) und Teil II (§ 7—§ 9) erscheinen in der Mathematischen Zeitschrift, Teil IV (§ 10—§ 12) und Teil V (§ 13—§ 16) in den Mathematischen Annalen.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen hat mir Herr Prof. H. HOPF freundlicherweise ein Manuskript seiner Arbeit [9a] zugesandt, die demnächst in den Comm. Math. Helv. erscheinen wird. In dieser Arbeit beweist H. HOPF seine bereits früher (in [9]) angekündigten Ergebnisse und verallgemeinert sie. Die vorliegende Folge von Arbeiten führt die Untersuchungen von H. HOPF weiter und gibt eine vollständige Antwort auf die Frage von H. HOPF, welche Modifikationen sich im Falle der Dimension 4 durch σ-Prozesse erzeugen lassen. Es sei daher besonders auf diese Arbeit von H. HOPF [9a] hingewiesen.

[1]) Man vgl. BEHNKE und STEIN [1] S. 8.

gebiet von U identisch Null und auf M Null ist, so liegt N in einer Menge N^*, die in einer offenen Umgebung V von N analytisch ist und höchstens die Dimension $2n-2$ hat[2]).

Für die Zwecke dieser Arbeit wird der Begriff der Modifikation hiervon abweichend definiert, nämlich symmetrisch, worauf insbesondere H. HOPF hingewiesen hat, ohne die Forderung 3, da diese beispielsweise bei einer kompakten Mannigfaltigkeit G von selbst erfüllt ist; ferner werden M und N als „klein" vorausgesetzt:

a) *Komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ seien gegeben.*

b) *Die abgeschlossene Teilmenge M von G habe eine offene Umgebung, die eine M umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als $2n$ ist.*

c) *Die abgeschlossene Teilmenge N von H habe eine offene Umgebung, die eine N umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als $2n$ ist.*

d) *Durch eine Abbildung τ wird $A=G-M$ pseudokonform auf $B=H-N$ abgebildet. Die Umkehrung sei $v=\tau^{-1}$.*

Eine solche Modifikation werde mit $\mathfrak{M}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ bezeichnet; sie braucht keine Modifikation im Sinne von BEHNKE und STEIN zu sein. Ebensowenig braucht eine Modifikation im Sinne von BEHNKE und STEIN die Forderungen a) bis d) zu erfüllen.

Mit $\mathfrak{M}$ ist auch $\mathfrak{M}^{-1}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}H, B, N, v\\ G, A, M, \tau\end{pmatrix}$ eine Modifikation und heiße die *inverse Modifikation* zu $\mathfrak{M}$. Die Modifikation $\mathfrak{M}$ heiße offen, wenn die dritte Forderung der Definition von BEHNKE und STEIN erfüllt ist; ist auch $\mathfrak{M}^{-1}$ offen, so heiße $\mathfrak{M}$ beiderseits offen. Ist v in allen Punkten von N regulär, so heiße $\mathfrak{M}$ analytisch. Zwei Modifikationen $\mathfrak{M}_\nu=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G_\nu, A_\nu, M_\nu, \tau_\nu\\ H_\nu, B_\nu, N_\nu, v_\nu\end{pmatrix}$ heißen äquivalent, wenn es eine pseudokonforme Abbildung α von G_1 auf G_2 und eine pseudokonforme Abbildung β von H_1 auf H_2 gibt, so daß gilt:

$$\alpha(G_1)=G_2,\quad \alpha(A_1)=A_2,\quad \alpha(M_1)=M_2, \tag{0.1}$$

$$\beta(H_1)=H_2,\quad \beta(B_1)=B_2,\quad \beta(N_1)=N_2, \tag{0.2}$$

$$\beta^{-1}\tau_2\alpha(P)=\tau_1(P)\quad \text{für}\quad P\in A_1, \tag{0.3}$$

$$\alpha^{-1}v_2\beta(Q)=v_1(Q)\quad \text{für}\quad Q\in B_1. \tag{0.4}$$

H. HOPF[3]) hat darauf hingewiesen, daß man bereits einen einzigen Punkt mittels einer Modifikation durch eine Kurve ersetzen kann. Seien nämlich P^2 die Zahlenkugel und

$${}^0G=\{(z_1, z_2)\,|\,|z_1|<1,\quad |z_2|<1\}, \tag{0.5}$$

$${}^0M=\{(0,0)\},\quad {}^0A={}^0G-{}^0M, \tag{0.6}$$

[2]) Man vgl. BEHNKE und STEIN [1] S. 14. Dort wird M kompakt vorausgesetzt, was unnötig ist; man vgl. Satz 2.5.

[3]) Man vgl. H. HOPF [9], [9a], ferner ZARISKI [20], BEHNKE und STEIN [1], HIRZEBRUCH [6], [7], [8] und CALABI und ROSENLICHT [2]. Die Definition des σ-Prozesses in dieser Arbeit wird in § 10 gegeben.

$$(0.7)\quad {}^0H = \{(\mathfrak{z},\zeta) \mid z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1 = 0,\quad \mathfrak{z} = (z_1, z_2) \in {}^0G,\quad \zeta = (\zeta_1 : \zeta_2) \in P^2\},$$

$$(0.8)\quad {}^0N = {}^0M \times P^2,\quad {}^0B = {}^0H - {}^0N,$$

$$(0.9)\quad {}^0\sigma(z_1, z_2) = (z_1, z_2,\ z_1 : z_2) \quad \text{für} \quad (z_1, z_2) \in {}^0A,$$

$$(0.10)\quad {}^0v(\mathfrak{z},\zeta) = \mathfrak{z} \quad \text{für} \quad (\mathfrak{z},\zeta) \in {}^0H.$$

Dabei kann man ${}^0H$ als Raum der auf den Nullpunkt gerichteten Linienelemente von ${}^0G$ auffassen. Es ist

$$(0.11)\quad {}^0\mathfrak{S} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} {}^0G, {}^0A, {}^0M, {}^0\sigma \\ {}^0H, {}^0B, {}^0N, {}^0v \end{pmatrix}$$

eine analytische, beiderseits offene Modifikation, die den Nullpunkt durch die „Trägersphäre" ${}^0N$ ersetzt. Dies ist ein rein lokaler Prozeß. Man kann ihn daher auf Mannigfaltigkeiten ausüben. Ist P ein Punkt einer vierdimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G, so gibt es eine, und bis auf Äquivalenz nur eine Modifikation

$$(0.12)\quad \mathfrak{S}_P = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, \{P\}, \sigma_P \\ H, B, N, v_P \end{pmatrix},$$

für die gilt: Es gibt eine offene Umgebung ${}_0G$ von P und eine offene Umgebung ${}_0H$ von N, so daß die Modifikation

$$(0.13)\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} {}_0G, {}_0G \cap A, \{P\}, \sigma_P \\ {}_0H, {}_0H \cap B, N, v_P \end{pmatrix}$$

der Modifikation ${}^0\mathfrak{S}$ äquivalent ist. $\mathfrak{S}_P$ heiße ein σ-Prozeß im Punkt P; er ist eine analytische, beiderseits offene Modifikation.

Einen σ-Prozeß kann man nach H. HOPF auch in einer beliebigen abgeschlossenen Menge M einer komplexen Mannigfaltigkeit G der Dimension 4 definieren. Dazu führt man in jedem Punkt $P \in M$ einen σ-Prozeß

$$(0.14)\quad \mathfrak{S}_P = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, & A_P, \{P\}, \sigma_P \\ H_P, B_P, & N_P, v_P \end{pmatrix}$$

aus und identifiziert die offenen Teilmengen $H_P^* = H_P - \overline{\sigma_P(M \cap A_P)}$ in den Punkten $B_P^* = H_P^* \cap B_P$ vermöge den Abbildungen $v_Q \sigma_P$ von B_P^* auf B_Q^*. Man erhält dadurch eine analytische Modifikation

$$(0.15)\quad \mathfrak{S}_M = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix},$$

die der σ-Prozeß in der Menge M heiße.

Übt man längs einer analytischen Ebene im Koordinatenraum R^4 einen σ-Prozeß aus, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit ohne abzählbarer Basis der offenen Mengen[4]). Daher wird in dieser Arbeit bei der Definition der komplexen Mannigfaltigkeit nicht die Existenz einer abzählbaren Basis der offenen Mengen verlangt.

[4]) Dieses Beispiel wurde von H. HOPF in Vorträgen in Zürich und Oberwolfach gegeben und davon unabhängig von CALABI und ROSENLICHT [2] veröffentlicht. Nach RADÓ hat eine zusammenhängende, zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit immer eine abzählbare Basis der offenen Mengen.

Der σ-Prozeß in einem Punkt P_0 ersetzt diesen durch eine Trägersphäre $N = N_0$, setzt man in einem Punkt von N_0 wieder eine Trägersphäre N_1 ein, so wird P_0 insgesamt durch zwei Trägersphären ersetzt; so kann man fortfahren. Nach H. HOPF erhält man auf diese Art im wesentlichen alle Ersetzungen eines Punktes:

Satz von H. HOPF[5]).

Besteht M aus einem einzigen Punkt P_0, ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *offen (sie ist in diesem Fall analytisch) und ist N kompakt, so gibt es eine endliche Folge von σ-Prozessen*

$$\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_\nu, & A_\nu, & \{P_\nu\}, & \sigma_{P_\nu} \\ H_{\nu+1}, & B_{\nu+1}, & N_{\nu+1}, & v_{P_\nu} \end{pmatrix} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1) \tag{0.16}$$

in Punkten P_ν mit $P_\nu \in N_\nu$ für $\nu > 0$, so daß gilt

$$\begin{cases} H_0 = G, \quad A_0 = A, \quad H_s = H \\ B = \sigma_{P_{s-1}} \ldots \sigma_{P_0}(A) \\ N = N_s \cup \bigcup\limits_{\mu=1}^{s-1} \sigma_{P_{s-1}} \ldots \sigma_{P_\mu}(A_\mu \cap N_\mu) \\ \tau(P) = \sigma_{P_{s-1}} \ldots \sigma_{P_0}(P) \quad \text{für} \quad P \in A \\ v(Q) = v_{P_0} \ldots v_{P_{s-1}}(Q) \quad \text{für} \quad Q \in B. \end{cases} \tag{0.17}$$

Man sagt die Modifikation $\mathfrak{M}$ werde durch σ-Prozesse erzeugt.

Dieser Satz wird auf beliebige analytische Modifikationen ausgedehnt werden, bei denen also N nicht mehr kompakt zu sein braucht und M aus mehr als einem Punkt bestehen kann, allerdings wird $n = 2$ vorausgesetzt. Dann kommt man aber nicht immer mit endlich vielen σ-Prozessen aus[6]).

Von H. HOPF wurde nun die Frage gestellt, welche Modifikationen $\mathfrak{M}$ zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten G und H sich erzeugen lassen, indem man beiderseits (in G und H) in geeigneter Weise nach und nach endlich viele σ-Prozesse ausübt und dabei schließlich zur selben Mannigfaltigkeit kommt; anders ausgedrückt, indem man auf G die Operationen *„Einsetzen einer Trägersphäre"* und *„Herausnehmen einer Trägersphäre"* endlich oft ausführt und so zu H mittels einer zu $\mathfrak{M}$ äquivalenten Modifikation gelangt.

Ein Beispiel zeigt, daß dies nicht immer möglich ist: G sei der projektive Raum mit homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$, H sei der projektive Raum mit homogenen Koordinaten $(y_0 : y_1 : y_2)$,

$$M = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_2 = 0\}, \quad A = G - M,$$
$$N = \{(y_0 : y_1 : y_2) \mid y_2 = 0\}, \quad B = H - N,$$

$$\tau(x_0 : x_1 : x_2) = \left(x_0 : \left[x_1 - x_0 e^{\frac{x_0}{x_2}}\right] : x_2\right), \quad v(y_0 : y_1 : y_2) = \left(y_0 : \left[y_1 + y_0 e^{\frac{y_0}{y_2}}\right] : y_2\right).$$

[5]) Man vgl. H. HOPF [9] S. 180—182, [9a] und ZARISKI [20]. Bei H. HOPF besteht M nur aus einem einzigen Punkt. Der Satz wird in [9a] auch auf allgemeinere Abbildungen übertragen.

[6]) Man vgl. § 11 und § 14.

Es ist $\mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine beiderseits offene Modifikation zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten, die sich nicht durch σ-Prozesse erzeugen läßt; denn bei einem σ-Prozeß geht jede analytische Menge in eine analytische Menge über. Im vorliegenden Fall geht aber $L = \{(x_0 : x_1 : x_2) | \, x_1 = 0\}$ in

$$L^* = \tau(L \cap A) = \left\{(y_0 : y_1 : y_2) | \, y_1 + y_0 e^{\frac{y_0}{y_1}} = 0\right\} \tag{0.18}$$

über und L^* ist in N singulär.

Das Gegenbeispiel rührt vom Auftreten wesentlicher Singularitäten her. Um diese zu vermeiden, wird der Begriff einer „meromorphen" Abbildung eingeführt. Dies geschieht hier in Anlehnung an den Satz von CASORATI-WEIERSTRASS:

Eine Abbildung τ heiße auf einer komplexen Mannigfaltigkeit G der Dimension $2n$ *meromorph*, wenn gilt:

a) *Eine offene Teilmenge A von G werde durch τ analytisch in eine $2m$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H abgebildet.*

b) *In einer offenen Umgebung U von $M = G - A$ liege eine M umfassende analytische Menge, deren Dimension höchstens $2n-2$ ist.*

c) *Ist L eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit aus G, die M in einem und nur einem Punkt P_0 schneidet, sind $P_1^\nu \in A \cap L$ und $P_2^\nu \in A \cap L$ Folgen mit*

$$\lim_{\nu\to\infty} P_1^\nu = P_0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_1^\nu) = Q_1 \in H, \tag{0.19}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} P_2^\nu = P_0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_2^\nu) = Q_2 \in H, \tag{0.20}$$

so ist $Q_1 = Q_2$.

Wird G durch die meromorphe Abbildung τ in den projektiven Raum P^{2m} abgebildet, so wird diese Abbildung durch meromorphe Funktionen gegeben und nur dann[7]). Also ist der Begriff der meromorphen Abbildung sinnvoll. Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ heiße meromorph, wenn τ eine meromorphe Abbildung von G in H ist, beiderseits meromorph, wenn auch $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph ist. Eine analytische Modifikation ist beiderseits meromorph. Im Falle $n = 2$ ist eine meromorphe Modifikation beiderseits meromorph.

Beiderseits offene und meromorphe Modifikationen lassen sich im Falle $n = 2$ durch σ-Prozesse erzeugen. Der Beweis beruht im wesentlichen auf dem

Hauptsatz über meromorphe Modifikationen[8]).

Ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ beiderseits offen, meromorph und ist die Abbildung τ im Punkt P_0 singulär, so gibt es eine rein zweidimensionale analytische Menge $C(P_0)$ aus H, die in N liegt, und eine Menge $D \subset C(P_0)$ ohne Häufungspunkte enthält, so daß v auf $C(P_0) - D$ regulär ist. Wenn $v(Q, H)$

[7]) Man vgl. Satz 4.1.

[8]) Man vgl. Satz 9.3 und Satz 9.4.

die analytische Fortsetzung von v in $B \cup [C(P_0) - D]$ ist, so ist $v(Q, H) = P_0$ für $Q \in C(P_0) - D$. Die Zuordnung $P_0 \to C(P_0)$ ist also eineindeutig.

Ist H kompakt, so hat die Abbildung τ demnach höchstens endlich viele singuläre Stellen.

Der Satz über die Erzeugbarkeit meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse lautet für Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten[9]:

Ist $\mathfrak{M} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine meromorphe Modifikation zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten (sie ist dann beiderseits offen und beiderseits meromorph), so gibt es zwei Ketten von σ-Prozessen

$$\mathfrak{S}_\nu = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} H_\nu, & A_\nu, & M_\nu, & \sigma_\nu \\ H_{\nu+1}, & B_{\nu+1}, & N_{\nu+1}, & v_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1), \tag{0.21}$$

$$\underline{\mathfrak{S}}_\nu = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} \underline{H}_\nu, & \underline{A}_\nu, & \underline{M}_\nu, & \underline{\sigma}_\nu \\ \underline{H}_{\nu+1}, & \underline{B}_{\nu+1}, & \underline{N}_{\nu+1}, & \underline{v}_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, \underline{s}-1) \tag{0.22}$$

mit

$$H_0 = G, \quad A_0 \supseteq A, \quad M_0 \subseteq M, \quad M_{\nu+1} \subseteq N_{\nu+1}, \tag{0.23}$$

$$\underline{H}_0 = H, \quad \underline{A}_0 \supseteq B, \quad \underline{M}_0 \subseteq N, \quad \underline{M}_{\nu+1} \subseteq \underline{N}_{\nu+1}, \tag{0.24}$$

$$H_s = \underline{H}_{\underline{s}}, \tag{0.25}$$

$$\tau(P) = \underline{v}_0 \ldots \underline{v}_{\underline{s}-1}\, \sigma_{s-1} \ldots \sigma_0(P) \quad \text{für} \quad P \in A, \tag{0.26}$$

$$v(Q) = v_0 \ldots v_{s-1}\, \underline{\sigma}_{\underline{s}-1} \ldots \underline{\sigma}_0(Q) \quad \text{für} \quad Q \in B. \tag{0.27}$$

Die Abbildung $\tau\, v_0 \ldots v_{\nu-1}$ ist in M_ν singulär, in A_ν regulär. Die Abbildung $v\, \underline{v}_0 \ldots \underline{v}_{\nu-1}$ ist in $\underline{M}_\nu$ singulär, in $\underline{A}_\nu$ regulär. Die Mengen M_ν und $\underline{M}_\nu$ sind endlich.

Die Mengen M_ν und $\underline{M}_\nu$, in denen die σ-Prozesse ausgeführt werden, sind durch innere Eigenschaften der gegebenen Modifikation eindeutig bestimmt. Dies ist erforderlich, um überflüssige σ-Prozesse zu vermeiden.

Eine birationale Transformation zwischen zwei algebraischen Mannigfaltigkeiten ist ein Beispiel einer beiderseits meromorphen Modifikation. Umgekehrt ist jede beiderseits meromorphe Modifikation zwischen algebraischen Mannigfaltigkeiten eine birationale Transformation. Die beiderseits meromorphen Modifikationen stellen somit eine Verallgemeinerung der birationalen Transformationen dar[10].

Auf algebraischen Flächen treten „nichtsphärische" Punkte auf. Daher liegt es nahe, auch Modifikationen Riemannscher Bereiche[11] zu untersuchen. Nun hat aber Hirzebruch [7] den Übergang von Riemannschen Bereichen zu komplexen Mannigfaltigkeiten im Falle $n = 2$ schon durchgeführt. Daher kann man sich im Falle $n = 2$ o.B.d.A. auf Modifikationen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten beschränken.

[9]) Man vgl. Satz 12.1. Der allgemeine Fall wird in den Sätzen 15.1 und 16.3 erledigt.

[10]) Dies ergibt sich aus den Sätzen 4.1 und 4.4.

[11]) Man vgl. Hirzebruch [7].

In der vorliegenden Arbeit (Teil I) werden lediglich die Grundbegriffe geklärt. Es werden nur einfache Eigenschaften der Modifikationen bewiesen, insbesondere offener. In der nächsten Arbeit werden meromorphe und analytische Modifikationen eingeführt und einfachere Ergebnisse über sie gewonnen. In den dann folgenden Teilen müssen die Untersuchungen jedoch der auftretenden Schwierigkeiten wegen auf den Fall $n=2$ beschränkt werden. Die Identitätssätze in § 6 (Teil II) bilden vielleicht einen bescheidenen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen im Falle $n>2$. In Teil III werden Sätze über die Streueigenschaften analytischer und meromorpher Modifikationen im Falle $n=2$ aufgestellt, die in den darauffolgenden Teilen den Beweis der Sätze über die Erzeugung analytischer bzw. meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse ermöglichen werden.

Diese Reihe von Arbeiten geht auf Anregungen zurück, die ich während eines Zürcher Studienaufenthaltes im Wintersemester 1952/53 von Herrn Professor H. HOPF in Vorträgen und persönlichen Unterhaltungen erhalten habe. Hierfür möchte ich Herrn Professor H. HOPF und der *Deutschen Forschungsgemeinschaft*, die mir den Studienaufenthalt ermöglicht hat, aufs herzlichste danken.

§ 1. Modifikationen.

Ein Hausdorffscher Raum G heiße eine *komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension* $2n$ mit der *Struktur* $\mathfrak{P}$, wenn gilt:

1. *Jeder Abbildung* $\alpha\in\mathfrak{P}$ *ist eine offene Menge* U'_α *im Raum* $\mathfrak{R}^{2n}$ *der komplexen Vektoren* $\mathfrak{z}=(z_1,\ldots,z_n)$ *zugeordnet, die durch* $\alpha=\alpha(\mathfrak{z})$ *topologisch auf eine offene Menge* $U_\alpha\subseteq G$ *abgebildet wird.*

2. *Sind zwei Abbildungen* $\alpha\in\mathfrak{P}$ *und* $\beta\in\mathfrak{P}$ *mit* $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ *gegeben, so ist die vermittelnde Abbildung* $\beta^{-1}\alpha(\mathfrak{z})$ *in* $\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ *analytisch.*

3. *Es ist* $G=\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{P}} U_\alpha$.

4. *Ist* $\mathfrak{P}^*$ *ein Atlas von* G, *d.h. eine Menge von Abbildungen* α, *die die Forderungen* 1 *bis* 3 *erfüllen, und ist* $\mathfrak{P}^*\geq\mathfrak{P}$, *so ist* $\mathfrak{P}^*=\mathfrak{P}$; *d.h.,* $\mathfrak{P}$ *ist ein maximaler Atlas.*

Die offene Menge U_α heiße eine *Karte*; die Abbildung α heiße *uniformisierend* oder ein *örtliches Koordinatensystem*. Ist G ein Hausdorffscher Raum und erfüllt die Menge $\mathfrak{P}_0$ von Abbildungen α die Forderungen 1 bis 3, so gibt es eine und nur eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{P}_0$ als Atlas.

Entgegen dem sonst Üblichen wird hier keine abzählbare Basis der offenen Mengen, oder was dasselbe ist, nicht die Existenz eines abzählbaren Atlases verlangt. Im Falle $n=1$ gibt es immer einen solchen, im Falle $n>1$ aber nicht immer[12]).

Die Teilmenge A der komplexen Mannigfaltigkeit G mit der Struktur $\mathfrak{P}(G)$ werde durch $\tau=\tau(P)$ in die komplexe Mannigfaltigkeit H mit der Struktur $\mathfrak{P}(H)$ abgebildet. In einem Punkt $P\in A$ heiße die Abbildung τ

[12]) Für $n=1$ vgl. man RADÓ [13], für $n>1$ vgl. man das Gegenbeispiel von E. CALABI und M. ROSENLICHT [2]. Davon unabhängig hat auch H. HOPF dieses Beispiel gegeben. Es findet sich in dieser Arbeit im Anschluß an Satz 10.10.

analytisch, wenn es Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ und $\beta \in \mathfrak{P}(H)$ mit $P \in U_\alpha$ und $\tau(P) \in U_\beta$ gibt, für die $\beta^{-1}\tau\alpha(\mathfrak{z})$ im Punkt $\alpha^{-1}(P)$ analytisch ist. Dies gilt dann für alle Paare α, β mit $P \in U_\alpha$ und $\tau(P) \in U_\beta$. Ebenso hängt der Rang der Funktionalmatrix von $\beta^{-1}\tau\alpha(\mathfrak{z})$ in $\alpha^{-1}(P)$ nicht von α und β ab; er heiße der *Rang* von τ in P und werde mit $Rg_P\tau$ bezeichnet. Eine analytische Abbildung τ heiße aus der offenen Menge A in die Teilmenge $M \subseteq G$ (analytisch) fortsetzbar, wenn es eine offene Menge $U \supseteq A \cup M$ mit $U \subseteq G$ und eine analytische Abbildung τ_0 von U in H gibt, für die $\tau_0(P) = \tau(P)$ auf A gilt. Es heiße $\tau_0(P)$ eine Fortsetzung von $\tau(P)$ aus A in M; ist $A \cup M$ ein Gebiet, so ist $\tau_0(P)$ eindeutig bestimmt. Ein Punkt $P_0 \in \bar{A}$ heiße *regulär*, wenn sich τ aus A in P_0 fortsetzen läßt, andernfalls *singulär*[13]).

Eine eineindeutige analytische Abbildung τ der offenen Teilmenge A der $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G in die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H heiße *pseudokonform*. Wie oben definiert man die pseudokonforme Fortsetzung[13]).

Analog kann man auch die Begriffe „analytische Funktion" und „meromorphe Funktion" einführen.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit H der Dimension $2m$, die in der komplexen Mannigfaltigkeit G der Dimension $2n \geq 2m$ liegt, heiße eine Teilmannigfaltigkeit von G, wenn die identische Abbildung $\iota(P) = P$ von H in G analytisch ist. Gilt dabei $Rg_P\iota = m$, so heiße P ein *gewöhnlicher* Punkt von H. Enthält H nur gewöhnliche Punkte, so heiße H gewöhnliche Mannigfaltigkeit. Jede offene Teilmenge von G ist eine gewöhnliche Teilmannigfaltigkeit von G.

Eine Teilmenge N einer offenen Menge B der komplexen Mannigfaltigkeit G mit der Dimension $2n$ heiße *analytisch*[14]) in B, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ und eine Menge $\mathfrak{F}$ in U analytischer Funktionen gibt, für die

$$N \cap U = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{P \mid f(P) = 0\} \tag{1.1}$$

gilt. Ist eine analytische Menge $N \neq \varnothing$ die Vereinigung $N_1 \cup N_2 = N$ zweier (in B) analytischer Mengen $N_1 \supsetneqq N_2$ und $N_2 \supsetneqq N_1$, so ist N reduzibel, andernfalls irreduzibel. Eine analytische Menge $N \neq \varnothing$ ist die Vereinigung irreduzibler analytischer Mengen $N_\lambda \neq \varnothing$ mit $N_\mu \supsetneqq N_\lambda$ für $\mu \neq \lambda$, von denen in jeden kompakten Teil von B nur endlich viele Teile N_λ eindringen. Diese „irreduziblen Teile" von N sind bis auf die Numerierung eindeutig bestimmt. Der Durchschnitt in B analytischer Mengen N^λ ist in B analytisch; wenn in jeden kompakten Teil von B höchstens endlich viele N^λ eindringen, ist auch die Vereinigung $\bigcup_\lambda N^\lambda$ in B analytisch.

Ein Punkt $P_0 \in N$ heiße ein *gewöhnlicher* Punkt von N, wenn P_0 entweder ein isolierter Punkt von N ist oder wenn es eine offene Umgebung U von P_0

[13]) In dieser Arbeit wird nur die hier geschilderte unmittelbare Fortsetzung gebraucht. Ebenso wird der Begriff des regulären und singulären Punktes nur für Punkte der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A, nicht auch für äußere Punkte von A benötigt.

[14]) Zum Begriff der analytischen Mengen vgl. man CARTAN [3], HERMES [5], H. KNESER [10], REMMERT und STEIN [14].

gibt, so daß $U \cap N$ eine gewöhnliche Teilmannigfaltigkeit von U ist. Mit $\hat{N}$ werde die Menge der gewöhnlichen Punkte von N bezeichnet. Ist N leer oder irreduzibel, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

a) *Es ist N leer; dann sei* $\dim N = -\infty$.

b) *Es besteht N aus einem und nur einem Punkt; dann sei* $\dim N = 0$.

c) *Es ist $\hat{N}$ eine zusammenhängende, gewöhnliche, komplexe Teilmannigfaltigkeit von B, deren Dimension $2k$ sei; dann sei* $\dim N = 2k$.

Zerfällt $N \neq \varnothing$ in die irreduziblen Teile N_λ, so sei $\dim N = \operatorname{Max}_\lambda \dim N_\lambda$ die Dimension von N und $\dim_P N = \operatorname{Max}_{P \in N_\lambda} \dim N_\lambda$ die Dimension im Punkte $P \in N$. Ist $P \in A - N$, so werde $\dim_P N = -\infty$ gesetzt. Ist $\dim_P N = \dim N$ für alle Punkte $P \in N$, oder, was dasselbe ist, besteht N nur aus irreduzibeln Teilen der gleichen Dimension, so heiße N *rein-dimensional*. Ist N_λ ein irreduzibler Teil von N, so bestehen $N_\lambda \cap \hat{N}$ und $\hat{N}_\lambda$ je entweder aus einem einzigen Punkt oder sind zusammenhängende, gewöhnliche Teilmannigfaltigkeiten von B, für die

$$\overline{N_\lambda \cap \hat{N}} \cap B = \bar{\hat{N}}_\lambda \cap B = N_\lambda, \quad N_\lambda \cap \hat{N} \subsetneqq \hat{N}_\lambda \subsetneqq N_\lambda, \tag{1.2}$$

$$\dim N_\lambda \cap \hat{N} = \dim \hat{N}_\lambda = \dim N_\lambda \tag{1.3}$$

gilt. Die Reste $N_\lambda - \hat{N}$ und $N - \hat{N}$ sind analytische Mengen mit

$$\dim_P (N_\lambda - \hat{N}) < \dim_P N_\lambda \quad \text{für} \quad P \in N_\lambda, \tag{1.4}$$

$$\dim_P (N - \hat{N}) < \dim_P N \quad \text{für} \quad P \in N. \tag{1.5}$$

Für $\lambda \neq \mu$ ist $N_\lambda \cap N_\mu$ eine analytische Menge in B mit

$$\dim N_\lambda \cap N_\mu < \operatorname{Min}(\dim N_\lambda, \dim N_\mu), \tag{1.6}$$

$$N_\lambda \cap N_\mu \cap \hat{N} = \varnothing. \tag{1.7}$$

Ist H eine komplexe Teilmannigfaltigkeit von G und C eine offene Teilmenge von G, so ist $H \cap N \cap C$ in $H \cap C$ (bezüglich der Teilmannigfaltigkeit H) analytisch, falls N in G analytisch ist.

Eine analytische Menge N in B heiße in die Teilmenge $M \subsetneqq G$ fortsetzbar, wenn es eine offene Menge A mit $B \cup M \subsetneqq A \subsetneqq G$ und eine in A analytische Menge N_0 mit $A \cap N_0 = N$ gibt. Da der Durchschnitt analytischer Mengen analytisch ist, gibt es bei festem A eine kleinste solche analytische Menge N_0, die eindeutig bestimmt ist und die Fortsetzung von N aus B in A heiße. Ein Punkt $P_0 \in \bar{B}$ heiße *regulär* (bezüglich N), wenn sich N in P_0 fortsetzen läßt, andernfalls *singulär*. Ist $A \supset B$ offen, enthält $A - B$ keinen inneren Punkt und ist jeder Punkt von $A - B$ regulär, so läßt sich N aus B in A fortsetzen.

Eine analytische Menge der reinen Dimension $2n-2$ heiße auch eine *analytische Fläche*. Sie wird lokal als Nullstellenmenge einer Funktion gegeben, d.h. in (1.1) kann man bei geeigneter Wahl von U und $\mathfrak{F}$ mit einer Funktionsmenge $\mathfrak{F}$ auskommen, die nur aus einem Element besteht.

Der Begriff der „*Modifikation*" wird etwas anders als bei BEHNKE und STEIN gefaßt[15]):

Definition 1.1. Modifikation.

Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *liege vor, wenn gilt:*

a) *Komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ sind gegeben.*

b) *Die abgeschlossene Teilmenge M von G habe eine offene Umgebung, die eine M umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als $2n$ ist*[16]).

c) *Die abgeschlossene Teilmenge N von H habe eine offene Umgebung, die eine N umfassende analytische Menge enthält, deren Dimension kleiner als $2n$ ist.*

d) *Durch eine Abbildung $\tau = \tau(P)$ wird $A = G - M$ pseudokonform auf $B = H - N$ abgebildet. Die Umkehrabbildung werde durch $v(Q) = \tau^{-1}(Q)$ für $Q \in B$ gegeben.*

Zwei Modifikationen $\mathfrak{M}_1 = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_1, A_1, M_1, \tau_1 \\ H_1, B_1, N_1, v_1 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{M}_2 = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_2, A_2, M_2, \tau_2 \\ H_2, B_2, N_2, v_2 \end{pmatrix}$ heißen *äquivalent*, in Zeichen $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, wenn es pseudokonforme Abbildungen α von G_1 auf G_2 und β von H_1 auf H_2 mit $\alpha(A_1) = A_2$ und $\beta^{-1}\tau_2\alpha(P) = \tau_1(P)$ für $P \in A_1$ gibt. Es gilt dann

$$\alpha(G_1) = G_2, \quad \alpha(A_1) = A_2, \quad \alpha(M_1) = M_2, \tag{1.8}$$

$$\beta(H_1) = H_2, \quad \beta(B_1) = B_2, \quad \beta(N_1) = N_2, \tag{1.9}$$

$$\beta^{-1}\tau_2\alpha(P) = \tau_1(P) \quad \text{für} \quad P \in A_1, \tag{1.10}$$

$$\alpha^{-1}v_2\beta(Q) = v_1(Q) \quad \text{für} \quad Q \in B_1. \tag{1.11}$$

Es ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$; mit $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ gilt auch $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$; aus $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ und $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_3$ folgt $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_3$.

Bei einer Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ liegt die Vorstellung zugrunde, daß G zu H abgeändert wird, indem man M durch N ersetzt. Jedoch ist dieser Begriff symmetrisch, so ist mit $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ auch $\mathfrak{M}^{-1} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} H, B, N, v \\ G, A, M, \tau \end{pmatrix}$ eine Modifikation und heiße die zu $\mathfrak{M}$ *inverse Modifikation*.

[15]) Bei BEHNKE und STEIN [1] (S. 8) werden die Forderungen b) und c) nicht erhoben, dagegen wird noch verlangt: e) *Ist $U \supseteq M$ offen, so hat jeder Punkt $Q \in N$ eine offene Umgebung V mit $v(V \cap B) \subseteq U$.*

Um noch zu brauchbaren Aussagen zu kommen, scheint es zweckmäßig mittels den Forderungen b) und c) die Mengen M und N „klein" zu halten. Dagegen ist die Forderung e) in wichtigen Fällen, so wenn G und H kompakt sind, von selbst erfüllt. Daher und aus Symmetriegründen wurde sie hier weggelassen. Sind a) bis e) erfüllt, so liegt nach Definition 2.1 und Satz 2.1 eine offene Modifikation vor.

[16]) Die kleinste M umfassende analytische Menge aus G kann dann immer noch die Dimension $2n$ haben.

Ist ι die identische Abbildung von G auf sich und ist $G = A$ sowie M leer, so heiße

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, G, \varnothing, \iota \\ G, G, \varnothing, \iota \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \iota \\ G, A, M, \iota \end{pmatrix}$$

eine *identische* Modifikation.

Definition 1.2. Streumengen und das Streuen.

Die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G enthalte die offene Menge A, die durch die Abbildung τ analytisch in die $2m$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H abgebildet werde. Es gebe eine offene Umgebung U von $M = G - A$ und eine in U analytische Menge, die M umfaßt, und deren Dimension höchstens $2n-2$ ist.

Ist $L \subseteqq G$ und $R \subseteqq M$, so gehöre der Punkt $Q \in H$ dann und nur dann zur „Streumenge $\Sigma_\tau(R, L) = \Sigma(R, L)$ von τ längs L in R", wenn es eine Punktfolge $P_\nu \in L \cap A$ gibt, für die $Q = \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_\nu)$ und $P = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu \in R$ ist. Es seien

$$\Sigma(P, L) = \Sigma(\{P\}, L) \quad \text{für} \quad P \in M, \tag{1.12}$$

$$\Sigma(R) = \Sigma(R, G) \quad \text{für} \quad R \subseteqq M, \tag{1.13}$$

$$\Sigma(P) = \Sigma(\{P\}) \quad \text{für} \quad P \in M. \tag{1.14}$$

Enthält $\Sigma(P, L)$ wenigstens zwei verschiedene Punkte, so streue die Abbildung τ längs L im Punkt P; enthält $\Sigma(P, L)$ genau einen Punkt $Q \in H$, so verhalte sich die Abbildung τ längs L im Punkt P bestimmt, andernfalls unbestimmt. Enthält $\Sigma(P, L)$ keinen Punkt, so habe die Abbildung τ längs L im Punkt P eine Lücke. Ist $L = G$, so werde die Ausdrucksweise „längs G" auch weggelassen. Ist R_L die Menge der Punkte von M, in denen sich die Abbildung τ längs L bestimmt verhält, so werde

$$\tau(P, L) = \begin{cases} \tau(P) & \text{für} \quad P \in A, \\ Q & \text{für} \quad P \in R_L \quad \text{mit} \quad Q \in \Sigma(P, L) \end{cases} \tag{1.15}$$

gesetzt und heiße die natürliche Fortsetzung von τ längs L.

Für die Erzeugung einer Modifikation $\mathfrak{M}_2 \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ durch elementare Modifikationen (Hopfsche σ-Prozesse) wird die Untersuchung der „Streuverhältnisse" der Abbildungen τ und v von Bedeutung sein.

Satz 1.1. Streumengen.

Voraussetzung. *Eine Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei gegeben. Es seien $L \subseteqq G$ und $R \subseteqq M$.*

Behauptung. 1. *Es ist $\Sigma(R, L) = \bigcup_{P\in R} \Sigma(P, L) = \bigcup_{P\in R\cap\bar{L}} \Sigma(P, L)$.*

2. *Es ist $\Sigma(R, L) \subseteqq N$.*

3. *Ist eine Folge $P_\nu \in A \cap L$ mit $Q = \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_\nu) \in \Sigma(R, L)$ und $P = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu$ gegeben, so ist P in M enthalten.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition.

2. Angenommen in $\Sigma(R, L) - N$ wäre ein Punkt Q enthalten. Dann gäbe es eine Folge $P_\nu \in A \cap L$, für die $P = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu \in M$ und $Q = \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_\nu) \in B = H - N$ gelten würde. Es wäre $v(Q) = \lim_{\nu\to\infty} v\,\tau(P_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu = P$ ein Punkt von $A = G - M$, was falsch ist. Damit ist $\Sigma(R, L) \subsetneqq N$ bewiesen.

3. Wäre $P \notin M$, so wäre $Q = \lim_{\nu\to\infty} \tau(P_\nu) = \tau(P) \in B = H - N$, was falsch ist. Daher ist $P \in M$, w. z. b. w.

Satz 1.2. Urbild einer Streumenge.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *und Mengen* $R \subseteqq M$, $L \subseteqq G$ *seien gegeben.*

Behauptung. *Es ist*

$$\Sigma_\tau(R, L) = \{Q \mid R \cap \Sigma_v(Q, \tau(L \cap A)) \neq \varnothing\}. \tag{1.16}$$

Beweis. a) Ist für einen Punkt $Q \in N$ die Menge $R \cap \Sigma_v(Q, \tau(L \cap A))$ nicht leer, so gibt es einen Punkt $P \in R$ und eine Punktfolge $Q_\nu = \tau(P_\nu)$ mit $P_\nu \in L \cap A$, wobei $P_\nu \to P$ und $Q_\nu \to Q$ für $\nu \to \infty$ streben. Also ist $Q \in \Sigma_\tau(R, L)$.

b) Ist $Q \in \Sigma_\tau(R, L)$, so gibt es eine Folge $P_\nu \in L \cap A$ mit $\lim_{\nu\to\infty} P_\nu = P \in R$, wobei $Q_\nu = \tau(P_\nu) \to Q$ für $\nu \to \infty$ strebt. Wegen $Q_\nu \in \tau(L \cap A)$ und $P_\nu = v(Q_\nu)$ ist P in $R \cap \Sigma_v(Q, \tau(L \cap A))$ enthalten, diese Menge also nicht leer. Aus a) und b) folgt (1.16), w. z. b. w.

Nach (1.16) ist $\Sigma_\tau(R, L)$ gewissermaßen das Urbild von $\Sigma_v(Q, \tau(L \cap A))$.

Auf Teilmannigfaltigkeiten induziert eine Modifikation eine andere, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.3. Modifikationen auf Teilmannigfaltigkeiten.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei gegeben. In einer offenen Menge aus G gebe es eine analytische Menge* $L \supseteqq M$, *die kein Teilgebiet der* $2m$*-dimensionalen komplexen Teilmannigfaltigkeit* G_1 *von G enthält. In einer offenen Menge aus H gebe es eine analytische Menge* $L^* \supseteqq N$, *die kein Teilgebiet der* $2m$*-dimensionalen komplexen Teilmannigfaltigkeit* H_1 *von H enthält. Es sei*

$$\tau(G_1 \cap A) = H_1 \cap B. \tag{1.17}$$

Es werde $A_1 = G_1 \cap A$, $M_1 = G_1 \cap M$, $B_1 = H_1 \cap B$, $N_1 = H_1 \cap N$ *gesetzt. Mit* τ_1 *werde die auf* A_1 *beschränkte Abbildung* τ, *mit* v_1 *die auf* B_1 *beschränkte Abbildung* v *bezeichnet.*

Behauptung. *Durch* $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\binom{G_1, A_1, M_1, \tau_1}{H_1, B_1, N_1, v_1}$ *wird eine Modifikation gegeben.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Modifikation. Aus Satz 1.3 folgt:

Satz 1.4. Modifikationen auf größten Teilgebieten.

Voraussetzung. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei gegeben. Es sei* G_1 *ein größtes Teilgebiet von G.*

Behauptung. *Es gibt ein und nur ein größtes Teilgebiet* $H_1 \subseteq \tau(G_1 \cap A)$ *von* H. *Setzt man*[17])

$$A_1 = G_1 \cap A, \quad M_1 = G_1 \cap M, \quad \tau_1 = \tau | A_1, \tag{1.18}$$

$$B_1 = H_1 \cap B, \quad N_1 = H_1 \cap N, \quad v_1 = v | B_1, \tag{1.19}$$

so ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\binom{G_1, A_1, M_1, \tau_1}{H_1, B_1, N_1, v_1}$ *eine Modifikation. Es ist*

$$\Sigma_\tau(R, L) \subseteq N_1 \quad \text{für} \quad R \subseteq M_1, \ L \subseteq G_1. \tag{1.20}$$

Beweis. Mit A_1 ist auch $\tau(A_1)$ zusammenhängend, also Teil eines und nur eines größten Teilgebietes H_1 von H. Es ist $B_1 \subseteq \tau(A_1)$, also $v(B_1) \subseteq A_1$ und, weil $v(B_1)$ ein Gebiet ist, liegt $v(B_1)$ in $G_1 \cap A = A_1$, woraus $v(B_1) = A_1$ und $\tau(A_1) = B_1$ folgen. Die Teilmannigfaltigkeiten G_1 und H_1 erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.3, also ist $\mathfrak{M}_1$ eine Modifikation. Ist $R \subseteq M_1$ und $L \subseteq G_1$, so gibt es zu jedem Punkt $Q \in \Sigma(R, L)$ eine Folge $P_\nu \in L \cap A$, wobei $\tau(P_\nu) \to Q$ und $P_\nu \to P \in R$ für $\nu \to \infty$ streben. Für $\nu \geq \nu_0$ ist $P_\nu \in L \cap A \cap G_1 = L \cap A_1$, also $\tau(P_\nu) \in H_1$. Es ist $Q \in H_1$, d. h. $\Sigma(R, L) \subseteq N_1$, w. z. b. w.

Eine Modifikation zwischen G und H setzt sich also aus Modifikationen zwischen den einzelnen größten Teilgebieten von G und H zusammen.

§ 2. Offene Modifikationen.

Unter den Modifikationen kommt eine besondere Bedeutung den *„offenen"* zu:

Definition 2.1. Offene Modifikationen.

Die Modifikation $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *heiße offen, wenn für jede offene Menge* $U > M$ *auch* $\tau(U \cap A) \cup N$ *offen ist. Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *heiße beiderseits offen, wenn* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}^{-1}$ *offen sind.*

Die Offenheit ist eine gewisse Stetigkeitsbedingung; besteht nämlich M aus einem einzigen Punkt, so ist die Modifikation $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ dann und nur dann offen, wenn sich v stetig auf N fortsetzen läßt. Einige andere Definitionen der offenen Modifikationen folgen:

Satz 2.1. Offene Modifikationen[15]).

Dann und nur dann ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *offen, wenn es zu jedem Punkt* $Q_0 \in N$ *und jeder Umgebung* U *von* M *eine Umgebung* V *von* Q_0 *mit* $v(V \cap B) \subseteq U$ *gibt.*

Beweis. a) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei offen, der Punkt $Q_0 \in N$ und die Umgebung U von M seien beliebig gewählt. Dann enthält U eine offene Umgebung U_0 von M; die Menge $\tau(U_0 \cap A) \cup N = V$ ist offen, enthält Q_0 und $v(V \cap B) = U_0 \cap A$ ist in U enthalten, w. z. b. w.

b) Gibt es umgekehrt zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ und jeder Umgebung U von M eine Umgebung V von Q_0 mit $v(V \cap B) \subseteq U$, so werde eine offene

[17]) Es bedeutet $\tau | A_1$ die auf A_1 beschränkte Abbildung τ.

Menge $U \supset M$ beliebig gewählt und zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ eine Umgebung V_{Q_0} mit $v(V_{Q_0} \cap B) \subseteq U$ bestimmt. Dann ist $V_{Q_0} = (V_{Q_0} - N) \cup N = \tau v(V_{Q_0} \cap B) \cup N \subseteq \tau(U \cap A) \cup N$, weswegen $\tau(U \cap A) \cup N$ offen ist, w. z. b. w.

Um eine dritte Definition der offenen Modifikationen geben zu können, wird noch ein einfacher Satz benötigt.

Satz 2.2. *In der komplexen Mannigfaltigkeit G sei eine offene Menge A und eine Folge $P_\nu \in A$ gegeben. Zu jeder Umgebung U von $M = G - A$ gebe es eine Nummer ν_U, so daß $P_\nu \in A \cap U$ für alle $\nu \geq \nu_U$ ist. Dann hat die Folge P_ν in M wenigstens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Angenommen die Behauptung ist falsch; dann gibt es zu jedem Punkt $P \in M$ eine Umgebung U_P, die keinen Punkt P_ν enthält. Die Vereinigung $U = \bigcup_{P \in M} U_P \supseteq M$ ist eine Umgebung von M und enthält keinen Punkt der Folge entgegen der Voraussetzung. Daher ist die Annahme falsch, w. z. b. w.

Satz 2.3. Offene Modifikationen.

Dann und nur dann ist die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ offen, wenn für jede konvergente Folge $Q_\nu \in B$ mit $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q \in N$ die Bildfolge $v(Q_\nu) = P_\nu$ in M wenigstens einen Häufungspunkt hat.

Beweis. a) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei offen. Eine offene Umgebung U von M sei beliebig gewählt. Es gibt eine Umgebung V von Q mit $v(V \cap B) \subseteq U$ und eine Nummer ν_U, so daß $Q_\nu \in V \cap B$ also $P_\nu \in U$ für alle $\nu \geq \nu_U$ ist. Nach Satz 2.2 hat die Folge P_ν einen Häufungspunkt in M, w. z. b. w.

b) Für jede konvergente Folge $Q_\nu \in B$ mit $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q \in N$ habe die Bildfolge $v(Q_\nu) = P_\nu$ in M wenigstens einen Häufungspunkt. Eine offene Umgebung U von M sei gewählt. Angenommen $V = \tau(U \cap A) \cup N$ ist nicht offen. Dann gibt es einen Randpunkt $Q \in V$; da $\tau(U \cap A)$ offen ist, gehört Q zu N. Eine Folge $Q_\nu \notin V$ strebt gegen Q; die Bildfolge $\tau(Q_\nu) = P_\nu$ hat einen Häufungspunkt in M. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge gilt $\lim_{\nu \to \infty} Q_\nu = Q$ und $\lim_{\nu \to \infty} P_\nu = P \in M$. Ab einer Nummer ν_U gehören die Punkte P_ν der Umgebung U von P an. Also ist $Q_\nu = \tau v(Q_\nu) = \tau(P_\nu) \in \tau(U \cap A) \subseteq V$ entgegen der Konstruktion der Folge Q_ν. Die Annahme war falsch, w. z. b. w.

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar:

Satz 2.4. *Ist bei der Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ die Ausgangsmannigfaltigkeit G folgenkompakt, so ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen.*

Wie diese beiden Sätze zeigen, ist die Offenheit eine gewisse Kompaktheitsforderung (bezüglich G). So ist eine Modifikation zwischen (folgen-) kompakten Mannigfaltigkeiten G und H beiderseits offen.

Behnke und Stein stellen ein weiteres Kriterium dafür auf, daß eine offene Modifikation vorliegt[18]):

[18]) Man vgl. Behnke und Stein [1] Satz 2, S. 14.

Satz 2.5. Kriterium von BEHNKE und STEIN.

Voraussetzung. a) *Komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension $2n$ seien gegeben.*

b) *Die abgeschlossene Teilmenge M von G liege in einer offenen Menge $W \subseteqq G$, in der es eine analytische Funktion f gibt, die in keinem Teilgebiet von W identisch verschwindet und deren Nullstellenmenge M umfaßt.*

d) *Durch $\tau = \tau(P)$ werde $A = G - M$ pseudokonform auf $B = H - N$ abgebildet. Die Umkehrung werde durch $v(Q) = \tau^{-1}(Q)$ für $Q \in B$ gegeben. In N sei kein größtes Teilgebiet von H enthalten.*

e) *Ist U eine Umgebung von M in G, so gebe es zu jedem Punkt $Q \in N$ eine Umgebung V, für die $v(V \cap B) \subseteqq U$ ist.*

Behauptung. *Die Voraussetzung* c) *von Definition* 1.1 *ist erfüllt, d. h.* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *ist eine offene Modifikation.*

Anmerkung. Bei BEHNKE und STEIN wird M kompakt vorausgesetzt. Das ist jedoch nicht erforderlich, was sich fast genau in derselben Weise wie bei BEHNKE und STEIN ergibt:

Beweis. Zu jedem Punkt $Q_0 \in N$ gibt es eine offene Umgebung V_{Q_0} mit $v(V_{Q_0} - N) \subseteqq W$. Dann ist $V_{Q_0} \subseteqq \tau(W \cap A) \cup N$. Also ist $V = \tau(W \cap A) \cup N = \tau(W \cap A) \cup \bigcup_{Q_0 \in N} V_{Q_0}$ offen. Auf $V - N$ ist $g(Q) = f\left(v(Q)\right)$ analytisch. Ist $Q^\nu \in V - N$ und strebt $Q^\nu \to Q_0 \in N$ für $\nu \to \infty$, so strebt $g(Q^\nu) \to 0$ für $\nu \to \infty$. Widrigenfalls würde es eine gleichbezeichnete Teilfolge Q^ν und ein $\varepsilon > 0$ mit $|g(Q^\nu)| \geqq \varepsilon$ geben. Ist U eine beliebige Umgebung von M, so gibt es eine Umgebung V^* von Q_0, so daß $v(V^* \cap B) \subset U$ gilt. Für $\nu \geqq \nu_U$ ist $Q^\nu \in V^*$, also $P^\nu = v(Q^\nu) \in U$. Nach Satz 2.2 hat die Folge P^ν einen Häufungspunkt $P_0 \in M$. Für eine geeignete Nummer ν gilt also

$$\varepsilon > |f(P^\nu) - f(P_0)| = |f(P^\nu)| = |f\left(v(Q^\nu)\right)| = |g(Q^\nu)| \geqq \varepsilon.$$

Das ist ein Widerspruch. Es strebt $g(Q^\nu) \to 0$ für $Q^\nu \to Q_0 \in N$ und $Q^\nu \in V \cap B$; nach einem Satz von RADÓ-BEHNKE-STEIN[19]) ist

$$G(Q) = \begin{cases} g(Q) & \text{für} \quad Q \in V \cap B, \\ 0 & \text{für} \quad Q \in N. \end{cases} \tag{2.1}$$

auf V analytisch. Jedes größte Teilgebiet V_1 von V, enthält Punkte von B; denn wäre $V_1 \subseteqq N$, so wäre $\overline{V}_1 \subseteqq N \subseteqq V$ und $V_1 = \overline{V}_1 \cap V = \overline{V}_1$, also wäre V_1 ein größtes Teilgebiet von H und somit nicht in N enthalten. In keinem Teilgebiet von $V_1 \cap B$ verschwindet $G(Q)$ identisch, also ist $G(Q)$ in V_1 nicht identisch Null. Daher hat die in V analytische Menge $L = \{Q \mid G(Q) = 0\}$ höchstens die Dimension $2n - 2$. Es ist $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation, w. z. b. w.

Nun werden einige Eigenschaften der Streumengen bei offenen Modifikationen bewiesen.

[19]) Man vgl. BEHNKE und STEIN [1], RADÓ [13], THULLEN [19], CARTAN [4].

Satz 2.6. Streumengen bei offenen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. In* G *sei die Menge* L *enthalten.*

Behauptung. 1. *Es ist* $\Sigma(M, L) = \Sigma(M \cap \overline{L \cap A}, L) = \overline{\tau(L \cap A)} \cap N$.
2. *Es ist* $\Sigma(M) = N$.

Beweis. 1. Ist $Q \in \Sigma(M, L)$, so gibt es eine Folge $P_\nu \in A \cap L$ mit $Q = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P_\nu)$, woraus sich $Q \in \overline{\tau(A \cap L)} \cap N$ ergibt. Ist $Q \in \overline{\tau(A \cap L)} \cap N$, so gibt es eine Folge $P_\nu \in A \cap L$ mit $Q = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P_\nu)$. Gemäß Satz 2.3 hat die Folge $\{P_\nu\}$ eine konvergente Teilfolge, die wieder mit $\{P_\nu\}$ bezeichnet werde. Es strebt $P_\nu \to P \in M$ für $\nu \to \infty$, also ist $Q \in \Sigma(M, L)$. Man erhält

$$\overline{\tau(A \cap L)} \cap N = \Sigma(M, L) = \Sigma(M \cap \overline{A \cap L}, L). \tag{2.2}$$

2. Es ist

$$\Sigma(M) = \overline{\tau(A)} \cap N = H \cap N = N, \tag{2.3}$$

w. z. b. w.

Satz 2.7. Abgeschlossene Streumengen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die abgeschlossene Menge* $R \subseteq M$ *sei in der offenen Menge* G_1 *enthalten, die eine abzählbare Basis der offenen Mengen habe. Es sei* L *in* G *enthalten.*

Behauptung. *Die Streumenge* $\Sigma(R, L)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis. Da G_1 eine abzählbare Basis der offenen Mengen hat, trägt G_1 eine Metrik $\varrho^*(P, Q)$. Zu jedem Punkt $Q \in \overline{\Sigma(R, L)}$ gibt es eine Folge $Q^\nu \in \Sigma(R, L)$, die gegen Q strebt. Der Punkt Q hat eine metrisierbare Umgebung V, die die Metrik $\varrho(P, K)$ trage. O.B.d.A. kann $Q^\nu \in V$ angenommen werden. Zu jeder Nummer ν gibt es eine Folge $Q^\nu_\mu = \tau(P^\nu_\mu) \in V$ mit $P^\nu_\mu \in L \cap G_1 \cap A$, so daß $Q^\nu_\mu \to Q^\nu$ und $P^\nu_\mu \to P^\nu \in R$ für $\mu \to \infty$ streben. Es gibt eine Nummer μ_ν, so daß $\varrho(Q^\nu_\mu, Q^\nu) \leq \frac{1}{\nu}$ und $\varrho^*(P^\nu_\mu, P^\nu) \leq \frac{1}{\nu}$ für alle $\mu \geq \mu_\nu$ ist. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\varrho(Q^\nu_{\mu_\nu}, Q) \leq \varrho(Q^\nu_{\mu_\nu}, Q^\nu) + \varrho(Q, Q^\nu) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(Q, Q^\nu). \tag{2.4}$$

Daher strebt $Q^\nu_{\mu_\nu} \to Q \in N$ für $\nu \to \infty$. Gemäß Satz 2.3 hat die Folge $Q^\nu_{\mu_\nu} = \tilde{Q}_\nu$ eine Teilfolge $\tilde{Q}_{\nu_\sigma}$, so daß $\tilde{P}_{\nu_\sigma} = v(\tilde{Q}_{\nu_\sigma}) \to P \in M$ für $\sigma \to \infty$ strebt. Mit $\tilde{P}_\nu = v(\tilde{Q}_\nu) = \tilde{P}^\nu_{\mu_\nu}$ erhält man

$$\varrho^*(P^{\nu_\sigma}, P) \leq \varrho^*(P^{\nu_\sigma}, \tilde{P}_{\nu_\sigma}) + \varrho^*(\tilde{P}_{\nu_\sigma}, P) \leq \frac{1}{\nu_\sigma} + \varrho^*(\tilde{P}_{\nu_\sigma}, P). \tag{2.5}$$

Also strebt $P^{\nu_\sigma} \to P$ für $\sigma \to \infty$, wobei $P^{\nu_\sigma} \in R$ ist. Da R abgeschlossen ist, gehört auch P der Menge R an. Damit wurde eine Folge $\tilde{P}_{\nu_\sigma} \in L \cap A$ gefunden, so daß $\tilde{P}_{\nu_\sigma} \to P \in R$ für $\sigma \to \infty$ und $\tau(\tilde{P}_{\nu_\sigma}) = \tilde{Q}_{\nu_\sigma} \to Q$ für $\sigma \to \infty$ streben. Daher ist $Q \in \Sigma(R, L)$ und somit $\Sigma(R, L)$ abgeschlossen, w. z. b. w.

Normalerweise setzt man bei Mannigfaltigkeiten die Existenz einer abzählbaren Basis der offenen Mengen voraus. In diesem Normalfall ist die Streumenge von τ längs L in R abgeschlossen, falls nur R abgeschlossen und die Modifikation offen ist.

Auf einer Teilmannigfaltigkeit induziert eine offene Modifikation eine andere offene Modifikation:

Satz 2.8. Modifikation auf Teilmannigfaltigkeiten.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Eine* $2m$*-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit* G_1 *von* G *und eine* $2m$*-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit* $H_1 \subseteqq H$ *seien gegeben. In einer offenen Umgebung* U *von* M *gebe es eine analytische Menge* $L \supseteqq M$*, die kein Teilgebiet von* $G_1 \cap U$ *enthält. In einer offenen Umgebung* V *von* N *gebe es eine analytische Menge* $L^* \supseteqq N$*, die kein Teilgebiet von* $H_1 \cap V$ *enthält. Es sei*

$$\tau(G_1 \cap A) = H_1 \cap B, \tag{2.6}$$

$$\overline{G_1} \cap M = G_1 \cap M. \tag{2.7}$$

Es werde $A_1 = G_1 \cap A$, $M_1 = G_1 \cap M$, $B_1 = H_1 \cap B$ *und* $N_1 = H_1 \cap N$ *gesetzt. Mit* τ_1 *werde die auf* A_1 *beschränkte Abbildung* τ*, mit* v_1 *die auf* B_1 *beschränkte Abbildung* v *bezeichnet.*

Behauptung. *Durch* $\mathfrak{M}_1 = \underset{m}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_1, A_1, M_1, \tau_1 \\ H_1, B_1, N_1, v_1 \end{pmatrix}$ *wird eine offene Modifikation gegeben.*

Beweis. Nach Satz 1.4 ist $\mathfrak{M}_1$ eine Modifikation. Strebt $Q_\nu \to Q \in N_1$ für $\nu \to \infty$ und ist $Q_\nu \in B_1$, so strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $P_\nu = v(Q_\nu) \to P \in M$ für $\nu \to \infty$. Da $P_\nu \in G_1 \cap A$ ist, gehört P zu $\overline{G_1} \cap M = G_1 \cap M$. Also ist die Modifikation $\mathfrak{M}_1$ offen, w. z. b. w.

In der Definition 1.2 wurde die Abbildung $\tau(P, L)$ erklärt. Damit ist auch die Abbildung $v(Q, L)$ definiert, über deren Verhalten bei einer offenen Modifikation der folgende Satz Aufschluß gibt.

Satz 2.9. Stetigkeit in den Bestimmtheitsstellen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} \underset{n}{\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}}$ *sei offen. Es sei* $R_L \subseteqq N$ *die Menge der Punkte* $Q \in \overline{L \cap B} \cap N$*, in denen die Abbildung* v *längs* L *nicht streut. Es sei* $R_H \subseteqq N$ *die Menge der Punkte* $Q \in N$*, in denen die Abbildung* v *nicht streut.*

Behauptung. 1. *Die Abbildung* $v(Q, L)$ *ist auf* $(L \cap B) \cup R_L$ *stetig.*

2. *Die Menge* $B \cup R_H$ *ist offen und die Abbildung* $v(Q, H)$ *auf* $B \cup R_H$ *analytisch.*

Beweis. a) Ist $Q_0 \in B \cap L$, so gilt $v(Q, L) = v(Q)$ in einer Umgebung von Q_0, also ist $v(Q, L)$ in Q_0 stetig.

b) Ist $Q_0 \in R_L$, so gibt es eine Folge $Q^\nu \in L \cap B$, die gegen Q_0 strebt. In M hat die Folge $v(Q^\nu)$ einen Häufungspunkt, der dann zur Streumenge $\Sigma(Q_0, L)$ gehört. Also besteht $\Sigma(Q_0, L)$ für $Q_0 \in R_L$ aus genau einem — mit

$v(Q_0, L)$ bezeichneten — Element. Ist $Q^\nu \in L \cap B$ irgendeine Folge mit $\lim_{\nu\to\infty} Q^\nu = Q_0$, so hat die Bildfolge $v(Q^\nu)$ wenigstens einen Häufungspunkt, und jeder solche Häufungspunkt gehört zu $\Sigma(Q_0, L)$. Daher strebt $v(Q^\nu) \to v(Q_0, L)$ für $\nu \to \infty$. Es ist $v(Q, L)$ in Q_0 bei Annäherung aus $L \cap B$ stetig.

c) Angenommen die Abbildung $v(Q, L)$ ist in $Q_0 \in R_L$ bei Annäherung aus R_L unstetig. Dann gibt es eine kompakte Umgebung U von $v(Q_0, L)$ und eine Folge $Q^\nu \in R_L$, die gegen Q_0 strebt und für die $P^\nu = v(Q^\nu, L) \notin U$ ist. Dabei kann man annehmen, daß die Punkte Q^ν in einer offenen Umgebung V von Q_0 liegen, die eine Metrik $\varrho(P, Q)$ trägt. Zu jeder Nummer ν kann man einen Punkt $\tilde{P}^\nu = v(\tilde{Q}^\nu) \notin U$ mit $\tilde{Q}^\nu \in V \cap B \cap L$ bestimmen, für den $\varrho(\tilde{Q}^\nu, Q^\nu) \leq \frac{1}{\nu}$ gilt. Wegen $\varrho(\tilde{Q}^\nu, Q_0) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(Q^\nu, Q_0)$ strebt $\tilde{Q}^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$. Es strebt die Folge $\tilde{P}^\nu = v(\tilde{Q}^\nu) = v(\tilde{Q}^\nu, L)$ gegen $v(Q_0, L)$ für $\nu \to \infty$. Daher ist $\tilde{P}^\nu \in U$ für $\nu \geq \nu_0$, was falsch ist. Die Abbildung $v(Q, L)$ ist auf R_L stetig. Aus b) und c) folgt die Stetigkeit von $v(Q, L)$ auf $(L \cap B) \cup R_L$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

d) Die Abbildung $v(Q, H)$ ist auf $B \cup R_H$ stetig. Zu jedem Punkt $Q_0 \in R_H$ gibt es eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$, eine kompakte Umgebung $U \subset U_\alpha$ von $P_0 = v(Q_0, H)$ und eine offene Umgebung V von Q_0, für die $v(V - N) \subset U$ gilt. In $V - N$ gibt es analytische Funktionen $f_1, \ldots, f_n$, für die

$$\alpha^{-1} v(Q) = \big(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)\big) \in \alpha^{-1}(U) \tag{2.8}$$

auf $V - N$ gilt. Da $\alpha^{-1}(U)$ kompakt ist, sind die Funktionen $f_1(Q), \ldots, f_n(Q)$ beschränkt, lassen sich also eindeutig und analytisch in $V \cap N$ fortsetzen. Für $Q_1 \in V \cap N$ ist

$$\big(f_1(Q_1), \ldots, f_n(Q_1)\big) = \lim_{\substack{Q \to Q_1 \\ Q \in B}} \alpha^{-1} v(Q) \in \alpha^{-1}(U). \tag{2.9}$$

Der Grenzwert $\lim_{\substack{Q \to Q_1 \\ Q \in B}} v(Q) = \alpha\left(\lim_{\substack{Q \to Q_1 \\ Q \in B}} \alpha^{-1} v(Q)\right) \in U$ existiert, also ist $Q_1 \in R_H$. Daher ist $B \cup R_H$ offen und

$$v(Q, H) = \alpha\big(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)\big) \quad \text{für} \quad Q \in V \tag{2.10}$$

analytisch. Die Abbildung $v(Q)$ ist aus B in die offene Menge $B \cup R_H$ eindeutig und analytisch fortsetzbar, w. z. b. w.

Nun soll noch das Verhalten analytischer und meromorpher Funktionen bei Modifikationen untersucht werden.

Satz 2.10. Analytische Funktionen[20]).

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die Funktion* $f(P)$ *sei in einer offenen Umgebung* U *von* M *analytisch. Es werde* $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ *für* $Q \in \tau(U \cap A)$ *gesetzt.*

[20]) Man vgl. Behnke und Stein [1] S. 15.

Behauptung. *Die analytische Funktion $g(Q)$ ist aus $\tau(U \cap A)$ eindeutig und analytisch in die offene Menge $V = \tau(U \cap A) \cup N$ fortsetzbar.*

Beweis. Angenommen die Funktion $g(Q)$ ist in einem Punkt $Q_0 \in N$ singulär, so ist sie in keiner Umgebung von Q_0 beschränkt. Es gibt eine Folge $Q^\nu \in V \cap B$ mit $\lim_{\nu\to\infty} Q^\nu = Q_0$, so daß $g(Q^\nu) \to \infty$ für $\nu \to \infty$ strebt. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $P^\nu = v(Q^\nu) \to P_0 \in M$ für $\nu \to \infty$. Also ist $\lim_{\nu\to\infty} f(P^\nu) = \infty$, was falsch ist. Daher ist $g(Q)$ in allen Punkten von N regulär, w. z. b. w.

Satz 2.11. Meromorphe Funktionen[20]).

Voraussetzung. *Die Modifikation $\mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei offen. Die Funktion $f(P)$ sei in einer offenen Umgebung U von M meromorph. Für $Q \in \tau(A \cap U)$ werde $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ gesetzt. Außerdem sei eine der beiden folgenden Forderungen erfüllt:*

a) *Die Funktion $f(P)$ lasse auf M einen Wert aus und habe auf M keine Unbestimmtheitsstelle.*

b) *In einer offenen Menge U_1 mit $M \subset U_1 \subseteqq U$ gebe es zwei analytische Funktionen $f_1(P)$ und $f_2(P)$, deren Quotient f sei.*

Behauptung. *Die Funktion $g(Q)$ läßt sich aus $\tau(A \cap U)$ eindeutig und meromorph in die offene Menge $V = \tau(A \cap U) \cup N$ fortsetzen.*

Beweis. 1. Die Voraussetzung a) gelte. Läßt $f(P)$ den Wert ∞ aus, so ist $g(Q)$ nach Satz 2.10 in N regulär, ist $f(P) \neq a \neq \infty$ für alle $P \in M$, so ist $f^*(P) = \dfrac{1}{f(P) - a}$ in einer Umgebung von M analytisch, also $g^*(Q) = \dfrac{1}{f(v(Q)) - a} = \dfrac{1}{g(Q) - a}$ in V regulär. Daher läßt sich $g(Q)$ eindeutig und meromorph aus $\tau(U \cap A)$ in V fortsetzen, w. z. b. w.

2. Gilt die Voraussetzung b), so sind die Funktionen $g_1(Q) = f_1\big(v(Q)\big)$ und $g_2(Q) = f_2\big(v(Q)\big)$ in V regulär. Daher ist $g(Q)$ aus $\tau(U \cap A)$ eindeutig und meromorph in V fortsetzbar, w. z. b. w.

Gegenbeispiele.

Im komplex-projektiven Raum G der Dimension 4 werden homogene Koordinaten $x:y:z$ und im komplex-projektiven Raum H der Dimension 4 werden homogene Koordinaten $\xi:\eta:\zeta$ eingeführt. Werden

$$(2.11)\quad \begin{cases} A = \{(x:y:z) \mid y \neq 0\}, & B = \{(\xi:\eta:\zeta) \mid \eta \neq 0\}, \\ M = G - A, & N = H - B, \\ \tau(x:y:z) = \big((x + z\,e^{z/y}) : y : z\big), & v(\xi:\eta:\zeta) = \big((\xi - \zeta\,e^{\zeta/\eta}) : \eta : \zeta\big) \end{cases}$$

gesetzt, so ist $\mathfrak{M}_2 \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine beiderseits offene Modifikation.

1. Die Funktion $f(P) = x/y$ ist in A analytisch, in G meromorph, läßt in M alle Werte außer ∞ aus, hat aber in M die Unbestimmtheitsstelle $(0:0:1)$. Die Funktion $g(Q) = f\big(v(Q)\big) = \dfrac{\xi - \zeta\,e^{\zeta/\eta}}{\eta}$ ist in N wesentlich singulär.

2. Die Funktion $f(P)=\frac{x}{z}$ ist in M meromorph, hat in M keine Unbestimmtheitsstelle, nimmt aber jeden Wert in M an. Die Funktion $g(Q)=f(v(Q))=\frac{\xi-\zeta e^{\zeta/\eta}}{\zeta}$ ist in N wesentlich singulär.

Diese Beispiele zeigen, daß auch bei offenen Modifikationen wesentliche Singularitäten entstehen können, selbst dann, wenn G und H kompakt sind.

Satz 2.12. Analytische Mengen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei offen. In einer offenen Umgebung* U *von* M *liege eine analytische Menge* L, *die* M *in höchstens endlich vielen Punkten treffe. In jedem Punkt von* M *streue die Abbildung* τ *längs* L *nicht.*

Behauptung. *Die in* $\tau(U\cap A)$ *analytische Menge* $L^*=\tau(L\cap A)$ *ist in der offenen Umgebung* $V=\tau(U\cap A)\cup N$ *regulär und wird durch* $\tilde{L}=\tau(L, L)=V\cap\overline{\tau(L\cup A)}$ *in* V *fortgesetzt.*

Beweis. In U ist $L_1=\{P|\dim_P L>0\}$ analytisch und trifft M in höchstens endlich vielen Punkten, in denen τ längs L_1 nicht streut. In $V\cap B$ ist $L_1^*=\tau(L_1\cap A)$ analytisch. Da L_1 in U abgeschlossen ist, erhält man

$$\Sigma(M, L_1)=\bigcup_{P\in M}\Sigma(P, L_1)=\bigcup_{P\in M\cap L_1}\Sigma(P, L_1). \tag{2.12}$$

Weil $M\cap L_1$ höchstens endlich viele Punkte und $\Sigma(P, L_1)$ höchstens einen Punkt enthält, besteht auch

$$\Sigma(M, L_1)=\overline{\tau(L_1\cap A)}\cap N=\overline{L_1^*}\cap N \tag{2.13}$$

(Satz 2.6) aus höchstens endlich vielen Punkten. In V ist L_1^* bis auf endlich viele Punkte regulär. Weil $\dim_Q L_1^*\geq 2$ für $Q\in\tilde{L}_1$ ist, verhält sich nach Remmert und Stein [14] $\tilde{L}_1$ in ganz V regulär.

In U ist $L_0=\{P|\dim_P L=0\}$ regulär. Angenommen $L_0^*=\tau(L_0\cap A)$ ist in $Q_0\in V$ singulär. Dann ist $Q_0\in N$ und es gibt eine Folge $Q^\nu\in L_0^*\cap B$ mit $Q_0=\lim_{\nu\to\infty}Q^\nu$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $P^\nu=v(Q^\nu)\to P_0\in M$ für $\nu\to\infty$; denn die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist offen. Da $P^\nu\in L_0$ ist, wird L_0 in P_0 singulär, was falsch ist. In V ist L_0^* regulär. Dann ist auch $L_0^*\cup L_1^*=L^*$ in V regulär. Die Menge der Punkte aus $L\cap M$, in denen sich τ längs L bestimmt verhält, sei M_1. Die Fortsetzung von L^* aus $V\cap B$ in V ist dann:

$$\begin{aligned}\tilde{L}=\overline{L^*}\cap V&=\tau(L\cap A)\cup[\overline{\tau(L\cap A)}\cap N]\\&=\tau(L\cap A)\cup\Sigma(M, L)\\&=\tau(L\cap A)\cup\bigcup_{P\in L\cap M}\Sigma(P, L)\\&=\tau(L\cap A)\cup\bigcup_{P\in M_1}\Sigma(P, L)\\&=\tau(L\cap A)\cup\bigcup_{P\in M_1}\{\tau(P, L)\}\\&=\tau(L\cap A)\cup\tau(M\cap L, L)\\&=\tau(L, L),\end{aligned}$$

w. z. b. w.

§ 3. Das Verhalten analytischer Mengen bei Modifikationen.

Für die weitere Untersuchung wird es von Bedeutung sein, daß man die Modifikationen zwischen zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten leicht übersieht und daß man bei Modifikationen zwischen $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten das Verhalten zweidimensionaler komplexer Teilmannigfaltigkeiten, sowie analytischer Mengen der Dimension 2 leicht beherrscht. Auf das Verhalten höherdimensionaler analytischer Mengen bei Modifikationen soll nicht weiter eingegangen werden, da diese weiterhin nicht gebraucht werden.

Eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit werde auch als Riemannsche Fläche und eine zweidimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit der komplexen Mannigfaltigkeit G als eine *komplexe Kurve* aus G, oder, wenn keine Verwechslung möglich ist, als Kurve bezeichnet.

Satz 3.1. Offene Modifikationen Riemannscher Flächen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

Behauptung. *Die Abbildung v ist in H regulär. Die Abbildung $v(Q, H)$ bildet H konform auf $H^* = v(H, H)$ ab. In jedem Punkt $P \in G - H^*$, hat die Abbildung τ eine Lücke.*

Beweis. Die Menge M besteht aus isolierten Punkten. Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es also ein Gebiet U_P, so daß $\overline{U}_P \cap \overline{U}_Q$ für $P \neq Q$ leer ist, und so daß $\overline{U}_P$ kompakt ist. Es ist $U = \bigcup_{P \in M} U_P$ eine offene Umgebung von M, deren größte Teilgebiete die Gebiete U_P sind. Jeder Punkt $Q \in N$ liegt in einem Gebiet V, für das $v(V \cap B) \subsetneqq U$ gilt. Da $v(V \cap B)$ ein Gebiet ist, gibt es einen und nur einen Punkt $P \in M$ mit $v(V \cap B) \subsetneqq U_P$; also besteht $\Sigma_v(Q)$ genau aus dem Punkt P. Die Abbildung v verhält sich in N bestimmt, ist also aus B eindeutig und analytisch in H fortsetzbar. Da $v(Q, H)$ auf H analytisch, auf B konform ist und $N = H - B$ nur aus isolierten Punkten besteht, bildet $v(Q, H)$ die Mannigfaltigkeit H konform auf eine offene Menge $H^* = v(H, H)$ ab. Es ist $G \supseteqq H^* \supseteqq A$. Ist $P \in G - H^*$ und wird $\Sigma_\tau(P) \neq \varnothing$ angenommen, so gibt es eine Folge $Q^\nu \in B$, die für $\nu \to \infty$ gegen einen Punkt $Q \in \Sigma_\tau(P)$ strebt, wobei $\lim_{\nu \to \infty} v(Q^\nu) = P$ ist; es gilt $P = v(Q, H) \in H^*$, also war die Annahme falsch. In jedem Punkt $P \in G - H^*$ hat die Abbildung τ eine Lücke, w. z. b. w.

Offene Modifikationen zwischen Riemannschen Flächen sind also nur in der trivialen Weise möglich, daß aus M gewisse Punkte weggelassen werden. Hat die Abbildung τ keine Lücke, wie insbesondere bei beiderseits offenen Modifikationen, so ist die offene Modifikation $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ äquivalent zur trivialen Modifikation $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, j \\ G, A, M, j \end{pmatrix}$, wenn dabei j die identische Abbildung von G auf sich bedeutet, oder anders ausgedrückt, G und H sind analytisch äquivalente Mannigfaltigkeiten, wobei sich die Mengen A und B entsprechen und die Abbildungen τ bzw. v äquivalente Punkte ineinander überführen.

Satz 3.2. Voraussetzung. a) *Riemannsche Flächen G und H seien gegeben.*

b) *Die Menge $M \subset G$ bestehe nur aus isolierten Punkten.*

d) *Durch $\tau(P)$ werde $A = G - M$ konform auf die offene Menge $B \subsetneqq H$ abgebildet. Für $Q \in B$ sei $v(Q) = \tau^{-1}(Q)$ die Umkehrung. In $N = H - B$ sei kein größtes Teilgebiet von H gelegen.*

e) *Zu jedem Punkt $Q \in N$ und jeder Umgebung U von M gebe es eine Umgebung V von Q, so daß $v(V \cap B) \subsetneqq U$ ist.*

Behauptung. *Es ist* $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *eine offene Modifikation.*

Beweis. Da M nur isolierte Punkte enthält, hat jeder Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung U_P mit $U_P \cap U_Q = \varnothing$ für $P \neq Q$, auf der es eine analytische Funktion f_P gibt, die auf $U_P \cap M = \{P\}$ und nur dort Null wird. In der offenen Menge $W = \bigcup_{P \in M} U_P \supset M$ gibt es eine und nur eine analytische Funktion f mit $f = f_P$ auf U_P. Es ist $M = \{P \mid f(P) = 0\}$. Nach dem Satz von Behnke und Stein (Satz 2.5) ist $\mathfrak{M}_1\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation, w. z. b. w.

Damit ist eine vollständige Übersicht über die Modifikationen zwischen zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten gewonnen.

Bekanntlich gilt der folgende Satz:

Satz 3.3. Satz von Cartan[21]).

Voraussetzung. *In der $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit G sei die rein zweidimensionale analytische Menge L gelegen.*

Behauptung. 1. *Es gibt eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{L}$ und eine analytische Abbildung $\gamma(Q)$ von $\mathfrak{L}$ auf L, für die gilt:*

a) *Ist V eine komplexe Kurve aus G, die in L liegt, so gibt es eine und nur eine offene Menge $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{L}$, so daß die auf $\mathfrak{V}$ beschränkte Abbildung $\gamma_{\mathfrak{V}}(Q) = \gamma(Q) \mid \mathfrak{V}$ die offene Menge $\mathfrak{V}$ konform auf V abbildet.*

b) *Zu jedem Punkt $Q_0 \in \mathfrak{L}$ gibt es eine offene Umgebung $\mathfrak{V}$, die durch γ konform auf eine komplexe Kurve V aus G mit $V \subsetneqq L$ abgebildet wird.*

2. *Die Riemannsche Fläche $\mathfrak{L}$ und die Abbildung γ sind bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmt, d.h.: Ist $\mathfrak{L}^*$ eine Riemannsche Fläche und γ^* eine analytische Abbildung von $\mathfrak{L}^*$ auf L, die die Forderungen* a) *und* b) *erfüllen, so gibt es eine konforme Abbildung ϱ von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{L}^*$, für die gilt:*

c) *Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subsetneqq L$, ist $\mathfrak{V}$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{V}^*$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}^*$, so wird $\mathfrak{V}$ durch ϱ konform auf $\mathfrak{V}^*$ abgebildet. Es gilt $\varrho = \gamma^{*-1}_{\mathfrak{V}^*} \gamma_{\mathfrak{V}}$.*

3. *Zu jedem Punkt $P \in L$ gibt es eine Zahl s_P und eine offene Umgebung U, so daß $U \in L$ aus s_P zusammenhängenden komplexen Kurven besteht, die sich paarweise in P und nur in P schneiden. In jedem gewöhnlichen Punkt P ist $s_P = 1$. Die Menge $\gamma^{-1}(P)$ besteht aus genau s_P Punkten.*

[21]) Man vgl. H. Cartan [3].

4. *Dann und nur dann ist $\mathfrak{L}_0$ ein größtes Teilgebiet von $\mathfrak{L}$, wenn $\gamma(\mathfrak{L}_0)$ ein irreduzibler Teil von L ist.*

Auf den Beweis dieses bekannten Satzes möge hier verzichtet werden. Es werde $\mathfrak{L}$ die Riemannsche Fläche zur analytischen Menge L und $\gamma(R)$ die Projektion von $\mathfrak{L}$ auf L genannt.

Satz 3.4. Verhalten zweidimensionaler analytischer Mengen.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{*}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die rein zweidimensionale analytische Menge L aus G schneide die Menge M nur in isolierten Punkten. Die Riemannsche Fläche zu L sei $\mathfrak{L}$ und $\gamma(R)$ die zugehörige Projektion.*

3. *Es gebe eine zweidimensionale analytische Menge $\tilde{L}$ aus H mit $\tilde{L} \supseteq \tau(L \cap A)$ und zwar sei $\tilde{L}$ die kleinste solche Menge.*

Behauptung. 1. *Die analytische Menge $\tilde{L}$ ist rein zweidimensional. Die Riemannsche Fläche zu $\tilde{L}$ sei $\tilde{\mathfrak{L}}$ und $\tilde{\gamma}(R)$ die zugehörige Projektion. Es gibt eine konforme Abbildung ϱ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ in $\mathfrak{L}$, so daß in jedem Punkt $Q \in B \cap \tilde{L}$ gilt:*

$$\gamma\,\varrho(R) = v(Q) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\gamma}^{-1}(Q). \tag{3.1}$$

Die Abbildung ϱ ist eindeutig bestimmt.

2. *Ist $R \in \mathfrak{L} - \varrho(\tilde{\mathfrak{L}})$, so ist $\gamma(R) \in M$ und es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{V}$ von R, die konform auf eine komplexe Kurve V aus G durch γ abgebildet wird, so daß $\Sigma_\tau(\gamma(R), V)$ leer ist.*

3. *Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subseteq L$, ist $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{L}$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}$ und $\gamma_{\mathfrak{V}}$ die konforme Beschränkung von γ auf $\mathfrak{V}$, so wird die komplexe Kurve V durch $\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ konform in $\mathfrak{L}$ abgebildet, falls in jedem Punkt $P \in V \cap M$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P, V)$ nicht leer ist.*

4. *Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subseteq L$, für die $\overline{V} \cap M = V \cap M$ gilt und diese Menge aus dem Punkt P_0 besteht, und für die $\Sigma(P_0, V) \neq \varnothing$ ist, so verhält sich die Abbildung τ längs V im Punkt P_0 bestimmt. Durch $\tau(P, V)$ wird V konform auf eine komplexe Kurve $\tilde{V}$ aus H mit $\tilde{V} \subseteq \tilde{L}$ abgebildet. Ist $Q_0 = \tau(P_0, V)$, so gilt*

$$\overline{\tilde{V}} \cap N = V \cap N = \{Q_0\}. \tag{3.2}$$

Ist dabei P_0 ein gewöhnlicher Punkt von V, und streut die Abbildung $v(Q)$ in Q_0 nicht, so ist auch Q_0 ein gewöhnlicher Punkt.

5. *Es ist $\tilde{L} = \overline{\tau(L \cap A)}$. Die analytische Menge $\tilde{L}$ schneidet N nur in isolierten Punkten.*

Beweis. 1. Die Menge $\hat{L}$ der gewöhnlichen Punkte von L ist eine komplexe Kurve aus G ebenso der Durchschnitt $\hat{L} \cap A$. Die zugehörige offene Menge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}$ wird durch $\gamma_{\mathfrak{A}} = \gamma | \mathfrak{A}$ konform auf $\hat{L} \cap A$ abgebildet. Da $\tilde{L}$ minimal gewählt ist, ist $\tilde{L}$ rein zweidimensional. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von $\tilde{L}$ sei $\hat{\tilde{L}}$; die Riemannsche Fläche zu $\tilde{L}$ sei $\tilde{\mathfrak{L}}$ und $\tilde{\gamma}$ die zugehörige

Projektion. Durch τ wird $\hat{L} \cap A$ konform auf $\tilde{A} \subseteqq \hat{\tilde{L}} \cap B$ abgebildet. Der komplexen Kurve $\tilde{A}$ aus H entspreche in $\tilde{\mathfrak{L}}$ die offene Menge $\tilde{\mathfrak{A}}$, die durch $\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \tilde{\gamma} | \tilde{\mathfrak{A}}$ konform auf $\tilde{A}$ abgebildet wird. Durch $\varphi(R) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1} \tau \gamma_{\mathfrak{A}}(R)$ wird $\mathfrak{A}$ konform auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ abgebildet. Die Umkehrung wird durch $\psi(R) = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} v \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(R)$ für $R \in \tilde{\mathfrak{A}}$ gegeben.

Die Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{L} - \mathfrak{A}$ besteht nur aus isolierten Punkten, da $L - (\hat{L} \cap A)$ nur aus isolierten Punkten besteht. Angenommen in $\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{L}} - \tilde{\mathfrak{A}}$ ist ein größtes Teilgebiet $\mathfrak{C}$ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ enthalten, so ist $C = \tilde{\gamma}(\mathfrak{C})$ ein irreduzibler Teil von $\tilde{L}$. Da die analytische Menge $\tilde{L} \supseteqq \tau(L \cap A)$ minimal gewählt war, gibt es eine komplexe Kurve $V \subseteqq C \cap \tau(L \cap A)$, die nur gewöhnliche Punkte von C und $\tau(L \cap A)$ enthält. Daher gehört V zu $\tilde{A} = \tau(\hat{L} \cap A)$, woraus $\tilde{\gamma}_{\mathfrak{C}}^{-1}(V) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1}(V) \subseteqq \mathfrak{C} \cap \tilde{\mathfrak{A}}$ folgt. Wegen $\mathfrak{C} \subseteqq \tilde{\mathfrak{R}}$ und $\tilde{\mathfrak{R}} \cap \tilde{\mathfrak{A}} = \varnothing$ ist das ein Widerspruch. In $\tilde{\mathfrak{R}}$ liegt kein größtes Teilgebiet von $\tilde{\mathfrak{L}}$.

Der Punkt $Q_0 \in \tilde{\mathfrak{R}}$ und die Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{R}$ seien beliebig gewählt. Angenommen für jede Umgebung $\mathfrak{V}$ von Q_0 sei $\psi(\mathfrak{V} \cap \tilde{\mathfrak{A}})$ nicht in $\mathfrak{U}$ enthalten. Dann gibt es eine Folge $Q^\nu \in \tilde{\mathfrak{A}}$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} Q^\nu = Q_0$, für die $\psi(Q^\nu) = P^\nu \notin \mathfrak{U}$ ist. Da die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen ist, kann man aus der Folge $\tilde{\gamma}(Q^\nu) \in \hat{\tilde{L}} \cap B$ eine gleichbezeichnete Teilfolge auswählen, so daß $v\tilde{\gamma}(Q^\nu) \to P_0 \in L$ strebt. Es gehört $v\tilde{\gamma}(Q^\nu)$ der Menge $\hat{L} \cap A$ an. Nach Satz 3.3 Behauptung 3 strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $\gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} v \tilde{\gamma}(Q^\nu) = \psi(Q^\nu) \to R_0 \in \mathfrak{L}$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in \mathfrak{A}$, so ist $Q_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} Q^\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi\, \psi(Q^\nu) = \varphi(R_0) \in \tilde{\mathfrak{A}}$ was falsch ist. Ist $R_0 \in \mathfrak{R}$, so ist $P^\nu = \psi(Q^\nu) \in \mathfrak{U}$ für alle hinreichend großen Nummern ν, was ebenfalls falsch ist. Daher gibt es zu jedem Punkt $Q_0 \in \tilde{\mathfrak{R}}$ und jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{R}$ eine Umgebung $\mathfrak{V}$ von Q_0, für die $\psi(\mathfrak{V} \cap \tilde{\mathfrak{A}}) \subseteqq \mathfrak{U}$ ist.

Gemäß Satz 3.2 ist $\mathfrak{M}_1 \begin{pmatrix} \mathfrak{L}, \mathfrak{A}, \mathfrak{R}, \varphi \\ \tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{R}}, \psi \end{pmatrix}$ eine offene Modifikation. Die Abbildung $\psi = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} v \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ läßt sich also zu einer konformen Abbildung ϱ von $\tilde{\mathfrak{L}}$ in $\mathfrak{L}$ fortsetzen. Es ist $\gamma\, \varrho$ auf $\tilde{\mathfrak{L}}$ stetig. Auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist $\gamma\, \varrho(R) = v\tilde{\gamma}(R)$, dies gilt dann auch noch, wenn $R \in \overline{\tilde{\mathfrak{A}}} \cap \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B) = \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B)$ ist. Daher gilt

$$\gamma\, \varrho(R) = v(Q) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\gamma}^{-1}(Q), \tag{3.3}$$

falls $Q \in \tilde{L} \cap B$ ist. Ist $\varrho^*(R)$ eine konforme Abbildung von $\tilde{\mathfrak{L}}$ in $\mathfrak{L}$, so daß

$$\gamma\, \varrho^*(R) = v(Q) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\gamma}^{-1}(Q) \quad \text{mit} \quad Q \in \tilde{L} \cap B \tag{3.4}$$

gilt, so ist $\gamma\, \varrho(R) = \gamma\, \varrho^*(R)$ für $R \in \tilde{\mathfrak{A}}$. Wegen $\gamma\, \varrho(R) \in \mathfrak{A}$ für $R \in \tilde{\mathfrak{A}}$ gilt

$$\varrho(R) = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} \gamma\, \varrho(R) = \gamma_{\mathfrak{A}}^{-1} \gamma\, \varrho^*(R) = \varrho^*(R) \quad \text{für} \quad R \in \tilde{\mathfrak{A}}. \tag{3.5}$$

Daher ist $\varrho(R) = \varrho^*(R)$ für $R \in \overline{\tilde{\mathfrak{A}}} = \tilde{\mathfrak{L}}$, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

2. Der Punkt $R_0 \in \mathfrak{L} - \varrho(\tilde{\mathfrak{L}})$ sei beliebig gewählt. Dann ist $\Sigma_\varphi(R_0) = \varnothing$ gemäß Satz 3.1. Es ist

$$\gamma\, \varrho(\tilde{\mathfrak{L}}) \supseteqq \gamma\, \varrho\, \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B) = v(\tilde{L} \cap B) \supseteqq L \cap A. \tag{3.6}$$

Daher ist $\gamma(R_0) \in M$. Es gibt eine offene Umgebung $\mathfrak{V}$ von R_0 die durch $\gamma_{\mathfrak{V}} = \gamma | \mathfrak{V}$ konform auf eine komplexe Kurve $V \subsetneqq L$ abgebildet wird, die $P_0 = \gamma(R_0)$ enthält und für die $V \cap M = \overline{V} \cap M = \{P_0\}$ gilt. Angenommen $\Sigma_\tau(P_0, V)$ ist nicht leer. Dann gibt es eine Folge $Q^\nu = \tau(P^\nu)$ mit $P^\nu \in V \cap A$, so daß $P^\nu \to P_0$ und $Q^\nu \to Q_0 \in N \cap \tilde{L}$ für $\nu \to \infty$ streben. Da die nichtgewöhnlichen Punkte von L isoliert liegen, kann man $P^\nu \in \hat{L} \cap A$ also $Q^\nu \in \tau(\hat{L} \cap A) = \tilde{A}$ annehmen. Es sei $\tilde{R}^\nu = \tilde{\gamma}_{\mathfrak{A}}^{-1}(Q^\nu)$ und $R^\nu = \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P^\nu)$. Da $\lim_{\nu \to \infty} \tilde{\gamma}(\tilde{R}^\nu) = Q_0$ ist, gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge, so daß $\tilde{R}^\nu \to \tilde{R}_0 \in \tilde{\mathfrak{V}}$ strebt. Für $\nu \to \infty$ streben $R^\nu = \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P^\nu) \to \gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P_0) = R_0$ und $\varphi(R^\nu) = \tilde{\gamma}_{\mathfrak{A}}^{-1} \tau \gamma_{\mathfrak{A}}(R^\nu) = \tilde{R}^\nu \to \tilde{R}_0 \in \tilde{\mathfrak{V}}$. Also ist $\tilde{R}_0 \in \Sigma_\varphi(R_0)$, was unmöglich ist. Die Streumenge $\Sigma_\tau(\gamma(R_0), V)$ ist leer. Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

3. Ist V eine komplexe Kurve aus G mit $V \subsetneqq L$, ist $\mathfrak{V} \subsetneqq \mathfrak{L}$ die zugehörige offene Menge aus $\mathfrak{L}$, ist $\gamma_{\mathfrak{V}}$ die konforme Beschränkung von γ auf $\mathfrak{V}$ und ist in jedem Punkt $P \in V \cap M$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P, V) \neq \varnothing$, so ist nach Behauptung 2 die offene Menge $\mathfrak{V}$ in $\varrho(\tilde{\mathfrak{V}})$ enthalten. Also wird V durch $\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ konform in $\tilde{\mathfrak{V}}$ abgebildet. Die dritte Behauptung ist bewiesen.

4. Besteht unter den in 3. genannten Voraussetzungen die Menge $M \cap V = M \cap \overline{V}$ nur aus einem einzigen Punkt P_0, so wird V durch $\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ auf eine offene Menge $\tilde{\mathfrak{V}}$ in $\tilde{\mathfrak{L}}$ konform abgebildet. Dabei ist $\tilde{\mathfrak{V}} - \{\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P_0)\} \subsetneqq \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{L} \cap B)$. Es ist $\tilde{\gamma}\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}$ auf V stetig und $\tilde{\gamma}\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(P) = \tau(P)$ für $P \in V - \{P_0\}$. Daher verhält sich die Abbildung $\tau(P)$ längs V in P_0 bestimmt. Es sei $\tau(V, V) = \tilde{V}$. Wegen $\overline{V} - V \subsetneqq A$ ist $\tilde{V} = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}\varrho^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}^{-1}(V) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}(\tilde{\mathfrak{V}})$. Da $\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ die offene Teilmenge $\tilde{\mathfrak{V}} \subsetneqq \tilde{\mathfrak{L}}$ eineindeutig in $\tilde{L}$ abbildet, da es zu jedem Punkt aus $\tilde{\mathfrak{V}}$ eine offene Umgebung gibt, die durch $\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ konform auf eine komplexe Kurve aus H abgebildet wird, da $\overline{V} - \{Q_0\}$ eine komplexe Kurve aus H ist, und da für jede Folge $R^\nu \in \mathfrak{V}$, die in $\mathfrak{V}$ keinen Häufungspunkt hat, die Folge $\tilde{\gamma}(R^\nu)$ wegen $\overline{V} - V \subsetneqq A$ in $\tilde{V}$ keinen Häufungspunkt hat, ist $\tilde{V}$ eine komplexe Kurve aus H, für die $\overline{\tilde{V}} \cap N = \tilde{V} \cap N = \{Q_0\}$ gilt.

Ist P_0 ein gewöhnlicher Punkt von V und streut $v(Q)$ in Q_0 nicht, so ist $v(Q, H)$ in Q_0 gemäß Satz 2.9 analytisch und es gibt eine uniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ mit $P_0 \in U_\alpha$, für die $\alpha^{-1}(U_\alpha \cap V) = \{\mathfrak{z} | \mathfrak{z} = (z_1, 0, \ldots, 0)\} \cap U_\alpha'$ ist. Eine uniformisierende Abbildung $\beta \in \mathfrak{P}(H)$ werde gewählt, wobei $\beta(0) = Q_0 \in U_\beta$ sei. In einer Umgebung des Nullpunktes werden durch

$$\alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}), H) = (f_1(\mathfrak{w}), \ldots, f_n(\mathfrak{w})) \tag{3.7}$$

analytische Funktionen f_ν definiert. In einer Umgebung des Nullpunktes hat $\beta^{-1}(\tilde{V})$ eine analytische Parameterdarstellung $\mathfrak{w}(u)$, wobei $\mathfrak{w}(0) = 0$ sei. Die Abbildung

$$z_1 = f_1(\mathfrak{w}(u)) = \alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}(u)), H) = \alpha^{-1}\gamma_{\mathfrak{V}}\varrho\tilde{\gamma}_{\tilde{\mathfrak{V}}}^{-1}(\mathfrak{w}(u)) \tag{3.8}$$

ist in einer Umgebung des Nullpunktes konform. Also ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{1\mathfrak{w}_\nu}(0)\, w_\nu'(0) = \frac{d}{du} f_1(\mathfrak{w}(u))\Big|_{u=0} \neq 0. \tag{3.9}$$

Daher ist $\mathfrak{w}'(0) \neq 0$ und somit Q_0 ein gewöhnlicher Punkt von $\tilde{V}$, womit die vierte Behauptung bewiesen ist.

5. Es ist

$$\tilde{L} = \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{L}}) = \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{A}}) \cup \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{N}}) = \tilde{\gamma}\,\varrho(\mathfrak{A}) \cup \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{N}}) = \tilde{A} \cup \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{N}}), \tag{3.10}$$

$$\tilde{L} \cap N = N \cap \tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{N}}). \tag{3.11}$$

Da $\mathfrak{M}\binom{\mathfrak{L}, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}, \varphi}{\tilde{\mathfrak{L}}, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{N}}, \psi}$ eine Modifikation ist, besteht $\tilde{\mathfrak{N}}$ und damit auch $\tilde{L} \cap N$ nur aus isolierten Punkten. Da $\tilde{L}$ eine rein zweidimensionale analytische Menge ist, ergibt sich

$$\tilde{L} = \overline{\tilde{\gamma}(\tilde{\mathfrak{A}})} = \overline{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}_{\mathfrak{A}}^{-1}\tau\gamma_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})} = \overline{\tau(\tilde{L} \cap A)} = \overline{\tau(L \cap A)}, \tag{3.12}$$

w. z. b. w.

Nun soll das Verhalten komplexer Kurven bei offenen Modifikationen untersucht werden.

Satz 3.5. Verhalten komplexer Kurven.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei offen. Die komplexe Kurve* L *aus* G *schneide* M *in genau einem Punkt* P_0. *Es sei* $L \cap M = \overline{L} \cap M$. *Die Streumenge* $\Sigma(P_0, L)$ *sei nicht leer. Es gebe eine offene Umgebung* U *von* M *und eine in* $V = \tau(U \cap A) \cup N$ *analytische Menge* $\tilde{L}$, *die rein zweidimensional ist und* $\tau(U \cap A \cap L)$ *umfaßt.*

Behauptung. 1. *Die Abbildung* τ *verhält sich längs* L *in* P_0 *bestimmt, d.h.,* $\Sigma(P_0, L)$ *besteht aus einem einzigen Punkt* Q_0. *Es ist* $L^* = \tau(L, L) = \tau(L \cap A) \cup \{Q_0\}$ *eine komplexe Kurve aus* H, *für die* $\overline{L^*} \cap N = L^* \cap N = \{Q_0\}$ *gilt.*

2. *Ist* P_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* L *und streut die Abbildung* v *in* P_0 *nicht, so ist auch* Q_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* L^*.

Beweis. 1. Da P_0 der einzige Punkt von $\overline{L} \cap M$ ist, gibt es zu jedem Punkt $P \neq P_0$ aus M eine offene Umgebung $U_P \subset U$, die L nicht trifft. Der Punkt P_0 hat eine offene Umgebung $U_{P_0} \subseteqq U$, so daß $U_{P_0} \cap L$ eine analytische Menge aus U_{P_0} ist. Dann ist $U_{P_0} \cap L$ eine rein zweidimensionale analytische Menge aus der offenen Umgebung $U_1 = \bigcup_{P \in M} U_P$ von M. Die Menge $V_1 = \tau(U_1 \cap A) \cup N \subseteqq V$ ist offen und enthält die rein zweidimensionale analytische Menge $V_1 \cap \tilde{L} \supseteqq \tau(U_1 \cap A \cap L)$. Dann gibt es eine minimal gewählte, zweidimensionale analytische Menge $\tilde{L}^*$ aus V_1, die $\tau(U_1 \cap A \cap L)$ umfaßt. Es ist $\underset{n}{\mathfrak{M}}\binom{U_1, A \cap U_1, M, \tau}{V_1, B \cap V_1, N, v}$ eine offene Modifikation. Nach Satz 3.4 wird $U_1 \cap L$ auf eine komplexe Kurve L_1 aus V_1 durch $\tau(P, U_1 \cap L)$ abgebildet. Wegen $\overline{L} - L \subset A$ gilt $\tau(P, U_1 \cap L) = \tau(P, L)$ für $P \in L \cap U_1$ und $L^* = \tau(L, L) = \tau(U_1 \cap L, L) \cup \tau(L \cap A)$. Daher ist L^* eine komplexe Kurve aus H. Es besteht $\Sigma(P_0, U_1 \cap L) = \Sigma(P_0, L)$ aus genau einem Punkt $Q_0 \in L^* \cap N$. Man erhält

$$\begin{cases} \overline{L^*} \cap N = [\overline{\tau(U_1 \cap L, L)} \cap N] \cup [\overline{\tau(L - U_1)} \cap N] \\ \qquad = \overline{\tau(U_1 \cap L, L)} \cap N = \{Q_0\}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Daher ist $\overline{L^*} \cap N = L^* \cap N = \{Q_0\}$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.4.

Bei den bisherigen Sätzen über das Verhalten einer analytischen Menge L der reinen Dimension 2 bzw. einer komplexen Kurve L war immer $\tau(L \cap A)$ in eine zweidimensionale analytische Menge eingebettet. Nun soll etwas über das Verhalten von $\tau(L \cap A)$ ausgesagt werden, wenn man etwas über das Verhalten der Abbildung τ längs L in M weiß.

Satz 3.6. Das Verhalten komplexer Kurven.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die komplexe Kurve* L *aus* G *verhalte sich im Punkt* $P_0 \in L \cap M$ *bestimmt. Es gelte* $L \cap M = \overline{L} \cap M$ *und diese Menge bestehe nur aus dem einzigen Punkt* P_0.

Behauptung. 1. *Durch* $\tau(P, L)$ *wird* L *konform auf die komplexe Kurve* $\tilde{L} = \tau(L, L)$ *aus* H *abgebildet, wobei* $\overline{\tilde{L}} \cap N = \tilde{L} \cap N$ *ist und diese Menge aus dem einzigen Punkt* $Q_0 = \tau(P_0, L)$ *besteht.*

2. *Ist* P_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* L *und streut die Abbildung* v *in* Q_0 *nicht, so ist auch* Q_0 *ein gewöhnlicher Punkt von* $\tilde{L}$.

Beweis. Wie zu Beginn des Beweises zu Satz 3.5 konstruiert man (mit $U = G$) eine offene Umgebung U_1 von M, so daß $U_1 \cap L$ eine analytische Menge aus U_1 ist. Dann ist $\tau(U_1 \cap L \cap A)$ eine analytische Menge in $\tau(U_1 \cap A)$, die nach Satz 2.12 in $V = \tau(U_1 \cap A) \cup N$ regulär ist. Durch $\overline{\tau(U_1 \cap L \cap A)} \cap V$ wird eine analytische Menge der reinen Dimension 2 gegeben, die $\tau(U_1 \cap L \cap A) \cap V$ umfaßt. Die Voraussetzungen und damit auch die Behauptungen von Satz 3.5 sind erfüllt, w. z. b. w.

Zusatz *zu Satz* 3.6.

Ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ *nicht offen, aber* $\overline{L}$ *kompakt, so gilt auch die erste Behauptung von Satz* 3.6.

Beweis. Es ist $L^* = \tau(L \cap A)$ eine komplexe Kurve aus B. Die Mengen $\overline{L} - L$ und $\tau(\overline{L} - L)$ sind kompakt. Also ist $V = H - \tau(\overline{L} - L)$ eine offene Umgebung von N. Da L eine rein zweidimensionale analytische Menge aus $W = G - (\overline{L} - L)$ ist, erhält man mit L^* eine rein zweidimensionale analytische Menge aus $V \cap B$; es ist also $\overline{L^*} \cap V \cap B = L^* \cap V \cap B$. Ist $Q_1 \in \overline{L^*} \cap N$, so strebt eine Folge $Q^\nu = \tau(P^\nu) \to Q_1$ für $\nu \to \infty$, wobei $P^\nu \in L \cap A$ ist. Die Folge P^ν hat einen Häufungspunkt in $\overline{L}$; jeder Häufungspunkt von P^ν gehört zu $\Sigma_v(Q_1, \overline{L^*}) < M$. Daher streben $P^\nu \to P_0$ und $Q^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$, wobei $Q_0 = Q_1$ der einzige Punkt von $\Sigma_\tau(P_0, L)$ ist. Die analytische Menge L^* ist innerhalb V höchstens in Q_0 singulär, also in V regulär. Es ist $\overline{L^*} \cap V = \tilde{L}$ eine rein zweidimensionale analytische Menge aus V mit $\tilde{L} = \tau(L \cap A) \cup \{Q_0\} = \tau(L, L)$. Man erhält

$$Q_0 \in \overline{\tilde{L}} \cap N \subseteqq \overline{L^*} \cap N = \overline{L^*} \cap V \cap N = \tilde{L} \cap N = \{Q_0\}, \tag{3.13}$$

womit sich $\overline{\tilde{L}} \cap N = \tilde{L} \cap N = \{Q_0\}$ ergibt.

Es sei $C \subsetneqq \tilde{L}$ eine komplexe Kurve durch Q_0 mit $C \cap N = \overline{C} \cap N = \{Q_0\}$. Es sei $\overline{C}$ kompakt. Es besteht $\Sigma_v(Q_0, C)$ aus dem einen Punkt P_0. Es wird C durch $v(Q, C)$ eineindeutig auf $\tilde{C} = v(C, C) = v(C) \cup \{P_0\}$ abgebildet. Die Abbildung $v(Q, C)$ ist als Abbildung in die komplexe Mannigfaltigkeit L für $Q \in C$ mit $Q \neq Q_0$ konform und in Q_0 stetig, also ist sie auch in Q_0 konform. Ist also C_1 eine zweite solche komplexe Kurve durch Q_0, so stimmen $v(C_1, C_1)$ und $\tilde{C}$, also auch C_1 und C, in einer Umgebung von P_0 bzw. Q_0 überein. Daher ist $\tilde{L}$ eine komplexe Kurve aus H, w. z. b. w.

Die Bedingung $L \cap M = \overline{L} \cap M$ kann in den beiden vorhergehenden Sätzen nicht wegbleiben. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Es sei G der vierdimensionale komplexprojektive Raum mit den homogenen Koordinaten $z_0 : z_1 : z_2$ und H der vierdimensionale komplexprojektive Raum mit den homogenen Koordinaten $w_0 : w_1 : w_2$. Ferner seien

$$A = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_0 z_1 z_2 \neq 0\}, \qquad M = G - A, \tag{3.14}$$

$$B = \{(w_0 : w_1 : w_2) \mid w_0 w_1 w_2 \neq 0\}, \quad N = H - B, \tag{3.15}$$

$$\tau(z_0 : z_1 : z_2) = (z_0 z_1 : z_1 z_2 : z_2 z_0), \tag{3.16}$$

$$v(w_0 : w_1 : w_2) = (w_0 w_2 : w_0 w_1 : w_1 w_2). \tag{3.17}$$

Es ist $\mathfrak{M}_2^{\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}}$ eine offene Modifikation. Die komplexe Kurve L sei die Punktmenge, für die

$$\begin{cases} z_2 z_0 = z_1^2 - 3 z_1 z_0 + 2 z_0^2 = (z_1 - 2 z_0)(z_1 - z_0), \\ |z_2| < \frac{1}{2}|z_0|, \quad \frac{1}{2}|z_0| < |z_1| < \frac{5}{2}|z_0|, \quad (z_0 : z_1 : z_2) \neq (1 : 1 : 0) \end{cases} \tag{3.18}$$

gilt. Sie schneidet M nur im Punkt $P_0 = (1 : 2 : 0)$, aber es ist $L \cap M \neq \overline{L} \cap M$, wie man sofort sieht. Die komplexe Kurve L ist zusammenhängend. Die Abbildung τ verhält sich längs L in P_0 bestimmt und $\tau(L \cap A)$ liegt in der rein zweidimensionalen analytischen Menge

$$L_0 = \{(w_0 : w_1 : w_2) \mid w_1 w_2^2 = w_0 w_1^2 - 3 w_0 w_1 w_2 + 2 w_2^2 w_0\}. \tag{3.19}$$

Die Streumenge $\Sigma_\tau(P_0, L)$ besteht aus dem einzigen Punkt $Q_0 = (1 : 0 : 0)$. Setzt man

$$V = [\{(w_0, w_1 : w_2) \mid |w_1| < \tfrac{1}{2}|w_0|, \ \tfrac{1}{2}|w_2| < |w_1| < \tfrac{5}{2}|w_2|\} \cup \{(1 : 0 : 0)\}], \tag{3.20}$$

so ist $\tilde{L} = \tau(L, L) = V \cap L_0$ und es wird $\tilde{L}$ in einer Umgebung U des Nullpunktes durch $L_0 \cap U$ gegeben. Also ist $\tilde{L}$ keine komplexe Kurve aus H; denn $\tilde{L} = \tau(L, L)$ hat im Punkt Q_0 einen Doppelpunkt.

Literatur.

[0] Alexandroff, P.: Über die Struktur der bikompakten topologischen Räumen. Math. Ann. **92**, 267—274 (1923). — [1] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). —

[2] CALABI, E., u. M. ROSENLICHT: Complex analytic manifolds without countable base. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 335—340 (1952). — [3] CARTAN, H.: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **61**, 149—197 (1944). Appendice II. — [4] CARTAN, H.: Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. **125**, 49—50 (1952). — [5] HERMES, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen. Math. Ann. **120**, 539—562 (1947). — [6] HIRZEBRUCH, F.: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **124**, 77—86 (1951). — [7] HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126**, 1—22 (1953). — [8] HIRZEBRUCH, F.: Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. J. f. Math. **191**, 110—124 (1953). — [9] HOPF, H.: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. appl., Ser. V **10**, 169—182 (1951). (Vortrag Rom 1950.) — [9a] HOPF, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in den Comm. Math. Helv. — [10] KNESER, H.: Analytische Mannigfaltigkeiten im komplexen projektiven Raum. Math. Nachr. **4**, 382—391 (1950). — [11] KNESER, H.: Abzählbarkeit und analytische Struktur bei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in den Math. Ann. — [12] RADÓ, T.: Über eine nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. **20**, 1—6 (1924). — [13] RADÓ, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Szeged **2**, 101—121 (1925). — [14] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [15] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. Math. Ann. **126**, 221—238 (1953). — [16] STOLL, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **57**, 116—154 (1952). — [17] STOLL, W.: Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. I. Acta mathematica **90**, 1—115 (1953). — [18] STOLL, W.: Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit analytischer Mengen. Math. Z. **60**, 287—304 (1954). — [19] THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **111**, 137—157 (1934). — [20] ZARISKI, O.: Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties. Ann. of Math. **45**, 472—542 (1954). § 24.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 9. August 1954.)

LAUGWITZ, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 235—244 (1954)

Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume.

Von
DETLEF LAUGWITZ.

In einem reellen Vektorraum beliebiger (auch unendlicher) Dimension ist mit einem zum Nullpunkt symmetrischen konvexen Körper K eine MINKOWSKIsche Metrik oder Norm $||\ ||$ gegeben. Diese ist ein reellwertiges Funktional, welches für alle Vektoren $x, y, \ldots$ des Raumes definiert ist und folgende Eigenschaften hat:

$||x|| > 0$ für $x \neq 0$, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, $||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||$ für reelles a.

K ist mit der Menge $||x|| \leq 1$ identisch; die Punktmenge $||x|| = 1$, den Rand von K, nennen wir die Indikatrix oder Eichfläche des MINKOWSKIschen oder normierten Raumes[1]).

Hier sollen einige Beziehungen zwischen der Längenmessung in normierten Räumen und der Geometrie der konvexen Mittelpunktsbereiche untersucht werden. Im ersten Abschnitt werden wir den zweidimensionalen Fall behandeln. Es wird das Analogon der Zahl π, das Verhältnis von MINKOWSKIschem Umfang und Durchmesser der Indikatrix, abgeschätzt werden. Eine mit dem MINKOWSKIschen Krümmungsverhalten der Indikatrix zusammenhängende Kennzeichnung der Ellipsen sowie einer von RADON untersuchten Kurvenklasse wird angegeben werden. In Abschnitt 2 soll ein Beitrag zur Verallgemeinerung der FENCHELschen Abschätzung der Gesamtkrümmung geschlossener Raumkurven gegeben werden. Im dritten Abschnitt folgen Kennzeichnungen der Ellipsoide und der euklidischen Räume beliebiger Dimension. Dabei werden wir eine allgemeinere als die MINKOWSKIsche Metrik zugrunde legen, in der an die Stelle von K ein „Sternbereich" S tritt, d.h. eine Punktmenge, die den Nullpunkt enthält und mit jeder Geraden durch den Nullpunkt ein abgeschlossenes, den Nullpunkt im Innern enthaltendes Intervall als Durchschnitt hat. Dazu gehört eine Metrik $F(x)$ mit $F(x) > 0$ für $x \neq 0$ und $F(a \cdot x) = a \cdot F(x)$ für $a > 0$.

Diese Maßbestimmungen sind von Interesse für die Differentialgeometrie. Da die Meßvorschrift in diesen Räumen offenbar affininvariant ist, sind dies nämlich in gewissem Sinne die allgemeinsten metrischen Räume, die als Tangentialräume einer metrischen differenzierbaren Mannigfaltigkeit auftreten können.

1. Die Indikatrix in der MINKOWSKIschen Ebene.

In einer MINKOWSKIschen Ebene kann man jedem konvexen Kurvenbogen eine Länge zuschreiben, die auch ∞ sein darf. Ein solcher Bogen ist ja nur

[1]) Vgl. dazu [3, Abschn. 14] und [9, Satz 1] des Literaturverzeichnisses.

an höchstens abzählbar vielen Stellen nicht differenzierbar, und man kann daher seine Länge durch das LEBESGUEsche Integral über $||d\mathfrak{x}||$ definieren[2]). (In endlichdimensionalen Vektorräumen bezeichnen wir Vektoren durch deutsche Buchstaben.) Insbesondere kann man daher nach dem Umfang der Indikatrix $\mathfrak{E}$ selbst fragen und das Analogon der Zahl π in der euklidischen Geometrie berechnen:

$$\Pi_{\mathfrak{E}} = \Pi = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}\oint ||d\mathfrak{x}||\,.$$

Wir wollen hier Schranken für Π angeben und werden $\mathfrak{E}$ dabei keinen Einschränkungen unterwerfen.

Zunächst nehmen wir für $\mathfrak{E}$ gewisse Sechsecke. In der Ebene denken wir uns ein lineares Koordinatensystem eingeführt. $\mathfrak{E}$ soll dann das Sechseck mit den folgenden Ecken sein:

$$\pm(1,1), \quad \pm(1,0), \quad \pm(\eta,-1) \quad \text{mit einem festen } \eta \quad (0 \leq \eta \leq 1).$$

Dann gilt $\Pi = 3 + \eta$.

Es treten also für Π alle Werte zwischen 3 und 4 einschließlich der Grenzen auf. Übrigens erkennt man für $\eta = \pi - 3$, daß $\Pi = \pi$ nicht kennzeichnend ist für die euklidische Geometrie, in der $\mathfrak{E}$ eine Ellipse ist.

Wir werden nun beweisen, daß 3 und 4 die wirklichen Grenzen für Π sind, so daß wir haben:

Satz 1.1. *Für das Verhältnis Π von Umfang zu Durchmesser der Indikatrix einer* MINKOWSKIschen *Ebene gilt*

$$3 \leq \Pi \leq 4;$$

alle von dieser Ungleichung zugelassenen Werte treten in geeigneten MINKOWSKIschen *Ebenen wirklich auf.*

Wir wollen zunächst die Abschätzung nach unten beweisen. Dazu benötigen wir eine elementargeometrische Eigenschaft konvexer Kurven mit Mittelpunkt. Wir gehen von einem beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ mit $||\mathfrak{a}|| = 1$ aus und lassen einen zweiten, variablen Vektor $\mathfrak{v}$ mit $||\mathfrak{v}|| = 1$ etwa im positiven Sinne von $\mathfrak{a}$ bis $-\mathfrak{a}$ laufen. Dabei betrachten wir die Funktion $||\mathfrak{v} - \mathfrak{a}||$, welche stetig von $\mathfrak{v}$ abhängt, da $||\mathfrak{v}||$ eine stetige Funktion von $\mathfrak{v}$ ist. Diese Funktion $||\mathfrak{v} - \mathfrak{a}||$ hat für $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}$ den Wert 0, für $\mathfrak{v} = -\mathfrak{a}$ den Wert 2. Für einen Vektor $\mathfrak{b}$ mit $||\mathfrak{b}|| = 1$ gilt also, daß auch $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ auf der Indikatrix liegt. Die sechs Vektoren $\pm\mathfrak{a}$, $\pm\mathfrak{b}$, $\pm\mathfrak{c}$ spannen mithin ein der Indikatrix einbeschriebenes, affin-reguläres Sechseck auf, dessen Seiten je die MINKOWSKIsche Länge 1 haben. Da in einer MINKOWSKIschen Geometrie wegen des Bestehens der Dreiecksungleichung keine Verbindungslinie zweier Punkte kürzer ist als die geradlinige, haben die zugehörigen Bögen der Indikatrix jeweils mindestens die Länge 1, und daraus folgt $2\Pi \geq 6$.

Die verwendete Eigenschaft konvexer Kurven mit Mittelpunkt besagt, daß man bei diesen Kurven wie beim Kreis 3 Paare von Diametralpunkten

[2]) Der Kurvenbogen wird dabei stückweise auf eine Koordinate eines affinen Koordinatensystems bezogen; das Ergebnis ist unabhängig von der speziellen Wahl des Koordinatensystems.

auf dem Rande finden kann, so daß die aus der ursprünglichen durch Parallelverschiebung hervorgegangenen Kurven, welche diese Punkte als Mittelpunkte haben, die ursprüngliche Kurve jeweils in den benachbarten Punkten der anderen Paare treffen[3]). — Diese Eigenschaft hätte man übrigens auch leicht durch Parallelverschiebung der konvexen Kurve beweisen können, man hätte dann aber Ausnahmefälle, z. B. bei Vierecken, diskutieren müssen.

Zum Beweise der Abschätzung nach oben setzen wir zunächst voraus, daß $\mathfrak{E}$ ein Paar konjugierter Durchmesser besitzt. Zwei Durchmesser von $\mathfrak{E}$ werden konjugiert genannt, wenn jeder von ihnen in seinen Endpunkten zum anderen parallele Stütztangenten von $\mathfrak{E}$ hat[4]).

Es seien nun $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ zwei Radiusvektoren in Richtungen konjugierter Durchmesser; jeder Vektor $\mathfrak{x}$ ist dann darstellbar in der Form $\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{e}_1 + x_2\mathfrak{e}_2$. Dann gilt

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\oint \|d\mathfrak{x}\| = \tfrac{1}{2}\oint \|\mathfrak{e}_1\, dx_1 + \mathfrak{e}_2\, dx_2\| \leq \int_{-1}^{+1} \|\mathfrak{e}_1\|\, dx_1 + \int_{-1}^{+1} \|\mathfrak{e}_2\|\, dx_2 = 4,$$

und damit ist die Abschätzung nach oben bewiesen.

Wenn man ganz im Rahmen der MINKOWSKIschen Geometrie bleiben will, kann man diesen Beweis unter Beachtung der Tatsache führen, daß die in den Endpunkten der konjugierten Durchmesser der Indikatrix ein- bzw. umbeschriebenen Parallelogramme P_i bzw. P_a selbst wieder MINKOWSKIsche Metriken definieren. (P_a wird von den betrachteten, zu den Durchmessern parallelen Stützgeraden gebildet.) Dann gilt:

Umfang von $\mathfrak{E}$, gemessen bezüglich $\mathfrak{E}$

$$\leq \text{Umfang von } \mathfrak{E}, \text{ gemessen bezüglich } P_i$$
$$= \text{Umfang von } P_a, \text{ gemessen bezüglich } P_i$$
$$= 8,$$

und dies ist die Behauptung.

Wir müssen nun noch die Existenz konjugierter Durchmesser für beliebige konvexe Kurven $\mathfrak{E}$ mit Mittelpunkt beweisen. Dazu bedienen wir uns einer von J. RADON [*10*] angegebenen analytischen Darstellung für die Stützelemente konvexer, geschlossener Kurven, die wir für unsere Zwecke modifizieren. Wir führen Polarkoordinaten r, φ um den Mittelpunkt von $\mathfrak{E}$ ein und bezeichnen mit ϑ den Winkel, durch den man den Radiusvektor im positiven Sinne drehen muß, damit er der betrachteten Stützgeraden in (r, φ) parallel wird. Dann ist $u = 2\varphi + \vartheta$ ein Parameter, der die Stützelemente von $\mathfrak{E}$ modulo 4π eindeutig beschreibt. Offenbar gilt

(1) $\qquad \vartheta(u + 4\pi) = \vartheta(u), \quad 0 < \vartheta(u) < \pi, \quad \vartheta(u)$ stetig.

[3]) Eins der Paare kann dabei willkürlich vorgegeben werden.

[4]) Konjugierte Durchmesser bei konvexen Kurven wurden — ohne Erwähnung dieses Namens — erstmals von J. RADON [*10*] behandelt. P. FUNK beweist im Zusammenhang mit einer affingeometrischen Schließungsaufgabe in [*5*] die Existenz eines Paares konjugierter Durchmesser für zweimal differenzierbare Mittelpunktseilinien; er beweist nicht, wie in [*6*] irrtümlich angegeben, die Existenz zweier solcher Paare.

Aus der Geschlossenheit der Kurve schließt RADON:

$$(2)\qquad \int_0^{4\pi} \operatorname{cotg} \vartheta(u)\, du = 0.$$

Für Kurven $\mathfrak{E}$ mit Mittelpunkt entnehmen wir daraus sofort

$$(1')\qquad \vartheta(u+2\pi) = \vartheta(u), \quad 0 < \vartheta(u) < \pi, \ \vartheta(u) \text{ stetig},$$

$$(2')\qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \vartheta(u)\, du = 0.$$

Gehört u^* zum Stützelement eines Durchmessers, der zu einem Paar konjugierter Durchmesser gehört, so ist $u^* + \pi$ der Parameterwert des konjugierten Stützelementes, und es gilt

$$\vartheta(u^* + \pi) + \vartheta(u^*) = \pi;$$

diese Beziehung ist charakteristisch für konjugierte Durchmesser. — Wir betrachten nun die Funktion $\tau(u) = \operatorname{cotg} \vartheta(u) + \operatorname{cbtg} \vartheta(u+\pi)$, welche wegen (1') stetig ist und die Periode π hat; daraus und aus (2') ergibt sich

$$\int_0^{\pi} \tau(u)\, du = 0.$$

Also gibt es mindestens zwei Werte u_1^*, u_2^* mit $0 \leq u_j^* < \pi$ und $\tau(u_j^*) = 0$ $(j = 1, 2)$. Es ist also

$$\sin\{\vartheta(u_j^* + \pi) + \vartheta(u_j^*)\} = 0.$$

Wegen $0 < \vartheta(u_j^* + \pi) + \vartheta(u_j^*) < 2\pi$ folgt daraus die für konjugierte Durchmesser charakteristische Beziehung für u_j^*. Da u_1^* und u_2^* sich um weniger als π unterscheiden, gehören sie zu verschiedenen Paaren konjugierter Durchmesser. Damit haben wir ohne Differenzierbarkeitsannahmen bewiesen:

Satz 1.2. *Jede konvexe Kurve mit Mittelpunkt besitzt mindestens zwei Paare konjugierter Durchmesser.*

R. INZINGER [6] hat eine Klasse von Kurven angegeben, welche genau zwei Paare konjugierter Durchmesser besitzen.

Von nun an wollen wir voraussetzen, daß die Indikatrix eine zweite Ableitung $\mathfrak{x}''(s)$ nach der MINKOWSKISCHEN Bogenlänge $s = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\mathfrak{x}}{dt} \right\| dt$ besitzt. Dieser Vektor $\mathfrak{x}''(s)$ läßt sich geometrisch als der MINKOWSKISCHE Krümmungsvektor der Indikatrix auffassen. Da $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{x}'(s)$ linear unabhängig sind, gilt

$$\mathfrak{x}''(s) = -\varkappa_r(s)\, \mathfrak{x}(s) + \varkappa_t(s)\, \mathfrak{x}'(s).$$

Wir wollen $\varkappa_r$ bzw. $\varkappa_t$ als Radial- bzw. Tangentialkrümmung der Indikatrix auffassen.

RADON [*10*] hat diejenigen Kurven bestimmt, die zu jedem Durchmesser einen konjugierten besitzen. Für diese Kurven können wir jetzt eine Kennzeichnung in der MINKOWSKIschen Geometrie angeben:

Satz 1.3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine zweimal differenzierbare ebene Indikatrix eine* RADONsche *Kurve ist, ist* $\varkappa_l(s) = \text{const}$; *die Konstante hat notwendig den Wert* 0.

Zunächst sieht man, daß für eine RADONsche Kurve als Indikatrix tatsächlich $\varkappa_l(s) = 0$ ist. Denn $\mathfrak{x}'$ beschreibt wegen $\|\mathfrak{x}'\| = 1$ gerade den zu $\mathfrak{x}$ konjugierten Halbmesser, und dessen Tangentenrichtung $\mathfrak{x}''$ ist parallel zu $\mathfrak{x}$.

Sei nun umgekehrt $\varkappa_l(s) = \text{const}$. Dann folgt aus der Existenz konjugierter Durchmesser (Satz 1.2), daß die Konstante jedenfalls den Wert 0 haben muß, und daraus ergibt sich wegen

$$\mathfrak{x}'' = -\varkappa_r(s)\,\mathfrak{x},$$

daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ konjugierte Durchmesser sind; es gibt also zu jedem Durchmesser einen konjugierten. Damit ist Satz 1.3 bewiesen.

Jetzt fragen wir nach denjenigen unter den RADONschen Kurven, die die Eigenschaft haben, daß für sie in der durch sie metrisierten Ebene gilt $\varkappa_l = \text{const}$, $\varkappa_r = \text{const}$. Aus dem bereits Bewiesenen wissen wir $\varkappa_l = 0$. Dann ist also

$$\mathfrak{x}''(s) + \lambda\,\mathfrak{x}(s) = 0 \qquad (\lambda = \text{const}),$$

also

$$\mathfrak{x}(s) = \begin{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\,s\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\,s + \gamma\right) \end{Bmatrix}$$

(bis auf einen konstanten Faktor und eine Parameterverschiebung; λ ist notwendig positiv, da die Indikatrix beschränkt ist). Da für ein $\bar{s}$

$$\mathfrak{x}'(s) = \mathfrak{x}(\bar{s}) \quad \text{wegen} \quad \|\mathfrak{x}'\| = 1 \quad \text{gilt},$$

hat man

$$\mathfrak{x}' = -\sqrt{\lambda}\begin{Bmatrix} \sin\left(\sqrt{\lambda}\,s\right) \\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\,s + \gamma\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\bar{s}\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\bar{s} + \gamma\right) \end{Bmatrix}.$$

Daraus schließen wir $\lambda = 1$. Wäre nämlich $\lambda < 1$, so könnten wir — da $\bar{s}$ stetig von s abhängt und mit s die ganze Indikatrix durchläuft — $\bar{s}$ so wählen, daß $\cos\sqrt{\lambda}\,\bar{s} = 1$ ist; dies ergibt aber einen Widerspruch, da $-\sqrt{\lambda}\cdot\sin\sqrt{\lambda}\,s$ absolut genommen kleiner als 1 sein müßte. Den Fall $\lambda > 1$ schließt man entsprechend aus. Also ist

$$\mathfrak{x}(s) = \begin{Bmatrix} \cos s \\ \cos\left(s + \gamma\right) \end{Bmatrix}.$$

$\gamma \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ergibt sich daraus, daß der Nullpunkt nicht auf der Indikatrix liegen soll. Dann ist die Indikatrix aber eine Ellipse und die Geometrie euklidisch.

Satz 1.4. *Die euklidischen Ebenen sind unter den* MINKOWSKI*schen dadurch gekennzeichnet, daß für die Indikatrix gilt* $\varkappa_l(s) = \text{const}$, $\varkappa_r(s) = \text{const}$. *Dabei ist notwendig* $\varkappa_l = 0$, $\varkappa_r = 1$.

Zugleich haben wir damit auch eine Kennzeichnung der Ellipsen unter den RADONschen Kurven; eine andere Kennzeichnung hat P. FUNK [5] angegeben.

Für die Krümmung beliebiger geschlossener Kurven gilt:

Satz 1.5. *Die Gesamtkrümmung* $\oint \|d\mathfrak{x}'\|$ *einer zweimal differenzierbaren geschlossenen Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *in einer* MINKOWSKI*schen Ebene ist mindestens* 2Π, *und gleich* 2Π *genau wenn die Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *konvex ist (s bezeichnet die* MINKOWSKI*sche Bogenlänge).*

Der Beweis ergibt sich aus der Bedeutung von Π, da das Tangentenbild der Kurve die Indikatrix mindestens einmal überdeckt.

2. Gesamtkrümmung geschlossener Raumkurven.

In Satz 1.5 wurde die untere Grenze für die Totalkrümmung ebener geschlossener Kurven angegeben. Für den euklidischen Raum hat FENCHEL [4] bewiesen, daß $\oint \|d\mathfrak{x}'\|$ mindestens 2π ist. Hier soll die gleiche Frage für einen beliebigen dreidimensionalen MINKOWSKI-Raum behandelt werden; die genaue untere Grenze

$$K = \inf \oint \|d\mathfrak{x}'\|$$

für geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Kurven $\mathfrak{x}(s)$ kann der Verfasser nicht angeben.

Satz 2.1. *Es gilt*

$$4 \leq K \leq \inf \Pi_{\mathfrak{E}} \leq 8,$$

wobei $\inf \Pi_{\mathfrak{E}}$ *die untere Grenze der Werte* Π *für die ebenen Mittelpunktsschnitte* $\mathfrak{E}$ *der Indikatrix bezeichnet.*

Die Abschätzung nach oben ist dabei unmittelbar klar (Satz 1.5). Die Abschätzung nach unten beruht auf folgendem Lemma:

Lemma. *Ein der Indikatrix einer* MINKOWSKI*schen Ebene einbeschriebenes Dreieck, welches den Nullpunkt im Innern oder auf dem Rande enthält, hat mindestens den Umfang* 4.

Beweis. Wenn das Dreieck den Nullpunkt auf dem Rande enthält, sind wir sofort fertig; denn dann ist eine Seite ein Durchmesser, also von der Länge 2, und die Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist dann wegen der Dreiecksungleichung mindestens 2.

Wenn das Dreieck Δ den Nullpunkt jedoch im Innern enthält, dann erzeugen wir durch Spiegelung von Δ am Nullpunkt ein neues Dreieck Δ'. Die aus Δ und Δ' bestehende Figur kann man sich dann zerfallen denken in ein Parallelogramm P und ein Sechseck S mit paarweise parallelen Seiten. O liegt im Innern sowohl von P als auch von S, und von P liegt ein diametrales Eckenpaar auf der Indikatrix, von S sogar zwei. Daraus ergibt sich aber, daß S und P je mindestens den Umfang 4 haben, wenn man die innerhalb von S

bzw. P verlaufenden Durchmesser benützt und die Dreiecksungleichung anwendet. Da der Umfang von Δ gleich dem arithmetischen Mittel der Umfänge von S und P ist, haben wir damit das Lemma bewiesen.

Zum Beweise von Satz 2.1 ziehen wir einen Satz von FENCHEL [4] heran: Im euklidischen Raume gilt, daß es zum Tangentenbild $\mathfrak{T}$ einer geschlossenen, stetig differenzierbaren Raumkurve mindestens einen Großkreis gibt, der von $\mathfrak{T}$ in zwei Diametralpunkten oder aber in drei Punkten getroffen wird, die den Kugelmittelpunkt im Innern des von ihnen aufgespannten Dreiecks enthalten. Projiziert man $\mathfrak{T}$ von 0 aus auf die Indikatrix des MINKOWSKIschen Raumes, so kann man diesen Satz sofort in die MINKOWSKIsche Geometrie übernehmen, wenn man statt „Großkreis" setzt: ebener Mittelpunktsschnitt der Indikatrix.

Dann folgt aber mit Hilfe des bewiesenen Lemmas aus der Extremaleigenschaft der geraden Linien sofort die Behauptung

$$\oint \|d\mathfrak{x}'\| \geq 4.$$

Es spricht vieles für $K \geq 6$ und manches für $K = \inf \Pi_{\mathfrak{C}}$. Der Beweis wird von den bekannten Beweisen des FENCHELschen Satzes im euklidischen Fall wesentlich abweichen müssen, da die Extremaleigenschaft der Großkreise hier fortfällt.

3. Kennzeichnungen euklidischer Räume beliebiger Dimension.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit reellen linearen Räumen L beliebiger Dimension, in denen eine Metrik $F(x)$ mit den in der Einleitung angegebenen Eigenschaften definiert ist. Ein solcher Raum heißt euklidisch, wenn die Metrik die Form hat $F(x) = (x, x)^{\frac{1}{2}}$, wobei (x, y) ein skalares Produkt ist, d.h. eine Bilinearform mit positiv-definitem (x, x). Die Hyperflächen $(x, x) = \text{const}$ heißen Ellipsoide. Die Auszeichnungen der euklidischen Räume unter den metrischen linearen Räumen laufen also parallel den Auszeichnungen der Ellipsoide unter den Sternbereichen.

Man bemerkt sofort, *daß ein metrischer linearer Raum genau dann euklidisch ist, wenn jeder dreidimensionale lineare Unterraum durch den Nullpunkt euklidisch ist;* denn in den Axiomen für das Skalarprodukt treten jeweils höchstens drei Vektoren auf.

Ein besonders schönes Beispiel für den Zusammenhang der Auszeichnungen der euklidischen Räume und der Ellipsoide ist der Projektionssatz von KAKUTANI [8]: Ein normierter Raum ist genau dann euklidisch, wenn es in ihm auf jeden zweidimensionalen Unterraum eine Projektion vom Betrage 1 gibt. Dieser Satz ist äquivalent mit dem Satz von BLASCHKE [1, 157]: Jeder konvexe Körper, der von allen Stützzylindern längs ebener Kurven berührt wird, ist ein Ellipsoid.

JORDAN und v. NEUMANN [7] haben mit Hilfe ihrer bekannten Bedingung $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}$ für Normen, die aus einem Skalarprodukt hervorgehen, geschlossen, daß ein normierter Raum genau dann euklidisch ist, wenn jeder zweidimensionale Unterraum (durch den Nullpunkt)

euklidisch ist. Wir wollen hier einen geometrischen Beweis für diesen Satz geben, wobei wir sogar allgemein metrische Räume zulassen.

Satz 3.1. *Ein metrischer Raum (Dimension ≥ 2) ist genau dann euklidisch, wenn jeder zweidimensionale lineare Unterraum euklidisch ist.*

Beweis. In einem euklidischen Raum ist offenbar jeder zweidimensionale lineare Unterraum euklidisch. Es muß also noch gezeigt werden: Wenn jeder zweidimensionale lineare Unterraum euklidisch ist, dann ist der Raum selbst euklidisch.

Dabei genügt es nach dem oben Bemerkten, dies für dreidimensionale metrische Räume zu beweisen.

Zunächst muß die Indikatrix streng konvex und symmetrisch zum Nullpunkt sein. Denn sind x, y zwei Punkte der Indikatrix, so betrachten wir die von den Vektoren x, y aufgespannte Ebene. In dieser ist die zweidimensionale Indikatrix nach Voraussetzung eine Ellipse; die Verbindungslinie von x, y liegt also im Innern der Indikatrix. Daraus folgt die strenge Konvexheit. Die Symmetrie zum Nullpunkt ergibt sich aus der Symmetrie der Ellipse. — Der metrische Raum ist also ein normierter Raum.

Nun betrachten wir irgendeine Ebene E durch den Nullpunkt und einen Punkt u der Indikatrix mit zu E paralleler Stützebene.

Durch die Ellipse $F(h) = 1$ in der Ebene E und die Punkte $\pm u$ ist durch die Bedingung, daß die Stützebene in u parallel zu E sein soll, eindeutig ein Ellipsoid mit Mittelpunkt 0 bestimmt. Wir werden fertig sein, wenn wir gezeigt haben, daß dieses Ellipsoid mit der Indikatrix $F(x) = 1$ zusammenfällt.

Das folgt aber so: Durch ihren Mittelpunkt und zwei konjugierte Durchmesser ist eine Ellipse völlig bestimmt. Nun schneiden wir das Ellipsoid und die Indikatrix mit einer Ebene durch u und h ($h \in E$) und erhalten als Schnittfigur in beiden Fällen Ellipsen mit Mittelpunkt 0 und u, $\frac{h}{F(h)}$ als Vektoren eines konjugierten Durchmesserpaares, da in beiden Fällen die Tangente in u parallel zu h sein muß. Also fallen die beiden Ellipsen zusammen. Da dies für alle $h \in E$ gilt, fallen die Indikatrix und das betrachtete Ellipsoid tatsächlich zusammen.

Die entsprechende affingeometrische Kennzeichnung der Ellipsoide lautet: Ein Sternbereich ist genau dann ein Ellipsoid, wenn alle Ebenen durch 0 mit dem Bereich Ellipsen vom Mittelpunkt 0 gemeinsam haben.

(Über die Stetigkeit der Begrenzung des Bereichs braucht dabei nichts vorausgesetzt zu werden.)

Eine Richtung in einem linearen Raum ist gegeben durch einen Halbstrahl $a \cdot x$, $x \neq 0$, $a \geq 0$. Als geometrische Eigenschaft in einem linearen metrischen Raume wird jede Eigenschaft bezeichnet, die nur affine und metrische Aussagen (im Sinne der F-Metrik) involviert. Wir können dann sagen: Zwei Richtungen heißen geometrisch gleichberechtigt, wenn in der durch sie aufgespannten Ebene jede gegenüber der zentrisch-affinen Gruppe invariante Eigenschaft der Indikatrix $F(x) = 1$ in der einen Richtung ihr auch in der anderen Richtung zukommt.

Satz 3.2. *Ein metrischer Raum, in dem $F(x)$ in jedem zweidimensionalen Unterraum stetig ist, ist genau dann euklidisch, wenn alle Richtungen geometrisch gleichberechtigt sind.*

Beweis. Nach Satz 3.1 kann man sich auf die Betrachtung metrischer Ebenen beschränken. Für diese ist zunächst klar, daß die geometrische Gleichberechtigung aller Richtungen notwendig ist für die Euklidizität. Denn in der euklidischen Ebene führt die orthogonale Gruppe eine beliebige Richtung in eine beliebige andere unter Erhaltung aller affinen und metrischen Eigenschaften über.

Wir haben jetzt zu zeigen, daß die Isotropie der Ebene hinreichend ist für die Euklidizität. Da F in der betrachteten Ebene stetig ist, folgt zunächst die Symmetrie der Indikatrix. Denn wäre $F(\overset{\circ}{x}) \neq F(-\overset{\circ}{x})$, so könnten wir etwa annehmen

$$1 = F(\overset{\circ}{x}) > F(-\overset{\circ}{x}).$$

Läßt man den Punkt y von $\overset{\circ}{x}$ bis $\overset{1}{x} = \dfrac{-\overset{\circ}{x}}{F(-\overset{\circ}{x})}$ stetig auf der Indikatrix wandern, so gilt wegen

$$1 = F(\overset{1}{x}) = \frac{F(-\overset{\circ}{x})}{F(-\overset{\circ}{x})} < \frac{F(\overset{\circ}{x})}{F(-\overset{\circ}{x})} = F(-\overset{1}{x}),$$

daß dazwischen einmal sein muß:

$$F(\tilde{x}) = F(-\tilde{x}) = 1.$$

Dies ist aber eine geometrische Eigenschaft, die also nach Voraussetzung allen Richtungen zukommen muß.

Im nächsten Beweisschritt zeigen wir, daß die Indikatrix konvex ist. Wegen der Stetigkeit ist sie jedenfalls eine beschränkte Punktmenge, und wir können daher eine Gerade finden, die die Indikatrix nicht trifft. Diese geht also auch nicht durch den Nullpunkt, und wir können sie solange auf den Nullpunkt zu parallel verschieben, bis sie die Indikatrix erstmals trifft. Ein Punkt z, den die Gerade in dieser Lage mit der Indikatrix gemein hat, definiert dann eine Richtung $0z$ mit der geometrischen Eigenschaft, daß die Indikatrix in dieser Richtung eine Stützgerade besitzt, d. h. eine solche Gerade durch z, daß eine der entstandenen Halbebenen keinen Punkt der Indikatrix enthält. Nach der Isotropievoraussetzung gilt dies dann aber für alle Richtungen, und daraus ergibt sich die Konvexheit der Indikatrix. Der Raum ist also normiert.

Die Indikatrix ist zweimal differenzierbar. Denn die MINKOWSKIsche Bogenlänge s ist ein monotoner Parameter für die konvexe Kurve, und die Komponenten des Vektors $x(s)$ sind daher stückweise monotone Funktionen von s. Nach LEBESGUE existiert $x'(s) = \dfrac{dx}{ds}$ fast überall, also nach der Isotropievoraussetzung überall. Da s die Bogenlänge ist, gilt $F(x') = 1$, d. h. $x'(s)$ beschreibt ebenfalls die Indikatrix, also eine konvexe Kurve. Nach der gleichen Argumentation wie eben existiert dann auch $x''(s)$. [Da im allgemeinen $F(x'')$ nicht konstant ist, können wir dieses Verfahren nicht fortsetzen.]

Nun können wir Satz 1.4 anwenden; die Radialkrümmung und die Tangentialkrümmung der Indikatrix sind ja Invarianten, müssen also nach der Isotropievoraussetzung Konstanten sein. Daraus folgt aber die Euklidizität der Ebene nach Satz 1.4.

Anstatt beim Beweis auf Satz 1.4 zurückzugreifen, hätten wir bei großzügigeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen auch bekannte Sätze der Affingeometrie heranziehen können. Nach BLASCHKE [2, 47] gilt: Bei einer Eilinie mit Mittelpunkt gibt es immer mindestens 4 Geraden durch den Mittelpunkt, welche (doppelte) Affinnormalen der Eilinie sind. Nach der Isotropievoraussetzung gilt das dann für alle Geraden durch den Nullpunkt. Nach [2, 28] ist eine Kurve, bei der alle Affinnormalen durch einen Punkt gehen, ein Mittelpunktskegelschnitt, in unserem Falle also eine Ellipse.

Die in Satz 3.1 und Satz 3.2 ausgesprochenen Kriterien für lineare Räume, in denen die Metrik aus einem Skalarprodukt stammt, lassen sich sofort auf komplexe Vektorräume übertragen, wenn man beachtet, daß jeder komplexen Richtung eine GAUSSsche Ebene zugeordnet werden kann.

Satz 3.2 ermöglicht eine neue, von gruppentheoretischen Annahmen freie Lösung des „Raumproblems", d.h. der Frage nach der Auszeichnung der pythagoreischen Metrik. Diese Lösung, die auch die Metrik des quantenmechanischen Zustandsraumes erfaßt, wird an anderer Stelle ausgeführt[5]).

Literatur.

[1] BLASCHKE, W.: Kreis und Kugel. Leipzig 1916. — [2] BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie, Bd. II. Berlin 1923. — [3] BONNESEN, T., u. W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1935. — [4] FENCHEL, W.: Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. Math. Ann. **101**, 238—252 (1929). — [5] FUNK, P.: Eine Kennzeichnung der Ellipsen. Math. Z. **3**, 91 (1919). — [6] INZINGER, R.: Sui diametri coniugati delle ovali a centro. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (8) **3**, 293 (1947). — [7] JORDAN, P., and J. v. NEUMANN: On inner products in linear metric spaces. Ann. of Math. (2) **36**, 719 (1935). — [8] KAKUTANI, SH.: Some characterizations of Euclidean space. Jap. J. Math. **16**, 93—97 (1940). — [9] LAUGWITZ, D.: Über Normtopologien in linearen Räumen. Arch. d. Math. **4**, 455—460 (1953). — [10] RADON, J.: Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **68**, 123 (1916).

[5]) Über die Rolle der pythagoreischen Metrik in der Physik. Z. Naturforsch. **9**a (1954).

Göttingen, Nußanger 70.

(Eingegangen am 10. April 1954.)

SCHUBERT, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 245—288 (1954)

Über eine numerische Knoteninvariante.

Von
HORST SCHUBERT.

Die vorliegenden Untersuchungen schließen an die Abhandlung „Knoten und Vollringe" [5][1]) des Verfassers an, sind jedoch weitgehend unabhängig davon lesbar. Sie sind angeregt worden durch die Frage, ob ein Knoten nur endlich viele Begleitknoten besitzt und ob man den Begleitknoten Vielfachheiten so zulegen kann, daß man insbesondere für die Primfaktoren eines Produktknotens die Vielfachheiten in der Primfaktorzerlegung erhält. Beides kann bejaht werden (§ 8). Dazu ist notwendig, daß man im Besitze einer numerischen Knoteninvarianten ist, die mit der durch Begleitknoten definierten Anordnung von Knoten verträglich ist, d.h. die für die (orientierten und nichtorientierten) Begleitknoten eines Knotens $\varkappa$ kleiner als für $\varkappa$ selbst ist. Das Geschlecht (SEIFERT [6]) hat diese Eigenschaft zwar für orientierte Begleitknoten[2]), nicht dagegen für nichtorientierte, wie die Schlingknoten zeigen: Jeder vom Kreis verschiedene Schlingknoten hat das Geschlecht 1 (KV § 20), während der Diagonalknoten beliebiges Geschlecht haben kann. Auch die von WENDT [9] eingeführte gordische Invariante kommt nicht in Frage, da sie ebenfalls für jeden vom Kreis verschiedenen Schlingknoten den Wert 1 besitzt. Auch Homologieinvarianten scheiden aus, wie aus einer Abhandlung von SEIFERT [7] hervorgeht. Die minimale Überkreuzungszahl in den regulären Projektionen (REIDEMEISTER [3]) und die Gesamtkrümmung von Knoten (MILNOR [2]) haben vermutlich die gewünschte Eigenschaft.

Für die uns vorliegende Frage erwies sich eine neue Invariante als handlich, die von den genannten unabhängig ist. Wir betrachten dazu Brückendarstellungen von Knoten (§ 1), d.h. Knotenlinien, die aus Streckenzügen in zwei parallelen Ebenen und dazu senkrechten Strecken bestehen. Dabei ist die Anzahl der senkrechten Strecken stets gerade, und wir bezeichnen die halbe Anzahl als Brückenzahl der Darstellung. Die minimale Brückenzahl eines Knotens ist die minimale Brückenzahl in allen seinen Brückendarstellungen.

Ist λ ein Begleitknoten der Ordnung α des Knotens $\varkappa$ und bezeichnet $b(\lambda)$ bzw. $b(\varkappa)$ die minimale Brückenzahl von λ bzw. $\varkappa$, so gilt (§ 8)

$$\alpha\, b(\lambda) \leq b(\varkappa). \tag{1}$$

Für $\alpha = 1$ kann das Gleichheitszeichen nicht gelten, so daß stets $b(\lambda) < b(\varkappa)$ ist. Wenn $\varkappa$ ein Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ ist, so gilt in (1)

[1]) Diese Abhandlung wird im folgenden mit KV zitiert. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) KV § 12 und § 15 Satz 3.

das Gleichheitszeichen mit $\alpha = 2$ (§ 10). Für einen Knoten $\varkappa$, der sich als Schlauchzopf der Fädenzahl α mit dem Träger λ darstellen läßt, insbesondere für Schlauchknoten, gilt in (1) ebenfalls das Gleichheitszeichen (§ 11). Für das Produkt von Knoten ist die um 1 verminderte minimale Brückenzahl additiv (§ 9).

§ 1. Vorbemerkungen.

Wie in KV verstehen wir unter einem Komplex eine Punktmenge eines euklidischen Raumes, die sich in endlich viele euklidische Simplexe zerlegen läßt. Wege, Flächen, Kugeln, Vollringe sollen stets solche Komplexe sein, wobei unter einer Kugel ein semilineares Bild eines 3-Simplexes zu verstehen ist. Simpliziale Zerlegungen eines Komplexes sind stets solche in euklidische Simplexe. Die 3-Sphäre $\mathfrak{S}^3$ sei der Rand eines euklidischen 4-Simplexes. Wir werden unsere Betrachtungen in der $\mathfrak{S}^3$ durchführen. Um jedoch die Begriffe und Anschauungsmöglichkeiten des dreidimensionalen euklidischen Raumes zu Hilfe nehmen zu können, treffen wir folgende Vereinbarungen:

Es sei $\mathfrak{E}^3$ ein 3-Simplex, das die 3-Sphäre $\mathfrak{S}^3$ mit dem dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 gemein hat. Alle im Verlaufe der Untersuchungen auftretenden Knotenlinien und Flächen sollen, abgesehen von Ebenen- und Tetraederscharen, im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen, so daß wir die Einbettung in die $\mathfrak{S}^3$ und die Einbettung in den R^3 nebeneinander benutzen können. Für die Einbettung in den R^3 bedeutet die Forderung, daß die betrachteten Knotenlinien und Flächen im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen sollen, keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich dies stets durch eine Ähnlichkeitsabbildung des R^3 erreichen läßt.

Wir werden Knotenlinien und Flächen orientierungserhaltenden semilinearen Abbildungen[3]) (*s*-Abbildungen) der $\mathfrak{S}^3$ auf sich und des R^3 auf sich unterwerfen. Für die *s*-Abbildungen der $\mathfrak{S}^3$ auf sich wird aus dem Zusammenhang stets ohne weiteres klar sein, daß die Bilder der betrachteten Knotenlinien und Flächen im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen. Wenn wir *s*-Abbildungen des R^3 auf sich angeben, so sind diese nötigenfalls mit einer geeigneten Ähnlichkeitsabbildung des R^3 zusammenzusetzen, so daß die Bilder der betrachteten Knotenlinien und Flächen wieder im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen. Außerdem sollen von § 5 an die angegebenen *s*-Abbildungen des R^3 stets nur beschreiben, wie die Knotenlinien und Flächen abgebildet werden. Die Abbildung ist stets noch so abgeändert zu denken, daß sie im Komplement von $\mathfrak{E}^3$ die Identität ist[4]), so daß eine *s*-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich induziert wird, welche ebenfalls im Komplement von $\mathfrak{E}^3$ die Identität ist. Durch Angabe einer *s*-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich oder des R^3 auf sich wird dann also stets eine *s*-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich bezeichnet, welche die jeweils betrachteten Knotenlinien und Flächen so abbildet, daß die Bilder im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen.

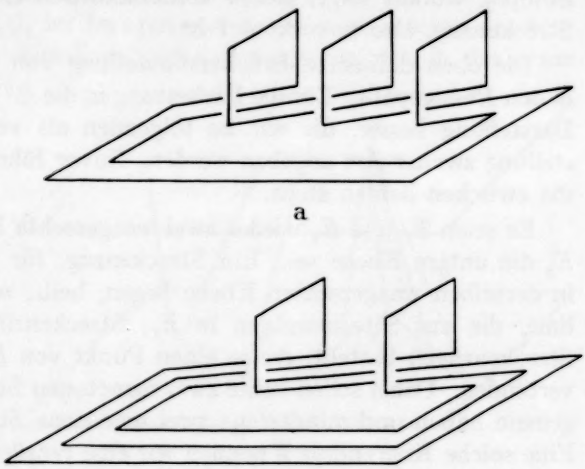
---

[3]) Bezüglich *s*-Abbildungen s. GRAEUB [*1*]. Die benutzten Resultate finden sich in KV zusammengestellt. Der Einfachheit halber zitieren wir sie in KV. Für die Beweise ist auf [*1*] zurückzugreifen.

[4]) Vgl. hierzu KV § 1 Sätze 4, 5 und die daran geknüpften Bemerkungen.

§ 2. Brückendarstellungen eines Knotens.

Wir betrachten im R^3 zwei „waagerechte" Ebenen E_1 und E_2, wobei E_1 die „obere", E_2 die „untere" Ebene sei. Die zu E_1 und E_2 orthogonalen Geraden und Strecken bezeichnen wir als senkrecht. k sei eine Knotenlinie der folgenden Gestalt: k bestehe aus Streckenzügen in E_1 und E_2 und senkrechten Strecken, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Wir sagen, daß k eine *Brückendarstellung* des von k repräsentierten Knotens ist. Unter einer *Brücke* von k verstehen wir einen Teilstreckenzug von k, der aus einem in E_1 liegenden Streckenzug und den beiden anstoßenden senkrechten Strecken besteht. Die in E_2 liegenden Endpunkte der beiden senkrechten Strecken nennen wir *Fußpunkte* der Brücke. E_1, E_2 bezeichnen wir als die *Grenzebenen* der Brückendarstellung. Fig. 1a u. b zeigt zwei Brückendarstellungen einer Kleeblattschlinge. In Fig. 1a besitzt die Knotenlinie drei Brücken, in Fig. 1b zwei. Brückendarstellungen von nichtorientierten Knoten sind entsprechend definiert. Von einer Brückendarstellung kann stets angenommen werden, daß für jede Brücke der in der oberen Ebene E_1 liegende Teil eine einzige Strecke ist. Dies läßt sich offenbar durch eine s-Abbildung des R^3 erreichen, welche die senkrechten Geraden permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt.



a

b

Fig. 1.

Jeder Knoten besitzt eine Brückendarstellung. Man erkennt dies, wenn man von einer regulären Projektion[5]) dieses Knotens ausgeht und für jede Überkreuzung eine Brücke einführt. Der Kreis ist der einzige Knoten, der eine „Brückendarstellung ohne Brücke" besitzt, d. h. der durch eine ebene Knotenlinie dargestellt werden kann. Wir wollen diese Darstellung ausschließen, so daß jede Brückendarstellung des Kreises (und damit jedes Knotens) mindestens eine Brücke besitzt.

Unter den Brückendarstellungen eines Knotens oder nichtorientierten Knotens $\varkappa$ betrachten wir eine solche mit möglichst kleiner Brückenzahl. Die Brückenzahl einer solchen Darstellung nennen wir die *minimale Brückenzahl* von $\varkappa$ und bezeichnen sie mit $b(\varkappa)$.

Satz 1. *Der Kreis ist der einzige Knoten mit minimaler Brückenzahl* 1.

[5]) Im Sinne von REIDEMEISTER [3].

Beweis. Der Kreis besitzt offenbar eine Brückendarstellung mit nur einer Brücke. Sei nun k die Brückendarstellung eines Knotens, die nur eine Brücke besitzt. Wie oben bemerkt wurde, kann angenommen werden, daß der in der oberen Ebene liegende Teil von k eine Strecke ist. In der unteren Ebene bildet k einen einzigen Streckenzug u, der die Fußpunkte der Brücke verbindet. u liegt im Inneren eines genügend großen 2-Simplexes der unteren Ebene, und es läßt sich dieses zu einer 2-Sphäre $\mathfrak{S}^2$ ergänzen, die mit der Brücke nur die Fußpunkte (also mit k nur u) gemein hat. Nun ist u auf $\mathfrak{S}^2$ zu der geradlinigen Verbindungsstrecke der Brückenfußpunkte kombinatorisch isotop[6]), woraus folgt, daß k kombinatorisch isotop zu einem rechteckigen Streckenzug, also unverknotet ist.

Die oben definierte Brückendarstellung von Knoten ist der Einbettung in den R^3 angepaßt. Für die Einbettung in die $\mathfrak{S}^3$ eignet sich eine allgemeinere Darstellung besser, die wir im folgenden als verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art angeben werden. Zuvor führen wir eine Darstellung ein, die zwischen beiden steht.

Es seien E_1 und E_2 wieder zwei waagerechte Ebenen, wobei E_1 die obere, E_2 die untere Ebene sei. Ein Streckenzug, für welchen keine zwei Punkte in derselben waagerechten Ebene liegen, heiße *monoton*. k sei eine Knotenlinie, die aus Streckenzügen in E_1, Streckenzügen in E_2 und monotonen Streckenzügen besteht, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Dabei sollen keine zwei monotonen Streckenzüge einen Endpunkt gemein haben und mindestens zwei monotone Streckenzüge vorhanden sein. Eine solche Knotenlinie k nennen wir eine *verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art* des von k repräsentierten Knotens. Unter einer Brücke verstehen wir hier einen Teilstreckenzug von k, der aus einem in E_1 liegenden Streckenzug und den beiden anstoßenden monotonen Streckenzügen besteht.

Eine Brückendarstellung eines Knotens ist insbesondere eine verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art, und jede verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art läßt sich in eine Brückendarstellung mit gleicher Brückenzahl überführen. Dies folgt aus

Hilfssatz 1. *Es seien E_1, E_2 zwei waagerechte Ebenen im R^3, wobei E_1 die obere Ebene sei. $h_1, h_2, \ldots, h_n$ seien paarweise punktfremde monotone Streckenzüge, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Dann gibt es eine s-Abbildung des R^3 auf sich mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$h_1, h_2, \ldots, h_n$ werden auf senkrechte Strecken abgebildet.*
2. *Jede waagerechte Ebene wird auf sich abgebildet.*
3. *Die Abbildung ist oberhalb E_1 und außerhalb eines beliebig vorgegebenen senkrechten Zylinders, der $h_1, h_2, \ldots, h_n$ im Inneren enthält, die Identität.*
4. *Jede senkrechte Halbgerade unterhalb E_2 wird in eine solche übergeführt.*

Beweis. Es reicht aus, den Hilfssatz für den speziellen Fall zu beweisen, daß $h_1, h_2, \ldots, h_n$ Strecken sind, deren senkrechte Projektionen sich nicht

[6]) SCHUBERT [4], § 1 Hilfssatz 4.

treffen. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus durch wiederholte Anwendung, denn durch geeignete Wahl von endlich vielen waagerechten Ebenen zwischen E_1 und E_2 läßt sich der von E_1 und E_2 begrenzte Bereich so in „Schichten" zerlegen, daß für jede Schicht die Voraussetzungen des speziellen Falles erfüllt sind.

Sind im speziellen Falle alle Strecken $h_1, h_2, \ldots, h_n$ senkrecht, so leistet die Identität das Gewünschte. Sei nun etwa h_i nicht senkrecht. P_1 bzw. P_2 seien die Endpunkte von h_i in E_1 bzw. E_2. Q_2 liege senkrecht unter P_1 in E_2 (Fig. 2). Da sich die senkrechten Projektionen je zweier monotoner Strecken $h_1, h_2, \ldots, h_n$ nicht treffen, kann auf E_2 ein 2-Simplex e so gewählt werden, daß die Strecke P_2Q_2 im Inneren von e und e im Inneren des vorgegebenen senkrechten Zylinders liegt und daß das 3-Simplex $\mathfrak{E}$, das e zur Seite und P_1 zur gegenüberliegenden Ecke hat, zu den von h_i verschiedenen monotonen Strecken $h_1, h_2, \ldots, h_n$ punktfremd ist. Es gibt nun eine s-Abbildung ψ von e auf sich, welche P_2 in Q_2 überführt und auf dem Rande von e die Identität ist. Diese Abbildung erweitern wir zu einer Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf sich, indem wir die Projektionsstrahlen von P_1 nach den Punkten von e entsprechend ψ permutieren und affin abbilden. Wir bezeichnen diese Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf sich wieder mit ψ. Wir setzen nun ψ außerhalb $\mathfrak{E}$ auf den zwischen E_1 und E_2 liegenden Bereich durch die Identität fort, ebenso oberhalb E_1. Unterhalb E_2 wird ψ dadurch definiert, daß die von E_2 nach unten gehenden senkrechten Halbgeraden entsprechend der bereits in E_2 definierten Abbildung permutiert werden, so daß nun ψ eine s-Abbildung des R^3 auf sich ist, welche die im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften 2, 3, 4 besitzt. Es können mehrere solche Abbildungen ausgeführt werden, bis alle monotonen Strecken senkrecht sind, wodurch für den speziellen Fall die gewünschte s-Abbildung entsteht.

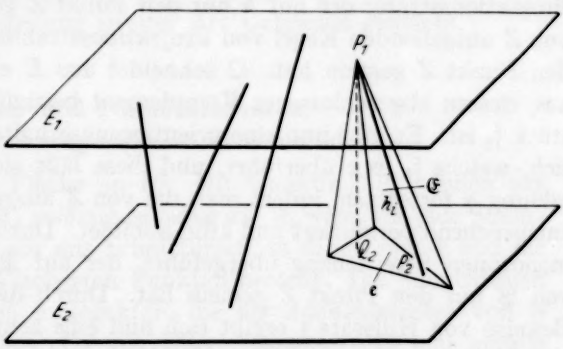


Fig. 2.

Es sei jetzt E ein Tetraeder, d. h. der Rand eines 3-Simplexes, und es sei Z der Mittelpunkt von E. Wir sagen, daß zwei Punkte des R^3 dieselbe *zentrische Distanz* von Z haben, wenn sie auf einem Tetraeder liegen, das aus E durch eine Dehnung mit dem Zentrum Z entsteht, wobei als Dehnungsfaktoren alle positiven reellen Zahlen zugelassen sind. Ein Streckenzug heiße *zentrisch monoton* (bezüglich des Zentrums Z), wenn für ihn keine zwei Punkte dieselbe zentrische Distanz haben. Eine s-Abbildung des R^3 auf sich nennen wir *zentrisch* (zum Zentrum Z), wenn sie jeden Punkt in einen Punkt derselben zentrischen Distanz überführt. Aus einer orientierungserhaltenden s-Abbildung φ von E auf sich erhält man eine zentrische Abbildung insbesondere

dadurch, daß man die von Z ausgehenden Projektionsstrahlen entsprechend φ permutiert und affin so abbildet, daß E in sich übergeht.

Hilfssatz 2. *Es sei E ein Tetraeder im R^3 mit dem Mittelpunkt Z. K sei eine abgeschlossene Punktmenge im Inneren von E, und es existiere ein zentrisch monotoner Streckenzug, der Z mit einem Punkt von E verbindet und zu K punktfremd ist. Dann gibt es eine zentrische Abbildung zum Zentrum Z, bei welcher das Bild von K im Inneren des Projektionskegels von Z nach einer Seite von E liegt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ der Kegel, der von den Projektionsstrahlen von Z nach den Punkten der (zweidimensionalen) Seite $\mathfrak{e}$ von E gebildet wird. h sei ein zentrisch monotoner Streckenzug, der Z mit einem Punkte von E verbindet und zu K punktfremd ist. Es gibt offenbar einen von Z ausgehenden Projektionsstrahl, der mit h nur den Punkt Z gemein hat, und damit einen von Z ausgehenden Kegel von Projektionsstrahlen $\mathfrak{Q}$, der mit h ebenfalls nur den Punkt Z gemein hat. $\mathfrak{Q}$ schneidet aus E ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_1$ aus, dessen abgeschlossenes Komplement bezüglich E ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_2$ ist. Es gibt nun eine orientierungserhaltende s-Abbildung von E auf sich, welche $\mathfrak{f}_2$ in $\mathfrak{e}$ überführt, und diese läßt sich zu einer zentrischen Abbildung φ fortsetzen, indem man die von Z ausgehenden Projektionsstrahlen entsprechend permutiert und affin abbildet. Durch φ wird h in einen zentrisch monotonen Streckenzug übergeführt, der auf $\mathfrak{P}$ liegt und mit dem Rande von $\mathfrak{P}$ nur den Punkt Z gemein hat. Durch dieselbe Konstruktion wie im Beweise von Hilfssatz 1 ergibt sich nun eine zentrische Abbildung ψ, welche $\varphi(h)$ in eine Strecke überführt. Da K abgeschlossen und punktfremd zu h ist, folgt, daß es einen Kegel von Projektionsstrahlen gibt, der punktfremd zu $\psi\varphi(K)$ ist. Bildet man diesen Kegel durch eine zentrische Abbildung χ auf das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{P}$ ab, so liegt $\chi\psi\varphi(K)$ im Inneren von $\mathfrak{P}$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Es sei nun E_1 ein Tetraeder mit dem Mittelpunkt Z. E_2 entstehe aus E_1 durch Dehnung mit dem Zentrum Z und enthalte E_1 im Inneren. k sei eine Knotenlinie, die aus Streckenzügen auf E_1, Streckenzügen auf E_2 und zentrisch monotonen Streckenzügen (bezüglich des Zentrums Z) besteht, die je einen Punkt von E_1 mit einem Punkt von E_2 verbinden. Dabei sollen keine zwei zentrisch monotonen Streckenzüge einen Endpunkt gemein haben und mindestens zwei zentrisch monotone Streckenzüge vorhanden sein. Wir sagen dann, daß k eine *verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art* des von k repräsentierten Knotens ist. Unter einer Brücke verstehen wir hier einen Teilstreckenzug von k, der aus einem auf E_1 liegenden Streckenzug und den beiden anstoßenden zentrisch monotonen Streckenzügen besteht. E_1 nennen wir das *innere Grenztetraeder* der Darstellung, E_2 das *äußere*, und wir bezeichnen Z als das *Zentrum* der Darstellung. Eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art wird durch eine zentrische Abbildung (zum Zentrum der Darstellung) offenbar in eine solche mit gleicher Brückenzahl übergeführt.

Eine verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art eines Knotens mit der Knotenlinie k, insbesondere eine Brückendarstellung, kann leicht in eine

verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit derselben Knotenlinie k und derselben Brückenzahl verwandelt werden, indem man geeignete 2-Simplexe in den Grenzebenen der verallgemeinerten Brückendarstellung erster Art zu geeigneten Tetraedern ergänzt. Umgekehrt folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 ohne weiteres

Hilfssatz 3. *Es sei k die Knotenlinie einer verallgemeinerten Brückendarstellung zweiter Art des Knotens $\varkappa$, Z das Zentrum dieser Darstellung. Dann gibt es eine zentrische Abbildung (zum Zentrum Z), welche k in die Knotenlinie einer Brückendarstellung von $\varkappa$ mit gleicher Brückenzahl überführt.*

Wir hätten die minimale Brückenzahl eines Knotens also auch als kleinste Brückenzahl seiner verallgemeinerten Brückendarstellungen zweiter Art definieren können. Im Beweise von Satz 1 haben wir bereits implizit von einer verallgemeinerten Brückendarstellung zweiter Art Gebrauch gemacht.

§ 3. Ebenen- und Tetraederscharen, die zulässig in bezug auf eine Fläche sind.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche im R^3. Mit GRAEUB [*1*][1]) nennen wir eine Schar paralleler Ebenen (E) *zulässig in bezug auf* $\mathfrak{F}$, wenn für jede Scharebene der Durchschnitt mit $\mathfrak{F}$ nur aus Schnittlinien, in denen sich $\mathfrak{F}$ und die Scharebene durchdringen, und isolierten Punkten besteht. Die Schnittlinien können sich gegenseitig treffen in Punkten, die als *Ausnahmeecken* von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E) bezeichnet werden. Da von jeder Ausnahmeecke eine gerade Anzahl von Schnitten ausgeht, können die Schnittlinien als geschlossen und doppelpunktfrei aufgefaßt werden. *Die Ordnung eines Punktes P von $\mathfrak{F}$ bezüglich* (E) ist dann die um 1 verminderte Anzahl der durch P gehenden Schnittlinien von $\mathfrak{F}$ mit der Scharebene durch P. Isolierte Punkte im Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit einer Scharebene besitzen also die Ordnung -1 bezüglich (E), Ausnahmeecken eine Ordnung, die mindestens gleich 1 ist, während alle übrigen Punkte von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E) die Ordnung Null besitzen. Die Anzahl der Punkte mit von Null verschiedener Ordnung ist endlich.

Diese Begriffe übertragen sich ohne weiteres, wenn man die Schar paralleler Ebenen durch eine Schar konzentrischer Tetraeder ersetzt, die auseinander durch Dehnung mit dem gemeinsamen Mittelpunkt als Zentrum entstehen. Dabei ist vorauszusetzen, daß das Zentrum der Tetraederschar nicht auf $\mathfrak{F}$ liegt. Aus einer in bezug auf $\mathfrak{F}$ zulässigen Schar paralleler Ebenen (E) läßt sich offenbar eine Schar konzentrischer Tetraeder erhalten, die zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist und in bezug auf welche jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ dieselbe Ordnung wie in bezug auf (E) besitzt. Das Umgekehrte gilt nur, wenn der von $\mathfrak{F}$ berandete kompakte Bereich K die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt, und folgt dann aus Hilfssatz 2 und dem folgenden Hilfssatz 4, der sich ohne weiteres aus den Definitionen ergibt.

[1]) Siehe auch KV § 4. Die hier gegebenen Definitionen weichen von denen bei GRAEUB ab, sind jedoch gleichwertig mit diesen.

Hilfssatz 4. *Die Schar konzentrischer Tetraeder* (E) *mit dem Zentrum* Z *sei zulässig in bezug auf die geschlossene Fläche* $\mathfrak{F}$. *Unterwirft man* $\mathfrak{F}$ *einer zentrischen Abbildung zum Zentrum* Z, *so ist die Schar* (E) *zulässig in bezug auf das Bild von* $\mathfrak{F}$, *und bei diesem hat jeder Punkt in bezug auf* (E) *dieselbe Ordnung wie sein Urbildpunkt.*

Ein entsprechender Satz gilt für zulässige Scharen paralleler Ebenen und s-Abbildungen des R^3, die jede Scharebene auf sich abbilden. Für Scharen paralleler Ebenen gilt ferner, daß eine in bezug auf $\mathfrak{F}$ zulässige Schar paralleler Ebenen zulässig bleibt und die Ordnungen der Punkte von $\mathfrak{F}$ erhalten bleiben, wenn man die Ebenen der Schar einer Drehung um einen genügend kleinen Winkel unterwirft[2]). Ein entsprechender Satz gilt nicht für Scharen konzentrischer Tetraeder, wir werden jedoch Anwendungen des für Ebenenscharen geltenden Satzes machen können, wenn wir diejenigen Teile von $\mathfrak{F}$ betrachten, die im Inneren des Projektionskegels vom Zentrum nach einer Seite eines Schartetraeders liegen.

Hilfssatz 5. *Im* R^3 *sei* (E) *eine Schar konzentrischer Tetraeder mit dem Zentrum* Z, *und es sei* $\mathfrak{F}$ *eine geschlossene Fläche. Es gibt eine* s*-Abbildung* φ *des* R^3 *auf sich mit den folgenden Eigenschaften*:

1. (E) *ist zulässig in bezug auf* $\varphi(\mathfrak{F})$.
2. *Jede Ausnahmeecke von* $\varphi(\mathfrak{F})$ *bezüglich* (E) *hat die Ordnung* 1.
3. *Auf keinem Schartetraeder liegen* 2 *Punkte von* $\varphi(\mathfrak{F})$, *die bezüglich* (E) *eine von Null verschiedene Ordnung haben.*
4. φ *ist außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von* $\mathfrak{F}$ *die Identität.*

Beweis. Wenn man eine vorgegebene simpliziale Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{F}$ simplizial so zerlegt, daß auch $\mathfrak{F}$ simplizial ist, so erhält man eine isotope simpliziale Deformation[3]) dieser Umgebung, wenn man die auf $\mathfrak{F}$ liegenden Ecken hinreichend wenig verschiebt. Das Deformationsresultat kann auch durch eine s-Abbildung erhalten werden, welche außerhalb $\mathfrak{U}$ die Identität ist. Auf diese Weise läßt sich zunächst erreichen, daß in einer simplizialen Zerlegung von $\mathfrak{F}$ keine Gerade durch zwei Ecken der Zerlegung zu einer Seite der Schartetraeder parallel ist, daß das Zentrum der Schar (E) nicht auf $\mathfrak{F}$ liegt und daß keine Ecke von $\mathfrak{F}$ auf einem Projektionsstrahl vom Scharzentrum nach einem Punkte einer Tetraederkante liegt. Die Schar (E) ist dann zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$.

Da nun nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E) eine von Null verschiedene Ordnung haben, kann nach Hilfssatz 2 durch eine zentrische Hilfsabbildung σ erreicht werden, daß alle diese Punkte im Inneren eines Projektionskegels $\mathfrak{P}$ vom Scharzentrum nach einer Tetraederseite liegen. Zur Fixierung der Sprechweise bezeichnen wir die hierbei benutzte Tetraederseite als waagerecht.

Es sei nun P eine Ausnahmeecke von $\sigma(\mathfrak{F})$, deren Ordnung bezüglich (E) größer als 1 ist. $\mathfrak{W}$ sei ein Würfel, der P im Inneren enthält und der im

[2]) GRAEUB [1] S. 21.
[3]) Siehe hierzu KV § 1.

Inneren von $\mathfrak{P}$ und $\sigma(\mathfrak{U})$ liegt. $\mathfrak{W}$ soll so gewählt werden, daß keine Kante von $\mathfrak{W}$ waagerecht ist, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{W}$ mit $\sigma(\mathfrak{F})$ nur aus Punkten eines Simplexsternes mit dem Mittelpunkt P besteht und daß keine Kante dieses Simplexsternes eine Kante von $\mathfrak{W}$ trifft. Der Durchschnitt von $\sigma(\mathfrak{F})$ mit dem Rande von $\mathfrak{W}$ ist dann eine geschlossene, doppelpunktfreie Schnittlinie s. Auf $\sigma(\mathfrak{F})$ berandet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$, das P enthält. Der Rand von $\mathfrak{W}$ wird durch s in zwei Elementarflächenstücke zerlegt, eines davon sei $\mathfrak{e}$. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ beranden zusammen eine auf $\mathfrak{W}$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$, deren Durchschnitt mit $\sigma(\mathfrak{F})$ nur aus $\mathfrak{f}$ besteht. Durch eine s-Abbildung, die auf $\sigma(\mathfrak{F}) - \mathfrak{f}$ und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$, insbesondere also außerhalb $\sigma(\mathfrak{U})$, die Identität ist[4]), kann nun $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{e}$ übergeführt werden. Für die aus $\sigma(\mathfrak{F})$ entstandene Fläche, die wir wieder mit $\sigma(\mathfrak{F})$ bezeichnen wollen, ist die Schar (E) wieder zulässig, und für ihre auf dem Rande von $\mathfrak{W}$ liegenden Punkte können bezüglich (E) nur die Ordnungen $-1, 0$ und 1 auftreten, wie sich unmittelbar aus der Wahl von $\mathfrak{W}$ ergibt. Das Verfahren kann solange fortgesetzt werden, bis $\sigma(\mathfrak{F})$ bezüglich (E) nur noch Ausnahmeecken der Ordnung 1 besitzt.

Wir betrachten nun alle Punkte von $\sigma(\mathfrak{F})$ mit von Null verschiedener Ordnung. Sie liegen im Inneren von $\mathfrak{P}$ und sind Ecken jeder simplizialen Zerlegung von $\sigma(\mathfrak{U})$, für welche $\sigma(\mathfrak{F})$ simplizial ist. Wir nehmen eine solche Zerlegung vor und zwar so fein, daß für jeden Punkt P mit von Null verschiedener Ordnung der Simplexstern mit dem Mittelpunkt P innerhalb $\mathfrak{P}$ liegt. Wenn man nun die Punkte mit von Null verschiedener Ordnung hinreichend wenig verschiebt, so erhält man eine isotope simpliziale Deformation von $\sigma(\mathfrak{U})$, bei welcher (E) zulässig in bezug auf $\sigma(\mathfrak{F})$ bleibt und jeder Punkt von $\sigma(\mathfrak{F})$ in einen solchen von gleicher Ordnung bezüglich (E) übergeht. Auf diese Weise läßt sich erreichen, daß für $\sigma(\mathfrak{F})$ keine zwei Punkte mit von Null verschiedener Ordnung auf demselben Schartetraeder liegen. Macht man noch die Hilfsabbildung σ rückgängig, so ergibt sich die Behauptung.

Zur geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ im R^3 betrachten wir nun zunächst wieder eine Schar paralleler Ebenen (E), die zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist. Die Ebenen der Schar mögen waagerecht heißen. P sei eine Ausnahmeecke der Ordnung 1 von $\mathfrak{F}$ bezüglich (E), so daß es im Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit der waagerechten Ebene E durch P genau zwei Schnittlinien s_1 und s_2 durch P gibt. Auf s_1 und s_2 mögen keine weiteren Ausnahmeecken liegen. $\mathfrak{F}$ hat in P einen Sattel. Betrachtet man die waagerechten Ebenen, die zu der Ebene E benachbart sind, so bemerkt man, daß sich in P zwei vorher getrennte Schnittlinien zu einer einzigen vereinigen (bzw. eine Schnittlinie in zwei zerfällt, je nachdem von welcher Seite man an E herankommt), wenn man eine waagerechte Ebene parallel zu sich durch P hindurchschiebt. Fig. 3a—c zeigt den Sachverhalt, wenn sich s_1 und s_2 auf E nicht umfassen, Fig. 4a—c im anderen Falle. Benutzt man statt der Ebenenschar (E) eine Schar konzentrischer Tetraeder, so geht der in Fig. 4 dargestellte Fall in den von Fig. 3 über, da

[4]) Siehe hierzu KV § 1, Satz 11 und die anschließende Bemerkung.

s_1 und s_2 auf dem betreffenden Schartetraeder stets zwei Elementarflächenstücke beranden, die nur den Punkt P gemein haben. Aus diesem Grunde werden wir in unseren späteren Betrachtungen Scharen konzentrischer Tetraeder benutzen.

Kehren wir zur Ebenenschar (E) zurück. Wir wollen annehmen, daß $\mathfrak{F}$ durch s_1 zerlegt wird, und zwar so,

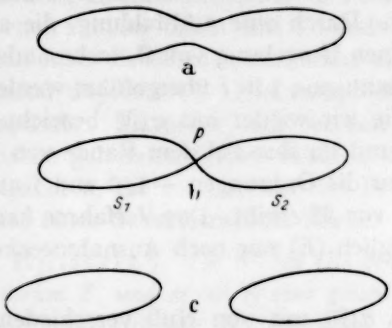


Fig. 3.

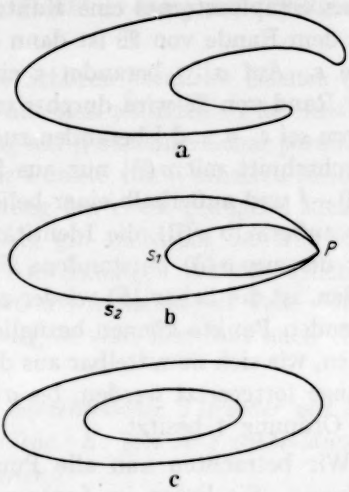


Fig. 4.

daß s_1 von $\mathfrak{F}$ ein Flächenstück $\mathfrak{h}$ abschneidet, welches s_2 nicht enthält und auf dem außer P keine weitere Ausnahmeecke von $\mathfrak{F}$ liegt. Wir bezeichnen dann $\mathfrak{h}$ als *Haube* von $\mathfrak{F}$ und s_1 als ihre *Grenzlinie*. Da s_2 nicht auf $\mathfrak{h}$ liegt, stößt $\mathfrak{h}$ von der Seite an E an, nach der s_1 und s_2 in disjunkte Schnittlinien übergehen, und bei Parallelverschiebung

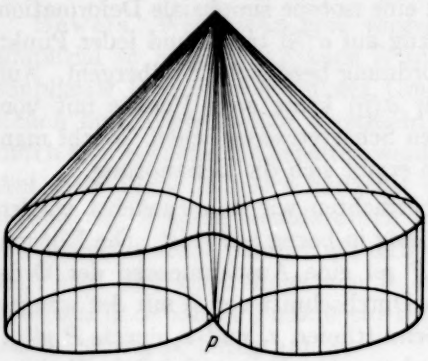


Fig. 5.

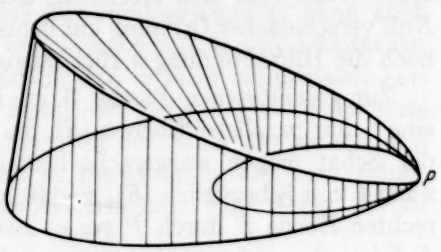


Fig. 6.

von E nach dieser Seite erhält man eine aus s_1 entstehende Schnittlinie mit $\mathfrak{h}$, die auf einen Punkt zusammenschrumpft und dann verschwindet. $\mathfrak{h}$ ist also ein Elementarflächenstück[5]). Wir nennen $\mathfrak{h}$ eine *obere* bzw. *untere Haube* von $\mathfrak{F}$, wenn $\mathfrak{h}$ von oben bzw. unten an E anstößt.

Wir wollen nun annehmen, daß s_1 und s_2 zusammen aus $\mathfrak{F}$ ein Flächenstück $\mathfrak{z}$ ausschneiden, auf dem außer P keine Ausnahmeecke liegt und das nicht aus zwei Hauben mit dem gemeinsamen Punkt P besteht. Wir nennen

[5]) Vgl. KV § 4, Satz 1.

dann $\mathfrak{z}$ ein *Knie* von $\mathfrak{F}$, s_1, s_2 seine *Grenzlinien*. $\mathfrak{z}$ stößt mit seinen Rändern s_1 und s_2 nur von einer Seite an E an, und zwar von derjenigen, nach der sich s_1 und s_2 zu einer einzigen Schnittlinie vereinigen, weil andernfalls $\mathfrak{z}$ aus zwei Hauben mit dem gemeinsamen Punkt P bestände. Verschiebt man E parallel zu sich nach dieser Seite, so entsteht aus s_1, s_2 eine einzige Schnittlinie, die in einen Punkt zusammenschrumpft und dann verschwindet. $\mathfrak{z}$ ist also[5]) eine Fläche vom Typus einer Kugelfläche mit zwei Löchern, deren Ränder genau einen Punkt gemein haben, wofür wir *Zweieck* sagen wollen. Fig. 5 und 6 zeigen je ein Knie. Wir nennen $\mathfrak{z}$ ein *oberes* bzw. *unteres Knie* von $\mathfrak{F}$, wenn $\mathfrak{z}$ von oben bzw. unten an E anstößt.

Es möge nun schließlich $\mathfrak{s}$ ein Kreisring auf $\mathfrak{F}$ sein, dessen Ränder s_1, s_2 in verschiedenen waagerechten Ebenen E_1, E_2 liegen. E_1 und E_2 sollen von $\mathfrak{s}$ nicht durchsetzt werden. Auf jedem der beiden Ränder s_1, s_2 von $\mathfrak{s}$ liege genau eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{F}$, und dies sollen die einzigen Ausnahmeecken von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{s}$ sein. Wir nennen dann $\mathfrak{s}$ einen *Schenkel* von $\mathfrak{F}$, s_1, s_2 seine *Grenzlinien*. Verschiebt man E_1 parallel zu sich nach E_2, so wird $\mathfrak{s}$ von der aus s_1 entstehenden Schnittlinie überstrichen.

Die eingeführten Begriffe Haube, Knie, Schenkel übertragen sich ohne weiteres, wenn statt der Schar paralleler Ebenen eine Schar konzentrischer Tetraeder mit dem Zentrum Z benutzt wird, die zulässig in bezug auf $\mathfrak{F}$ ist. An Stelle von Parallelverschiebungen treten Dehnungen mit dem Zentrum Z. Statt von oberen und unteren *Hauben* sprechen wir von *inneren und äußeren*, je nachdem sie von innen oder außen an das Schartetraeder durch ihre Grenzlinie anstoßen. Entsprechend ist die Sprechweise für Knie.

§ 4. Die Brückenform eines Torus.

Es sei $\mathfrak{T}$ ein Torus im Inneren des 3-Simplexes $\mathfrak{E}^3$, das die 3-Sphäre $\mathfrak{S}^3$ mit dem R^3 gemein hat. (E) sei eine Schar konzentrischer Tetraeder des R^3 mit dem Zentrum Z. Dabei möge (E) zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}$ sein, und jedes Schartetraeder, das $\mathfrak{T}$ trifft, möge im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen. In bezug auf die Schar (E) soll nun $\mathfrak{T}$ nur aus Knien und Schenkeln bestehen. An den beiden Grenzlinien eines Knies sollen also zwei Schenkel anstoßen und an jeder Grenzlinie eines Schenkels ein Knie. Dies impliziert, daß die Ausnahmeecken von $\mathfrak{T}$ bezüglich (E) die Ordnung 1 haben und daß auf jeder Schnittlinie von $\mathfrak{T}$ mit einem Schartetraeder höchstens eine Ausnahmeecke liegt. Wir verlangen außerdem noch, daß jede Grenzlinie der Schenkel auf ihrem Schartetraeder ein Elementarflächenstück berandet, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{T}$ nur aus seinem Rande besteht. Ein solches Elementarflächenstück ist Meridianfläche[1]) eines von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Vollringes $\mathfrak{V}$. Jeder Schenkel berandet zusammen mit den angegebenen Meridianflächen in seinen Grenzlinien eine auf $\mathfrak{V}$ liegende Kugel, ebenso jedes Knie, und es setzen sich alle diese Kugeln zu $\mathfrak{V}$ zusammen. Daraus folgt noch, daß jede Schnittlinie von $\mathfrak{T}$ mit einem Schartetraeder auf diesem ein ganz auf $\mathfrak{V}$ liegendes Elementar-

[1]) KV § 4, Beweis von Satz 2.

flächenstück berandet, und zwar eine Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ genau dann, wenn die Schnittlinie auf einem Schenkel von $\mathfrak{T}$ liegt. Wir fordern nun schließlich noch, daß es ein Schartetraeder E_1 gibt, das alle inneren Knie von $\mathfrak{T}$ schneidet, und ein Schartetraeder E_2, das von allen äußeren Knien geschnitten wird. Alle Ausnahmeecken von $\mathfrak{T}$ liegen dann zwischen E_1 und E_2.

Wenn $\mathfrak{T}$ und die Schar (E) alle angegebenen Forderungen erfüllen, so wollen wir sagen, daß $\mathfrak{T}$ bezüglich der Schar (E) in *Brückenform* ist.

Hilfssatz 6. *Der Torus $\mathfrak{T}$ sei bezüglich der Schar konzentrischer Tetraeder (E) in Brückenform. $\mathfrak{V}$ sei der von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandete Vollring, auf welchem die Schnitte von $\mathfrak{T}$ mit den Schartetraedern nullhomolog sind. Dann gibt es eine Seele von $\mathfrak{V}$, die bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art des von ihr dargestellten nichtorientierten Knotens ist und deren Brückenzahl die halbe Anzahl der Schenkel von $\mathfrak{T}$ ist.*

Beweis. Das Schartetraeder E_1 schneide alle inneren Knie von $\mathfrak{T}$, das Schartetraeder E_2 alle äußeren. In jede Grenzlinie der Schenkel von $\mathfrak{T}$ spannen wir eine Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ ein, die ganz auf dem durch die Grenzlinie bezeichneten Schartetraeder liegt. Dadurch zerfällt $\mathfrak{V}$ in Kugeln, und zwar in solche, die von je einem Schenkel von $\mathfrak{T}$ und zwei der bezeichneten Meridianflächen berandet werden, und solche, die von einem Knie von $\mathfrak{T}$ und zwei Meridianflächen berandet werden.

Sei $\mathfrak{K}$ eine solche Kugel, die von einem Schenkel und den beiden Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ berandet wird. Gibt man sich auf $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ je einen mittleren Punkt P_1 bzw. P_2 vor, so lassen sich P_1 und P_2 durch einen zentrisch monotonen Streckenzug u in $\mathfrak{K}$ verbinden. u ist Sehne von $\mathfrak{K}$ und zwar eine unverknotete. Dies folgt aus Satz 1 und Hilfssatz 3, da man u auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ offenbar so zu einer Knotenlinie schließen kann, daß diese bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit nur einer Brücke ist.

Sei nun $\mathfrak{K}$ eine Kugel auf $\mathfrak{V}$, die von einem Knie $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{T}$ und den zugehörigen Meridianflächen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ berandet wird. $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ haben genau einen Punkt A gemein, und es ist A Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{z}$ möge etwa ein inneres Knie von $\mathfrak{T}$ sein, also das Schartetraeder E_1 schneiden. Wählt man nun auf $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ je einen mittleren Punkt P_1 bzw. P_2 und auf dem Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit E_1 zwei nicht auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ liegende Punkte Q_1, Q_2, so lassen sich P_1, Q_1 und P_2, Q_2 durch disjunkte, zentrisch monotone Streckenzüge u_1, u_2 auf $\mathfrak{K}$ verbinden. Verbindet man noch Q_1, Q_2 durch einen Streckenzug u_3, der auf E_1 und im Inneren von $\mathfrak{K}$ liegt, so erhält man aus u_1, u_3, u_2 eine Sehne u von $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{K}$ unverknotet ist. Man kann nämlich ihre Endpunkte durch einen auf $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ liegenden Streckenzug (durch A hindurch) verbinden, wodurch man aus u eine Knotenlinie erhält, die bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit nur einer Brücke ist.

Man bemerkt nun, daß für jede der Kugeln, in die wir $\mathfrak{V}$ mittels der angegebenen Meridianflächen zerlegt haben, eine Sehne der beschriebenen Art

so gebildet werden kann, daß sich diese Sehnen zu einer Knotenlinie a im Inneren von $\mathfrak{V}$ zusammensetzen. a ist bezüglich der Schar (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art des von a dargestellten nichtorientierten Knotens. Die Anzahl der zentrisch monotonen Streckenzüge von a ist gleich der Anzahl der Schenkel von $\mathfrak{T}$, und es ist a Seele von $\mathfrak{V}$. Dies folgt aus der Definition der Seelen eines Vollringes[2]), wenn man berücksichtigt, daß nach Wegnahme einer der Kugeln von $\mathfrak{V}$ eine Kugel $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{V}$ übrig bleibt, in der a eine unverknotete Sehne bildet[3]). Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Hilfssatz 6 läßt sich leicht umkehren: Gibt man sich eine Knotenlinie k vor, die bezüglich der Schar konzentrischer Tetraeder (E) eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art ist, so erhält man bei geeigneter Wahl einer simplizialen Umgebung von k einen Vollring $\mathfrak{V}$, dessen Rand bezüglich der Schar (E) in Brückenform ist und für welchen k eine Seele der in Hilfssatz 6 beschriebenen Art ist.

Hilfssatz 7. *Es sei k eine Knotenlinie im Inneren des 3-Simplexes $\mathfrak{E}^3$, das die $\mathfrak{S}^3$ mit dem R^3 gemein hat. k sei bezüglich der Schar (E) konzentrischer Tetraeder des R^3 eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art des Knotens $\varkappa$, wobei das Scharzentrum im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liege. $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ seien verknotete Vollringe in der $\mathfrak{S}^3$, von denen jeder k so im Inneren enthalte, daß k nicht in einer auf $\mathfrak{V}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ liegenden Kugel enthalten ist. Außerdem sollen die Ränder $\mathfrak{T}_i$ der Vollringe $\mathfrak{V}_i$ paarweise punktfremd sein. Dann gibt es eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die k in eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art von $\varkappa$ bezüglich der Schar (E) mit gleicher Brückenzahl überführt und gleichzeitig die Tori $\mathfrak{T}_i$ in Brückenform bezüglich der Schar (E) bringt.*

Beweis. Wir können annehmen, daß die Tori $\mathfrak{T}_i$ im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegen und ebenso die Schartetraeder, die einen solchen Torus oder k treffen, da sich dies durch eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich erreichen läßt, die $\mathfrak{E}^3$ ähnlich in sich zusammenzieht[4]). Nach Hilfssatz 5 kann ferner angenommen werden, daß die Schar (E) in bezug auf jeden Torus zulässig ist, daß nur Ausnahmeecken der Ordnung 1 auftreten und daß auf keinem Schartetraeder zwei Punkte der Tori $\mathfrak{T}_i$ mit von Null verschiedener Ordnung liegen. E_1 sei das innere Grenztetraeder für k, E_2 das äußere. Wie aus dem Beweise von Hilfssatz 5 hervorgeht, kann noch angenommen werden, daß für die Tori kein Punkt mit von Null verschiedener Ordnung auf E_1 oder E_2 liegt. Eine Schnittlinie eines Torus $\mathfrak{T}_i$ mit einem Schartetraeder zerlegt dieses in zwei Elementarflächenstücke und ist daher unverknotet. Wegen der Verknotung von $\mathfrak{V}_i$ ist sie[5]) entweder nullhomolog auf $\mathfrak{T}_i$ oder Meridian von $\mathfrak{V}_i$.

Der Beweis des Hilfssatzes erfolgt dadurch, daß wir soweit wie möglich Ausnahmeecken beseitigen. Wir führen ihn in 3 Teilen. Im ersten Teil (§ 5)

[2]) KV § 6.
[3]) Dies folgt aus KV § 5, Satz 3 und Hilfssatz 6.
[4]) Graeub [1] S. 14.
[5]) KV § 7, Hilfssatz 2.

werden für alle Tori Hauben beseitigt, bis keine mehr vorhanden sind. Im zweiten Teil (§ 6) beseitigen wir „Einstülpungen" der Tori. Danach sind die Tori in Brückenform, was im dritten Teil (§ 7) nachgewiesen wird.

Für die dabei angegebenen s-Abbildungen verweisen wir auf die Vereinbarungen in § 1. Zentrische Abbildungen beziehen sich auf das Zentrum Z der Schar (E).

§ 5. Beseitigung von Hauben.

Im ersten Schritt geben wir zunächst ein Verfahren zur Beseitigung einer Ausnahmeecke an, durch welche eine Schnittlinie von Torus und Schartetraeder geht, die auf dem Tetraeder ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück berandet. Die Beseitigung einer Haube wird hierauf zurückgeführt, indem die etwa störenden Teile der Tori $\mathfrak{T}_i$ und von k, die im „Inneren" der Haube liegen, eingezogen, unterhalb der Ausnahmeecke der Grenzlinie beiseite geschoben und wieder ausgedehnt werden. Wir führen dies im zweiten bis fünften Schritt aus. Zunächst wird im zweiten Schritt die Haube passend auf die beiden Elementarflächenstücke bezogen, in welche die Grenzlinie ihr Schartetraeder zerlegt, so daß man vom Inneren der Haube sprechen kann. Im dritten Schritt erfolgt eine Normierung der Haube. Danach können im vierten Schritt die im Inneren der Haube liegenden Teile der Tori und von k eingezogen und im fünften Schritt so ausgeschoben werden, daß k wieder eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit der ursprünglichen Brückenzahl ist, keine zusätzlichen Ausnahmeecken entstehen und der erste Schritt angewandt werden kann.

Erster Schritt. *Beseitigung einer Ausnahmeecke, wenn durch sie eine Schnittlinie von Schartetraeder und Torus geht, die auf dem Tetraeder ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück berandet.*

Es sei P eine Ausnahmeecke der bezeichneten Art, E das Schartetraeder durch P. Durch P geht eine Schnittlinie von E mit einem Torus, die auf E ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ berandet. Auf $\mathfrak{e}$ können noch weitere Schnittlinien von E mit den Tori $\mathfrak{T}_i$ liegen. Wir betrachten eine auf $\mathfrak{e}$ innerste Schnittlinie t, d.h. t berandet auf $\mathfrak{e}$ ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$. t liege etwa auf $\mathfrak{T}_h$. t ist nullhomolog auf $\mathfrak{T}_h$ und berandet auf $\mathfrak{T}_h$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$. Andernfalls wäre nämlich[1]) $\mathfrak{e}'$ eine zu k punktfremde Meridianfläche von $\mathfrak{V}_h$, woraus im Widerspruch zur Voraussetzung folgte[2]), daß k in einer auf $\mathfrak{V}_h$ liegenden Kugel enthalten wäre. Wir wollen t beseitigen, ohne neue Schnittlinien auf E oder neue Ausnahmeecken zu erzeugen.

$\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{f}$ bilden zusammen eine 2-Sphäre, welche die $\mathfrak{S}^3$ in zwei Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zerlegt. Eine von beiden, etwa $\mathfrak{K}$, enthält k nicht. $\mathfrak{K}$ enthält auch $\mathfrak{T}_h - \mathfrak{f}$ und die von $\mathfrak{T}_h$ verschiedenen Tori nicht, da sonst $\mathfrak{K}'$ gegen Voraussetzung eine Kugel wäre, die k im Inneren enthält und auf einem der Vollringe $\mathfrak{V}_i$

[1]) KV § 3, Hilfssatz 2 und § 7, Satz 2.
[2]) KV § 9, Satz 1.

läge. Wir können nun eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich ausführen[3]), die $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{e}'$ abbildet und die auf $\mathfrak{T}_k - \mathfrak{f}$ und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$, insbesondere also auf k und den von $\mathfrak{T}_k$ verschiedenen Tori, die Identität ist.

Die Schar (E) ist jetzt nicht mehr zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}_k$, wir können dies jedoch wieder erreichen dadurch, daß wir $\mathfrak{e}'$ von E „abheben", und zwar so, daß $\mathfrak{T}_k$ zu den übrigen Tori und k punktfremd bleibt und daß eine Vereinfachung gegenüber dem ursprünglichen Zustand erzielt wird. Zunächst führen wir eine zentrische Abbildung aus, die $\mathfrak{e}$ und damit $\mathfrak{e}'$ in das Innere eines Projektionskegels vom Scharzentrum nach einer Tetraederseite bringt. Dies soll so geschehen, daß es danach in der Ebene von $\mathfrak{e}$ eine Gerade g durch P gibt, die $\mathfrak{e}'$ nicht trifft oder nur in P, wenn P auf dem Rande von $\mathfrak{e}'$ liegt. Es bedeutet nun für den aus k und den Tori $\mathfrak{T}_i$ bestehenden Komplex eine isotope simpliziale Deformation, wenn man die auf $\mathfrak{e}'$ liegenden Ecken einer simplizialen Zerlegung dieses Komplexes hinreichend wenig verschiebt. Diese Verschiebung soll nach der Seite von E erfolgen, von der her $\mathfrak{T}_k - \mathfrak{e}'$ mit t an E anstößt, und in eine Ebene, die aus der Ebene von $\mathfrak{e}$ durch Drehung um g mit hinreichend kleinem Drehwinkel entsteht. Falls P auf dem Rande von $\mathfrak{e}'$ liegt, ist P dabei festzuhalten. Bei genügend kleinem Drehwinkel und geeigneter Verschiebung der Ecken[4]) wird (E) zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}_k$, bleiben die Ordnungen der Punkte von $\mathfrak{T}_k - \mathfrak{e}'$ erhalten und entsteht keine Ausnahmeecke aus einem Punkte von $\mathfrak{e}'$. Falls P auf dem Rande von $\mathfrak{e}'$ liegt, ist P nicht mehr Ausnahmeecke.

Das beschriebene Verfahren kann für Schnittlinien auf $\mathfrak{e}$ solange angewandt werden, bis schließlich eine durch P gehende Schnittlinie beseitigt wird, also P nicht mehr Ausnahmeecke ist. Auf diese Weise beseitigen wir alle Ausnahmeecken der betrachteten Art. Insbesondere sind dann alle Ausnahmeecken innerhalb des Grenztetraeders E_1 von k und außerhalb E_2 beseitigt.

Zweiter Schritt. *Das Überschlagen einer Haube.*

Es sei $\mathfrak{h}$ eine Haube, etwa auf dem Torus $\mathfrak{T}_k$. Ihre Grenzlinie sei s_1 und liege auf dem Schartetraeder E. Auf s_1 liegt eine Ausnahmeecke P von $\mathfrak{T}_k$, und durch P geht eine zweite Schnittlinie s_2 von $\mathfrak{T}_k$ und E. Durch s_1, s_2 wird E in ein Zweieck $\mathfrak{y}$ und zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ zerlegt, wobei $\mathfrak{e}_1$ von s_1 berandet werde.

Sei zunächst $\mathfrak{h}$ eine innere Haube. In diesem Falle wird das von E berandete 3-Simplex durch $\mathfrak{h}$ in zwei Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zerlegt, die von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ bzw. $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{h}$ berandet werden. Das innere Grenztetraeder E_1 von k wird von $\mathfrak{h}$ geschnitten. Andernfalls wäre nämlich eine der beiden Kugeln $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ zu E_1 punktfremd und damit auch zu k, und eines der beiden von s_1 auf E berandeten Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{y}$ träfe k nicht, was nach dem ersten Schritte nicht mehr möglich ist. Das Zentrum Z der Schar (E) liegt

[3]) KV § 1, Satz 11 und die anschließende Bemerkung.

[4]) Graeub [1] S. 20, 23, 24. Vgl. auch KV § 4, Beweis von Satz 2.

nun entweder auf $\mathfrak{K}$ oder auf $\mathfrak{K}'$. Der zweite Fall ist der erwünschte, der erste läßt sich dadurch in den zweiten verwandeln, daß man $\mathfrak{h}$ „über Z hinweg schlägt":

Es sei E_0 ein Schartetraeder, das von E_1 umfaßt wird und so nahe an E_1 liegt, daß es von $\mathfrak{h}$ geschnitten wird. Da auf $\mathfrak{h}$ außer P keine Ausnahmeecke liegt, besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{h}$ und E_0 aus genau einer Schnittlinie s_0, die auf E_0 ein auf $\mathfrak{K}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_0$ berandet. Auf $\mathfrak{e}_0$ liegen außer dem Rande möglicherweise noch weitere Schnittlinien von E_0 mit $\mathfrak{T}_k$ und den übrigen Tori. Wie im ersten Schritt können diese der Reihe nach beseitigt werden, indem man mit einer auf $\mathfrak{e}_0$ innersten beginnt, und es kann dann schließlich auch die Schnittlinie s_0 von $\mathfrak{h}$ und E_0 beseitigt werden: Das von s_0 auf $\mathfrak{h}$ berandete Elementarflächenstück wird in $\mathfrak{e}_0$ übergeführt und dann von E_0 nach außen abgehoben. $\mathfrak{K}$ geht dabei in eine Kugel über, die Z nicht mehr enthält.

Wenn $\mathfrak{h}$ eine äußere Haube ist, so ist das abgeschlossene Komplement bezüglich der $\mathfrak{S}^3$ des von E berandeten 3-Simplexes eine Kugel, die von $\mathfrak{h}$ in zwei Kugeln zerlegt wird. Eine dieser beiden Kugeln, sie heiße $\mathfrak{K}$, wird von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ berandet. Der erwünschte Fall liegt vor, wenn $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{E}^3$ liegt. Der andere Fall läßt sich darauf zurückführen. Dies geschieht wie oben, wobei nur Z durch das Komplement von $\mathfrak{E}^3$ bezüglich der $\mathfrak{S}^3$ zu ersetzen ist und E_0 ein Schartetraeder sein muß, das E_2 umfaßt.

In jedem Falle ist erreicht, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ zusammen eine auf $\mathfrak{E}^3$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$ beranden, die Z nicht enthält. Wir wollen $\mathfrak{K}$ als das *Innere der Haube* $\mathfrak{h}$ bezeichnen. Auf $\mathfrak{K}$ läßt sich Hilfssatz 2 anwenden, so daß im weiteren angenommen werden kann, daß $\mathfrak{K}$ im Inneren eines Projektionskegels $\mathfrak{P}$ von Z nach einer Tetraederseite liegt. Zur Vereinfachung der Sprechweise nennen wir die auf $\mathfrak{P}$ liegenden Tetraederseiten waagerecht. Wir können nun von Punkten sprechen, die auf $\mathfrak{P}$ oberhalb bzw. unterhalb einer solchen waagerechten Tetraederseite liegen. Dabei sei die Bezeichnung so gewählt, daß Z der höchste Punkt von $\mathfrak{P}$ ist.

Dritter Schritt. *Normierung der Haube* $\mathfrak{h}$.

Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir weiterhin an, daß $\mathfrak{h}$ eine innere Haube von $\mathfrak{T}_k$ ist. $\mathfrak{h}$ schneidet dann E_1 in einer Schnittlinie u^*, die auf E_1 ein auf $\mathfrak{K}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{f}^*$ berandet. Durch eine zentrische Abbildung, welche die von Z ausgehenden Halbgeraden permutiert und $\mathfrak{P}$ auf sich abbildet, läßt sich erreichen, daß $\mathfrak{f}^*$ ein 2-Simplex ist. $\mathfrak{f}$ entstehe aus $\mathfrak{f}^*$ dadurch, daß man $\mathfrak{f}^*$ ähnlich auf seinen Mittelpunkt zusammenzieht und werde so gewählt, daß der Kreisring, der das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{f}$ bezüglich $\mathfrak{f}^*$ ausmacht, mit $\mathfrak{T}_k$ nur den Rand u^* gemein hat und zu den übrigen Tori und zu k punktfremd ist. Der Rand von $\mathfrak{f}$ sei u. S sei ein Punkt, der im Inneren von $\mathfrak{P}$ über dem Mittelpunkt von $\mathfrak{f}$ liegt. Fig. 7 zeigt den Sachverhalt im Schnitt. Wir betrachten den Kegelmantel, der von den Projektionsstrahlen von S nach den Punkten von u gebildet wird. Ist E_1' ein Schartetraeder, das E_1 umfaßt und hinreichend nahe an E_1 gewählt wird,

so wird E_1' von diesem Kegelmantel in einer Schnittlinie v geschnitten, die zusammen mit der Schnittlinie von E_1' und $\mathfrak{h}$ auf E_1' einen auf $\mathfrak{R}$ liegenden Kreisring berandet, der mit $\mathfrak{T}_k$ nur den auf $\mathfrak{h}$ liegenden Rand gemein hat und der zu den übrigen Tori und zu k punktfremd ist. Auf E_1' berandet v ein auf $\mathfrak{R}$ liegendes 2-Simplex $\mathfrak{g}$. Das 3-Simplex, das $\mathfrak{g}$ zur Seite und S zur gegenüberliegenden Ecke hat, nennen wir $\mathfrak{L}_1$. Sein Rand wird durch u und v in $\mathfrak{g}$, einen Kreisring $\mathfrak{r}$ und ein Elementarflächenstück $\mathfrak{d}$ zerlegt. $\mathfrak{r}$ ist punktfremd zu den Tori $\mathfrak{T}_i$ und zu k, wenn E_1' hinreichend nahe an E_1 gewählt ist, was der Fall sein soll.

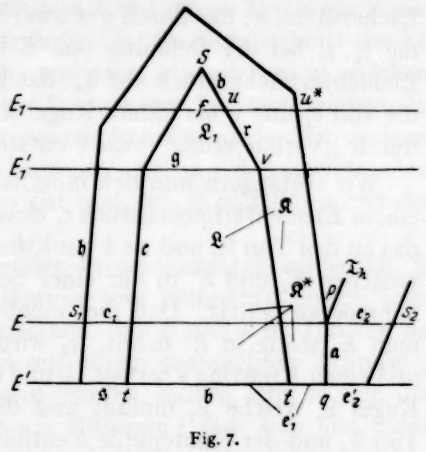


Fig. 7.

$\mathfrak{d}$ wird möglicherweise von den Tori $\mathfrak{T}_i$ getroffen. Durch waagerechtes Verschieben der oberhalb E_1 auf $\mathfrak{P}$ liegenden Ecken einer simplizialen Zerlegung der Tori $\mathfrak{T}_i$ läßt sich erreichen, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{d}$ mit den Tori $\mathfrak{T}_i$, falls er nicht bereits leer ist, nur aus doppelpunktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die paarweise und zu u punktfremd sind. Jede solche Schnittlinie ist nullhomolog auf ihrem Torus und berandet auf diesem ein Elementarflächenstück, das innerhalb E_1 liegt. Da nämlich innerhalb E_1 keine Ausnahmeecken der Tori liegen, besteht der Durchschnitt des von E_1 berandeten 3-Simplexes mit den Tori nur aus Elementarflächenstücken[5]), und jede Schnittlinie von $\mathfrak{d}$ mit einem Torus liegt auf einem solchen Elementarflächenstück. Eine auf $\mathfrak{d}$ innerste Schnittlinie mit einem Torus $\mathfrak{T}_j$ kann daher[6]) durch eine s-Abbildung beseitigt werden, welche $\mathfrak{T}_j$ geeignet deformiert, während sie auf den übrigen Tori und außerhalb E_1, also auch auf k, die Identität ist, und es lassen sich so der Reihe nach alle Schnittlinien von $\mathfrak{d}$ mit den Tori beseitigen. Dies kann zudem so geschehen, daß die Schar (E) zulässig in bezug auf die Tori bleibt und daß $\mathfrak{h}$ innerhalb $\mathfrak{P}$ verbleibt. Es liegt dann $\mathfrak{d}$ im Inneren von $\mathfrak{R}$, da dies für den Rand u der Fall ist. Möglicherweise sind hierbei neue Ausnahmeecken der Tori innerhalb E_1 entstanden. Diese stören jedoch die folgenden Schritte nicht und können danach wie im ersten Schritt wieder beseitigt werden. Die Normierung von $\mathfrak{h}$ ist damit beendet.

Vierter Schritt. *Einziehen der im Inneren von* $\mathfrak{h}$ *liegenden Teile.*

Wenn man den Sattel betrachtet, der von $\mathfrak{T}_k$ in der Umgebung der Ausnahmeecke P gebildet wird, so bemerkt man, daß es ein „aufrecht stehendes" 2-Simplex $\mathfrak{a}$ gibt, das an die beiden Satteltäler mit je einer Kante anstößt und dessen dritte Kante q waagerecht ist. P ist Ecke und der höchste Punkt

[5]) Vgl. die Definition der Hauben.
[6]) Vgl. den ersten Schritt.

von $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ kann offenbar so gewählt werden, daß der Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_k$ nur aus den beiden von P ausgehenden Kanten besteht und daß $\mathfrak{a}$ zu den übrigen Tori und zu k punktfremd ist. Wenn $\mathfrak{a}$ hinreichend klein gewählt ist, so liegen auf dem Schartetraeder E' durch q und zwischen E' und dem Schartetraeder E durch P keine Punkte von $\mathfrak{T}_k$, deren Ordnung von Null verschieden ist.

Auf E' liegt eine Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_k$, die durch Vereinigung von s_1 und s_2 entsteht, wenn man E in E' dehnt, und diese berandet auf E' ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$, das durch q in zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ zerlegt wird, die $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ bei der Dehnung von E in E' entsprechen (Fig. 7). $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{a}$ und ein Elementarflächenstück auf $\mathfrak{T}_k$, das $\mathfrak{h}$ umfaßt, beranden eine Kugel $\mathfrak{K}^*$, welche die von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{h}$ berandete Kugel $\mathfrak{K}$ umfaßt. Man kann sagen, daß $\mathfrak{K}^*$ aus $\mathfrak{K}$ durch „Verlängerung" von $\mathfrak{h}$ entsteht.

Wir verlängern nun den innerhalb $\mathfrak{h}$ liegenden Pyramidenmantel $\mathfrak{d}+\mathfrak{r}$ zu einem Elementarflächenstück $\mathfrak{c}$, dessen Rand t auf $\mathfrak{e}_1'$ im Inneren von $\mathfrak{e}_1'$ liegt, das zu den Tori $\mathfrak{T}_i$ und zu k punktfremd ist und das von jedem Schartetraeder zwischen E_1' und E' in nur einer Schnittlinie getroffen wird, also keine Ausnahmeecke besitzt. Daß dies möglich ist, erkennt man ohne weiteres, wenn man E_1' stetig in E' dehnt. $\mathfrak{e}_1'$ wird durch t in ein Elementarflächenstück $\mathfrak{b}$ und einen Kreisring $\mathfrak{s}$ zerlegt. $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beranden zusammen eine auf $\mathfrak{K}^*$ liegende Kugel $\mathfrak{L}$, welche $\mathfrak{L}_1$ umfaßt und die im Inneren von $\mathfrak{h}$ liegenden Teile der Tori $\mathfrak{T}_i$ und der Knotenlinie k enthält, wenn $\mathfrak{c}$ geeignet, d.h. hinreichend nahe an $\mathfrak{T}_k$, gewählt ist, was der Fall sein soll.

Durch eine orientierungserhaltende Ähnlichkeitsabbildung φ bilden wir nun $\mathfrak{L}$ so ab, daß das Bild von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{K}^*$ und unterhalb E liegt und daß $\mathfrak{b}$ auf ein Elementarflächenstück auf $\mathfrak{e}_1'$ abgebildet wird. φ kann so gewählt werden, daß das abgeschlossene Komplement von $\varphi(\mathfrak{L})$ bezüglich $\mathfrak{K}^*$ eine Kugel ist, wobei $\varphi(t)$ punktfremd zum Rande von $\mathfrak{e}_1'$ ist. Wir setzen φ auf den Kreisring $\mathfrak{s}$ so fort, daß φ auf dem Rande von $\mathfrak{e}_1'$ die Identität ist. Dies ist möglich[7]), da $\mathfrak{b}$ als Elementarflächenstück in $\mathfrak{e}_1'$ orientierungserhaltend abgebildet wird. Damit ist φ auf $\mathfrak{e}_1'$ definiert. Auf dem restlichen Teil des Randes von $\mathfrak{K}^*$ definieren wir φ durch die Identität. Nun ist φ auf dem Rande der Kugel definiert, die das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{L}$ bezüglich $\mathfrak{K}^*$ ausmacht, und kann auf diese Kugel fortgesetzt werden. Auf dem Komplement von $\mathfrak{K}^*$ bezüglich des von E' berandeten 3-Simplexes setzen wir φ durch die Identität fort, und außerhalb E' läßt sich schließlich φ so definieren, daß φ dort eine zentrische Abbildung ist. Die Bilder bezüglich φ bezeichnen wir ebenso wie die Urbilder. Bei der Abbildung φ ist die Schar (E) zulässig in bezug auf die Tori $\mathfrak{T}_i$ geblieben, und es ist jeder Punkt der Tori $\mathfrak{T}_i$ in einen von gleicher Ordnung bezüglich (E) übergegangen, nur ist k nicht mehr eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art. Um dies wieder zu erreichen, schieben wir den von $\mathfrak{L}_1$ gebildeten Oberteil von $\mathfrak{L}$ im nächsten Schritt geeignet aus.

[7]) Vgl. KV § 1, Satz 1b und § 2, Hilfssatz 1.

Fünfter Schritt. *Ausschieben der eingezogenen Teile.*

Die „Spitze" S von $\mathfrak{L}$ verbinden wir durch einen zentrisch monotonen Streckenzug h mit einem Punkte von E_1. Das soll so geschehen, daß h zunächst unterhalb E durch das „aufrecht stehende" 2-Simplex $\mathfrak{a}$ und dann durch $\mathfrak{e}_2$ geführt wird und daß h punktfremd zu $\mathfrak{h}$ und damit $\mathfrak{K}$ bleibt. Offenbar kann h punktfremd zu k gewählt werden. Jedoch läßt es sich möglicherweise nicht vermeiden, daß h die Tori $\mathfrak{T}_i$ schneidet. Wenn man das Schartetraeder durch S stetig auf E_1 zusammenzieht, bemerkt man aber, daß man h so führen kann, daß jeder Schnittpunkt von h mit einem Torus ein Punkt der Ordnung -1 ist, also ein Punkt, der isoliert ist im Durchschnitt des betreffenden Schartetraeders mit den Tori, und zwar ein solcher, in welchem eine Schnittlinie von Schartetraeder und Torus beim Zusammenziehen des Tetraeders verschwindet (Minimum der zentrischen Distanz). Mit anderen Worten: Man wähle h so, daß man beim Zusammenziehen des Schartetraeders durch S auf E_1 der Knotenlinie k ausweicht und den Schnittlinien mit den Tori, solange es irgend möglich ist.

Offenbar gibt es einen von Z ausgehenden Projektionsstrahl außerhalb $\mathfrak{P}$, der h nicht trifft. Wie sich aus dem Beweise von Hilfssatz 2 ergibt, kann man durch eine zentrische Abbildung erreichen, daß $\mathfrak{L}$ und h im Inneren des Durchschnittes des Projektionskegels $\mathfrak{P}$ mit einem senkrechten Zylinder $\mathfrak{Z}$ liegen, und die Abbildung kann so gewählt werden, daß $\mathfrak{P}$ affin in sich und damit auch $\mathfrak{L}$ affin abgebildet wird. Nach Hilfssatz 1 läßt sich nun durch eine s-Abbildung des R^3, welche jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt, erreichen, daß h eine senkrechte Strecke ist, und die Abbildung kann so gewählt werden, daß sie unterhalb der waagerechten Ebene durch S und außerhalb $\mathfrak{Z}$ die Identität ist. Wenn man diese Abbildung auf $\mathfrak{Z}$ oberhalb der waagrechten Seite von E_1 geeignet ändert, erhält man eine zentrische Abbildung. Wir können also weiterhin annehmen, daß h eine senkrechte Strecke ist. Die vorangehende Konstruktion hat bewirkt, daß $\mathfrak{L}$ unter P hinweggeschoben ist.

Wir betrachten nun den höchsten Schnittpunkt Q von h mit den Tori. Q liege etwa auf $\mathfrak{T}_j$. Auf der Verlängerung von h über den oberen Endpunkt hinaus wählen wir einen Punkt Q' innerhalb $\mathfrak{P}$ derart, daß die Verbindungsstrecke von Q' zum oberen Endpunkt von h punktfremd zu allen Tori ist. Wenn wir $\mathfrak{T}_j$ mit einer Ebene hinreichend dicht unterhalb Q schneiden, so schneidet diese von $\mathfrak{T}_j$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ ab, das den Punkt Q enthält und das aus dem Kegel der Projektionsstrahlen von Q' nach den Punkten von $\mathfrak{n}$ eine Kugel $\mathfrak{N}$ abschneidet, die punktfremd zu k und den von $\mathfrak{T}_j$ verschiedenen Tori ist und deren Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_j$ nur aus $\mathfrak{n}$ besteht. $\mathfrak{N}$ wird berandet von $\mathfrak{n}$ und einem Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$ auf dem Mantel des Projektionskegels von Q' nach $\mathfrak{n}$. Durch eine s-Abbildung, die auf $\mathfrak{T}_j - \mathfrak{n}$ und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{N}$, insbesondere auf k und den von $\mathfrak{T}_j$ verschiedenen Tori, die Identität ist, läßt sich $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{m}$ überführen. Der Schnittpunkt Q von h mit $\mathfrak{T}_j$ ist damit verschwunden, und es sind keine neuen Ausnahmeecken entstanden. Das Verfahren kann so oft wiederholt werden, bis alle Schnittpunkte von h mit den Tori $\mathfrak{T}_j$ beseitigt sind.

Nunmehr kann $\mathfrak{L}$ ausgeschoben werden. Wir wählen den Punkt S' auf der Verlängerung von h über den oberen Endpunkt hinaus so, daß die Strecke SS' punktfremd zu allen Tori ist und innerhalb $\mathfrak{P}$ liegt. Bringen wir das auf dem Rande von $\mathfrak{L}$ liegende Elementarflächenstück $\mathfrak{d}$ mit einer waagerechten Ebene dicht unterhalb S zum Schnitt, so schneidet diese ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ so von $\mathfrak{d}$ ab, daß $\mathfrak{n}$ von dem Kegel der Projektionsstrahlen von S' nach den Punkten von $\mathfrak{n}$ eine Kugel $\mathfrak{N}$ abschneidet, die punktfremd zu k und allen Tori ist. $\mathfrak{N}$ setzt sich mit $\mathfrak{L}_1$ zu einer Kugel $\mathfrak{M}$ zusammen, welche die Gestalt einer „Pyramide mit eingeknickten Seiten" hat. Offenbar läßt sich nun $\mathfrak{L}_1$ durch eine Abbildung σ semilinear so auf $\mathfrak{M}$ abbilden, daß σ auf dem „Boden" $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{L}_1$ die Identität ist, daß das Bild von $\mathfrak{f}$ auf E_1 liegt ($\mathfrak{f}$ lag auf E_1 vor dem vierten Schritt), und daß Punkte, die in $\mathfrak{L}_1$ auf gleicher Höhe liegen, in Punkte gleicher Höhe übergehen. σ läßt sich außerhalb $\mathfrak{L}_1$ so fortsetzen, daß σ auf den außerhalb $\mathfrak{L}_1$ liegenden Teilen der Tori $\mathfrak{T}_i$ und der Knotenlinie k die Identität ist. Man kann nämlich zunächst eine „Pyramide mit eingeknickten Seiten" $\mathfrak{M}'$ wählen, deren Spitze wenig oberhalb S' auf der Verlängerung von h liegt, die den gleichen Boden $\mathfrak{g}$ wie $\mathfrak{M}$ hat und für die das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{M}$ in bezug auf $\mathfrak{M}'$ eine zu k und allen Tori punktfremde Kugel ist. Dann ist auch das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{L}_1$ bezüglich $\mathfrak{M}'$ eine Kugel, und man kann auf ihr σ so definieren, daß $\mathfrak{M}'$ durch σ auf sich abgebildet wird und daß σ auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$ die Identität ist, so daß σ im Komplement von $\mathfrak{M}'$ durch die Identität definiert werden kann. Nunmehr ist k wieder eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art, und die Brückenzahl ist dieselbe wie ursprünglich. Wenn die Ähnlichkeitsabbildung für $\mathfrak{L}$ im vierten Schritt und die hier benutzte Abbildung σ geeignet gewählt sind, so liegen für die Tori $\mathfrak{T}_i$ auch jetzt keine zwei Punkte mit von Null verschiedener Ordnung auf demselben Schartetraeder.

Durch das Vorangehende ist erreicht, daß für die Haube das von der Grenzlinie s_1 auf E berandete Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$ punktfremd zu k ist. Die Ausnahmeecke P kann daher wie im ersten Schritt beseitigt werden. Falls durch den dritten Schritt Ausnahmeecken innerhalb E_1 entstanden sind, so liegen sie auch jetzt wieder innerhalb E_1 und können ebenfalls nach dem ersten Schritt beseitigt werden, so daß die Anzahl der Ausnahmeecken aller Tori tatsächlich um 1 abgenommen hat. Wir wiederholen dieses Verfahren für alle Tori solange, bis keine Haube mehr vorhanden ist.

§ 6. Beseitigung von Einstülpungen.

Betrachten wir nun für einen der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa für $\mathfrak{T}_h$, alle diejenigen Schnittlinien mit Schartetraedern, die durch eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$ gehen, so bilden diese Paare mit je einem gemeinsamen Punkt, und verschiedene solche Paare sind zueinander punktfremd. Dies folgt daraus, daß jede Ausnahmeecke die Ordnung 1 hat und daß auf keinem Schartetraeder zwei Ausnahmeecken liegen. Unter den betrachteten Schnittlinien kann keine nullhomolog auf $\mathfrak{T}_h$ sein. Es gäbe sonst nämlich auf $\mathfrak{T}_h$ eine innerste, die auf $\mathfrak{T}_h$

ein von weiteren solchen Schnittlinien freies Elementarflächenstück berandete, und dieses müßte eine Haube von $\mathfrak{T}_k$ sein, was nach § 5 nicht mehr möglich ist. Die betrachteten Schnittlinien sind also Meridiane von $\mathfrak{B}_k$, und es sind solche tatsächlich vorhanden, da eine geschlossene Fläche ohne Ausnahmeecke eine 2-Sphäre ist[1]). $\mathfrak{T}_k$ wird durch die betrachteten Schnittlinienpaare in Zweiecke und Kreisringe zerlegt. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{T}_k$ bezüglich der Schar (E) nur aus Knien und Schenkeln besteht. Dabei stößt jedes Knie an zwei Schenkel und jeder Schenkel an zwei Knie an.

Wir können weiterhin annehmen, daß jedes innere Knie der Tori $\mathfrak{T}_i$ das innere Grenztetraeder E_1 von k schneidet und daß E_2 von jedem äußeren Knie geschnitten wird. Falls dies noch nicht der Fall ist, läßt sich dies vermöge der Konstruktion des fünften Schrittes von § 5 erreichen.

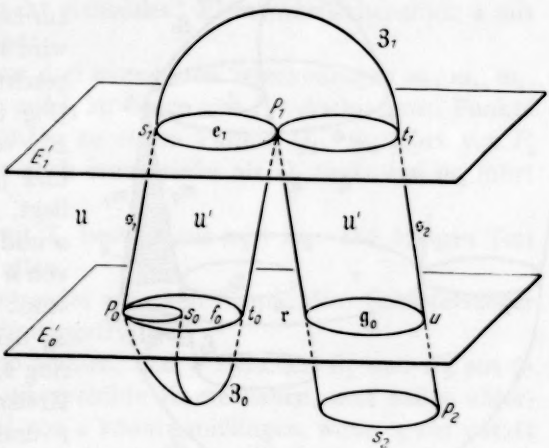


Fig. 8.

Wir betrachten nun einen Schenkel $\mathfrak{s}_1$ von $\mathfrak{T}_k$. In seinen Grenzlinien t_0, s_1 stößt je ein Knie $\mathfrak{z}_0$ bzw. $\mathfrak{z}_1$ von $\mathfrak{T}_k$ an. Das Schartetraeder durch t_0 sei E_0', dasjenige durch s_1 sei E_1'. Auf t_0 und s_1 liegt je eine Ausnahmeecke P_0 bzw. P_1. Durch P_0 geht außer t_0 die zweite Grenzlinie s_0 von $\mathfrak{z}_0$, durch P_1 geht außer s_1 die zweite Grenzlinie t_1 von $\mathfrak{z}_1$. s_1 berandet auf E_1' ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$, das t_1 nicht enthält. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ bilden zusammen ein Elementarflächenstück, das zusammen mit einem von t_0 auf E_0' berandeten Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_0$ eine zwischen E_1' und E_0' liegende Kugel berandet. Es kann nun eintreten, daß s_0 auf $\mathfrak{f}_0$ liegt (Fig. 8). Wenn dies der Fall ist, so wollen wir sagen, daß $\mathfrak{s}_1$ zusammen mit den beiden anstoßenden Knien $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_1$ eine *Einstülpung* von $\mathfrak{T}_k$ bildet. Der Sachverhalt läßt sich auch so ausdrücken: Von E_0' und E_1' wird eine Kugelschale berandet, die durch $\mathfrak{s}_1$ in zwei Kugeln zerlegt wird. Liegen dann s_0, t_1 auf dem Rande derselben Kugel, so läßt sich die andere als das Innere von $\mathfrak{s}_1$ auffassen. Eine Einstülpung liegt vor, wenn eine solche Festlegung des Inneren nicht möglich ist.

Wir werden zeigen, daß sich alle Einstülpungen dadurch beseitigen lassen, daß man sie in zwei Hauben verwandelt. Dies geschieht so, daß man $\mathfrak{T}_k$ längs eines geeigneten Elementarflächenstückes so einbeult, daß (bei geeigneter Bezeichnungsweise) P_1 auf $\mathfrak{z}_0$ zu liegen kommt. Dabei wird eine Fallunterscheidung erforderlich, die von der Lage der zu P_1 benachbarten Ausnahmeecken auf $\mathfrak{T}_k$ abhängt.

[1]) KV § 4, Satz 1. Es wird dort zwar eine Schar paralleler Ebenen statt einer Tetraederschar zugrunde gelegt, der Beweis überträgt sich jedoch ohne weiteres.

$\mathfrak{z}_0, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1$ mögen im folgenden stets eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_k$ darstellen. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir dabei an, daß $\mathfrak{z}_1$ ein inneres Knie ist. In t_1 stößt ein Schenkel $\mathfrak{s}_2$ von $\mathfrak{T}_k$ an. Auf seiner zweiten Grenzlinie s_2 liegt eine Ausnahmeecke P_2 von $\mathfrak{T}_k$. Da P_0 und P_2 verschiedene zentrische Distanz haben, liegt P_2 entweder außerhalb E_0' oder zwischen E_1' und E_0'. Wir unterscheiden diese beiden Fälle als erste und zweite Lage des anstoßenden Schenkels $\mathfrak{s}_2$.

Erster Schritt. *Beseitigung einer Einstülpung, für welche ein anstoßender Schenkel in erster Lage ist, im einfachsten Falle.*

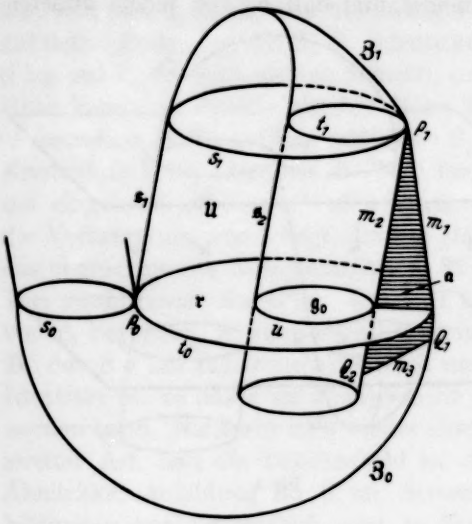


Fig. 9.

Der Schenkel $\mathfrak{s}_2$ sei in erster Lage zur betrachteten Einstülpung. Dann wird $\mathfrak{s}_2$ von E_0' in einer Schnittlinie u geschnitten. u liegt nicht auf $\mathfrak{f}_0$ (Fig. 8). Dehnt man nämlich E_1' in E_0', so entsteht t_0 aus s_1, u aus t_1 und $\mathfrak{f}_0$ aus $\mathfrak{e}_1$. Da t_1 nicht auf $\mathfrak{e}_1$ liegt, kann u nicht auf $\mathfrak{f}_0$ liegen. u und t_0 zerlegen daher E_0' in $\mathfrak{f}_0$, ein von u berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_0$ und einen Kreisring $\mathfrak{r}$. Auf $\mathfrak{T}_k$ beranden t_0 und u einen Kreisring $\mathfrak{s}$, der sich aus $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1$ und einem Kreisring auf $\mathfrak{s}_2$ zusammensetzt. $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ bilden zusammen einen Torus, der in der $\mathfrak{S}^3$ einen Vollring $\mathfrak{U}'$ berandet, für welchen $\mathfrak{f}_0$ und $\mathfrak{g}_0$ Meridianflächen sind. Aus einem Querschnitt von $\mathfrak{r}$, der von t_0 nach u führt, und zwei zentrisch monotonen Streckenzügen, die von den Endpunkten des Querschnittes auf $\mathfrak{s}_1$ bzw. $\mathfrak{s}_2$ nach P_1 führen, erhält man eine Kreislinie[2]) auf dem Rande von $\mathfrak{U}'$, welche die Meridiane t_0, u in genau einem Punkte schneidet. Daraus folgt[3]), daß $\mathfrak{U}'$ unverknotet ist und daß das abgeschlossene Komplement von $\mathfrak{U}'$ bezüglich der $\mathfrak{S}^3$ ein unverknoteter Vollring $\mathfrak{U}$ ist. $\mathfrak{U}$ liegt auf dem von E_0' berandeten 3-Simplex. Wir können annehmen, daß das Scharzentrum Z nicht auf $\mathfrak{U}$ liegt. Wenn dies noch nicht der Fall ist, können wir es dadurch erreichen, daß wir $\mathfrak{z}_1$ so über Z hinwegschlagen, wie dies im zweiten Schritt von § 5 für eine Haube ausgeführt wurde. Nun kann man Z mit einem Punkte von $\mathfrak{f}_0$ durch einen zentrisch monotonen Streckenzug auf $\mathfrak{U}'$ verbinden und wegen Hilfssatz 2 durch eine zentrische Abbildung erreichen, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{g}_0$ innerhalb des Projektionskegels $\mathfrak{P}$ von Z nach den „waagerechten" Tetraederseiten liegen. Dabei wird wieder angenommen, daß Z der höchste Punkt von $\mathfrak{P}$ ist. Die in Fig. 8 gegebene Darstellung ist jetzt durch die von Fig. 9

[2]) Man erhält daraus leicht eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art mit nur einer Brücke.

[3]) KV § 6, Hilfssatz 3 und § 7, Satz 2.

zu ersetzen. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{g}_0$ sollen weiterhin diese Lage haben, so daß wir unsere Betrachtungen innerhalb $\mathfrak{P}$ durchführen können.

Wir betrachten nun zunächst den einfachsten Fall, daß auf $\mathfrak{r}$ außer den Rändern t_0, u keine Schnitte von E_0' mit den Tori $\mathfrak{T}_i$ liegen. Der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{T}_k$ besteht dann nur aus dem Kreisring $\mathfrak{s}$, denn es stößt $\mathfrak{T}_k - \mathfrak{s}$ in t_0 und u von außen an $\mathfrak{U}$ an, und der Rand von $\mathfrak{U}$ ist punktfremd zu den von $\mathfrak{T}_k$ verschiedenen Tori. Keiner dieser Tori kann auf $\mathfrak{U}$ liegen, da jedes äußere Knie das außerhalb E_0' liegende Schartetraeder E_2 trifft und $\mathfrak{U}$ innerhalb E_0' liegt.

Wenn man nun das durch P_1 gehende Schartetraeder E_1' stetig dehnt, so bemerkt man, daß es ein „aufrecht stehendes" Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. Der Rand von $\mathfrak{a}$ besteht aus drei monotonen Streckenzügen m_1, m_2, m_3. Dabei führt m_1 von P_1 zunächst auf $\mathfrak{s}_1$ zu einem von P_0 verschiedenen Punkte auf t_0 und noch etwas weiter auf $\mathfrak{z}_0$ zu einem Punkte Q_1. m_2 führt von P_1 auf $\mathfrak{s}_2$ zu einem Punkte Q_2, der noch etwas tiefer als Q_1 liegt, und m_3 führt schließlich von Q_1 nach Q_2.

2. Der Durchschnitt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{T}_k$ besteht aus $m_1 + m_2$. Die übrigen Tori und k werden von $\mathfrak{a}$ nicht getroffen.

3. $\mathfrak{a}$ wird von jedem Schartetraeder zwischen E_1' und dem Schartetraeder durch Q_2 in nur einem Querschnitt getroffen.

Man kann beispielsweise $\mathfrak{a}$ so wählen, daß $\mathfrak{a}$ zwischen E_1' und E_0' aus 2-Simplexen besteht, die je eine waagerechte Kante haben, und daß $\mathfrak{a}$ unterhalb E_0' senkrecht ist. Die Wahl von $\mathfrak{a}$ könnte mißlingen, wenn s_0 auf $\mathfrak{r}$ statt auf $\mathfrak{f}_0$ läge, also keine Einstülpung vorhanden wäre: Beim Versuche, $\mathfrak{a}$ in der angegebenen Weise zu bestimmen, „bleibt $\mathfrak{a}$ an dem von $\mathfrak{T}_k$ in P_0 gebildeten Sattel hängen".

Beiderseits $\mathfrak{a}$ lassen sich zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ so wählen, daß $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ mit $\mathfrak{a}$ das Randstück m_3 gemein haben, während der restliche Randbogen $m_{11} + m_{12}$ bzw. $m_{21} + m_{22}$ aus zwei von Q_1 und Q_2 ausgehenden monotonen Streckenzügen auf $\mathfrak{T}_k$ besteht, die sich wenig oberhalb P_1 auf $\mathfrak{z}_1$ treffen. Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auf verschiedenen Seiten von $\mathfrak{a}$ liegen sollen, gehen $m_{11} + m_{12}$ und $m_{21} + m_{22}$ nicht über denselben Hang des Sattels von $\mathfrak{T}_k$ in P_1. Wählt man $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ hinreichend dicht an $\mathfrak{a}$, so sind sie zu k und den von $\mathfrak{T}_k$ verschiedenen Tori punktfremd, und man kann $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ außerdem noch so bestimmen, daß ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_k$ nur aus $m_{11} + m_{12}$ bzw. $m_{21} + m_{22}$ besteht und daß sie von jeder waagerechten Ebene zwischen ihrem höchsten und tiefsten Punkt nur in je einem Querschnitt getroffen werden.

Die auf $\mathfrak{T}_k$ liegenden Randstücke von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beranden zusammen auf $\mathfrak{T}_k$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{a}_3$, das P_1 enthält und zusammen mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ eine auf $\mathfrak{U}$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$ berandet. $\mathfrak{K}$ ist punktfremd zu k und den von $\mathfrak{T}_k$ verschiedenen Tori, und der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{T}_k$ besteht aus $\mathfrak{a}_3$. Es gibt daher eine s-Abbildung, die $\mathfrak{a}_3$ in $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ überführt und die auf $\mathfrak{T}_k - \mathfrak{a}_3$, auf k und auf den von $\mathfrak{T}_k$ verschiedenen Tori die Identität ist. Dann wird Q_1 eine Ausnahmeecke der Ordnung 1 von $\mathfrak{T}_k$, während die Ausnahmeecke P_1

verschwunden ist und keine weiteren Ausnahmeecken entstanden sind. Wir wollen sagen, daß wir die *Ausnahmeecke P_1 durch Einbeulen von $\mathfrak{T}_k$ längs $\mathfrak{a}$ nach Q_1 verschoben haben.*

Durch diesen Vorgang ist aus dem Kreisring $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{T}_k$ eine innere Haube entstanden, auf deren Grenzlinie die Ausnahmeecke P_0 liegt. Aus dem Knie $\mathfrak{z}_0$ ist eine äußere Haube entstanden, deren Grenzlinie durch Q_1 geht. Beide Hauben können nach § 5 beseitigt werden, wodurch die Anzahl der Ausnahmeecken von $\mathfrak{T}_k$ um 2 abnimmt.

Zweiter Schritt. *Beseitigung einer beliebigen Einstülpung, für welche ein anstoßender Schenkel in erster Lage ist.*

Die Bezeichnungen seien wie im ersten Schritt, und es mögen wieder $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{z}_0$ in das Innere des Projektionskegels $\mathfrak{P}$ gebracht sein. Auf $\mathfrak{r}$ können jetzt außer den Rändern noch Schnitte von E_0' mit den Tori liegen. Im Inneren von $\mathfrak{U}$ liegen dann möglicherweise Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_i$. In diesem Falle betrachten wir die tiefste von P_0 verschiedene Ausnahmeecke N auf $\mathfrak{U}$. Sie liege etwa auf $\mathfrak{T}_j$. Durch N gehen die beiden Grenzlinien v_1, v_2 eines Knies $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{T}_j$.

Nehmen wir zunächst an, daß $\mathfrak{x}$ ein inneres Knie ist. In diesem Falle schneiden die beiden Schenkel $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ von $\mathfrak{T}_j$, die an $\mathfrak{x}$ anstoßen, E_0' in zwei auf $\mathfrak{r}$ liegenden Schnittlinien. Verschiebt man die waagerechte Ebene durch N parallel zu sich stetig nach unten etwas über die Ebene von $\mathfrak{r}$ hinaus, so bemerkt man, daß man N durch Einbeulen von $\mathfrak{T}_j$ längs eines geeigneten aufrecht stehenden Elementarflächenstückes $\mathfrak{a}$ unterhalb $\mathfrak{r}$ schieben kann. Dies geschieht wie im ersten Schritt. Zwar liegen hier noch Teile der Tori $\mathfrak{T}_i$ auf $\mathfrak{U}$, aber man kann ihnen, ebenso wie k, bei der Wahl von $\mathfrak{a}$ ausweichen. Da nämlich N die tiefste von P_0 verschiedene Ausnahmeecke auf $\mathfrak{U}$ ist, können die beiden Schnittlinien, die beim Verschieben der waagerechten Ebene durch N nach unten auf den Schenkeln $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ entstehen, nicht durch andere Schnittlinien mit den Tori getrennt werden. Mit anderen Worten: Die Wahl von $\mathfrak{a}$ könnte nur daran scheitern, daß $\mathfrak{a}$ in einem Sattel eines Torus hängen bleibt, wenn man $\mathfrak{a}$ von N aus nach unten führen will. Ein solcher Sattel ist aber auf $\mathfrak{U}$ unterhalb N nicht vorhanden, auch in P_0 nicht, da der eine Hang des von $\mathfrak{T}_k$ in P_0 gebildeten Sattels im Komplement von $\mathfrak{U}$ liegt.

Es sei nun $\mathfrak{x}$ ein äußeres Knie. $\mathfrak{x}$ schneidet dann das äußere Grenztetraeder E_2 von k und durchsetzt daher $\mathfrak{r}$ in einer auf $\mathfrak{T}_j$ nullhomologen Schnittlinie. Auch hier ist es möglich, die Ausnahmeecke N durch Einbeulen von $\mathfrak{T}_j$ längs eines aufrecht stehenden Elementarflächenstückes unterhalb $\mathfrak{r}$ zu schieben. Das Einbeulen erfolgt jetzt in das Knie $\mathfrak{x}$ hinein. Dies bereitet jedoch keine Schwierigkeiten. Für das Einbeulen von $\mathfrak{T}_j$ längs $\mathfrak{a}$ ist die Gestalt von $\mathfrak{T}_j$ nur in einer Umgebung des Randes von $\mathfrak{a}$ wesentlich, und für die Wahl von $\mathfrak{a}$ ist nur wesentlich, daß die beiden von der Spitze N ausgehenden Kantenstücke in verschiedenen Tälern eines Sattels von $\mathfrak{T}_j$ liegen. Auch hier ist es möglich, den auf $\mathfrak{U}$ liegenden Teilen der Tori $\mathfrak{T}_i$ auszuweichen, da N die tiefste von P_0 verschiedene Ausnahmeecke auf $\mathfrak{U}$ ist.

Wir bemerken, daß wir so Ausnahmeecken auf $\mathfrak{U}$ der Reihe nach unterhalb $\mathfrak{r}$ schieben können, bis schließlich P_1 die tiefste, von P_0 verschiedene Ausnahmeecke auf $\mathfrak{U}$ ist, und wir können dann P_1 nach dem gleichen Verfahren unterhalb $\mathfrak{r}$ schieben, so daß an Stelle der Einstülpung zwei Hauben von $\mathfrak{T}_h$ entstehen und wieder zwei Ausnahmeecken beseitigt werden können.

Auf diese Weise sollen für die Tori $\mathfrak{T}_i$ alle Einstülpungen beseitigt werden, für welche ein anstoßender Schenkel in erster Lage ist.

Dritter Schritt. *Beseitigung von Einstülpungen, bei welchen die anstoßenden Schenkel in zweiter Lage sind.*

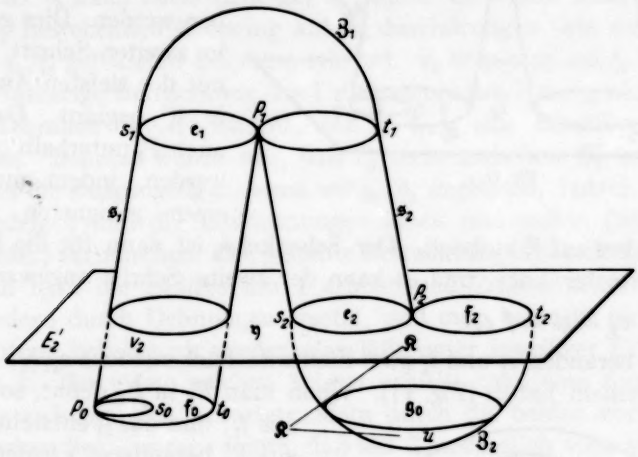


Fig. 10.

Wir behalten die bisherigen Bezeichnungen bei, soweit sie in dem jetzt betrachteten Falle noch eine Bedeutung haben. Die Ausnahmeecke P_2 auf der Grenzlinie s_2 von $\mathfrak{s}_2$ liegt jetzt zwischen E_1' und E_0'. Das Schartetraeder E_2' durch P_2 schneidet daher $\mathfrak{s}_1$ in einer Schnittlinie v_2. In s_2 stößt ein äußeres Knie $\mathfrak{z}_2$ von $\mathfrak{T}_h$ an $\mathfrak{s}_2$ an. Die zweite Grenzlinie von $\mathfrak{z}_2$ sei t_2. s_2 und t_2 zerlegen E_2' in zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_2$ und ein Zweieck $\mathfrak{y}$. Dabei werde $\mathfrak{e}_2$ von s_2 berandet. Für die Lage von v_2 sind 3 Fälle denkbar:

Fall 1. v_2 liegt auf $\mathfrak{y}$ (Fig. 10).
Fall 2. v_2 liegt auf $\mathfrak{e}_2$ (Fig. 11).
Fall 3. v_2 liegt auf $\mathfrak{f}_2$ (Fig. 12).

Fall 1 führen wir durch Deformation auf den zweiten Schritt zurück. Von den beiden anderen Fällen werden wir zeigen, daß sie wegen des zweiten Schrittes nicht mehr möglich sind.

Fall 1. v_2 liegt auf $\mathfrak{y}$.

In diesem Falle (Fig. 10) betrachten wir die von $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{z}_2$ gebildete 2-Sphäre. Sie berandet in der $\mathfrak{S}^3$ eine Kugel $\mathfrak{R}$, die mit dem von E_2' berandeten 3-Simplex nur $\mathfrak{e}_2+\mathfrak{f}_2$ gemein hat. Da v_2 nicht auf $\mathfrak{e}_2+\mathfrak{f}_2$ liegt, ist $\mathfrak{s}_1$ punktfremd zu $\mathfrak{R}$, und es liegt P_0 nicht auf $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ schneidet aus E_0' ein Elementar-

flächenstück $\mathfrak{g}_0$ aus, das von $\mathfrak{K}$ eine innerhalb E_0' liegende Kugel $\mathfrak{K}'$ abschneidet. Vermöge $\mathfrak{s}_1$ erkennt man, daß sich Hilfssatz 2 auf $\mathfrak{K}'$ anwenden läßt, so daß angenommen werden kann, daß $\mathfrak{K}'$ im Inneren des Projektionskegels vom Scharzentrum nach den waagerechten Tetraederseiten liegt. Innerhalb $\mathfrak{K}'$ liegen möglicherweise Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_i$. Da aber P_0 nicht auf $\mathfrak{K}'$ liegt, können sie bei festem P_0 der Reihe nach unterhalb $\mathfrak{g}_0$ geschoben werden. Dies geschieht wie im zweiten Schritt, indem man mit der tiefsten Ausnahmeecke in $\mathfrak{K}'$ beginnt. Danach kann auch P_2 unterhalb $\mathfrak{g}_0$ geschoben werden, indem man $\mathfrak{z}_2$ längs eines geeigneten Elementarflächenstückes auf $\mathfrak{K}$ einbeult. Der Schenkel $\mathfrak{s}_2$ ist dann für die Einstülpung $\mathfrak{z}_0, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1$ in erster Lage, und es kann der zweite Schritt angewandt werden.

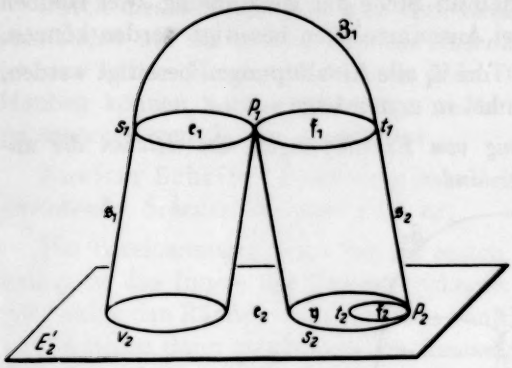


Fig. 11.

Fall 2. v_2 liegt auf $\mathfrak{e}_2$.

Auf E_1' beranden s_1 und t_1 zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{f}_1$, die nur den Punkt P_1 gemein haben (Fig. 11). Wenn man E_1' in E_2' dehnt, so entsteht s_2 aus t_1, und aus $\mathfrak{f}_1$ entsteht ein von s_2 auf E_2' berandetes Elementarflächenstück, das v_2 nicht enthält, also im vorliegenden Falle aus $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{y}$ bestehen muß. Dann bilden aber $\mathfrak{z}_2, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_1$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_k$, für welche der anstoßende Schenkel $\mathfrak{s}_1$ in erster Lage ist (vgl. Fig. 8 und 11). Nach dem zweiten Schritt ist dies nicht mehr möglich.

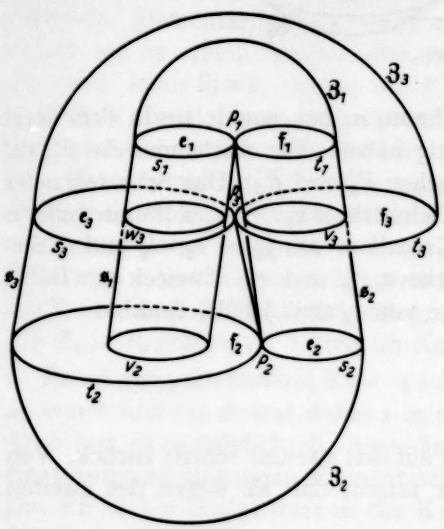


Fig. 12.

Fall 3. v_2 liegt auf $\mathfrak{f}_2$.

In diesem Falle (Fig. 12) betrachten wir den an t_2 anstoßenden Schenkel $\mathfrak{s}_3$ von $\mathfrak{T}_k$. Auf der zweiten Grenzlinie s_3 von $\mathfrak{s}_3$ liegt eine Ausnahmeecke P_3. Zieht man das Schartetraeder E_2' zusammen, so entstehen aus v_2, s_2, t_2 Schnittlinien mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3$, wobei die Schnitte mit $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ durch denjenigen mit $\mathfrak{s}_3$ getrennt werden. Zieht man E_2' bis auf E_1' zusammen, so vereinigen sich die aus v_2, s_2 entstehenden Schnittlinien in P_1. Da $\mathfrak{T}_k$ singularitätenfrei ist, kann auf E_1' keine Schnittlinie mit $\mathfrak{s}_3$ vorhanden sein, d. h. das Schartetraeder E_3' durch P_3 liegt zwischen E_2' und E_1'.

Beim Zusammenziehen von E_2' auf E_3' entsteht aus $\mathfrak{f}_2$ ein von s_3 auf E_3' berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_3$, das eine Schnittlinie w_3 mit $\mathfrak{s}_1$ besitzt. An s_3 stößt das Knie $\mathfrak{z}_3$ von $\mathfrak{T}_k$ an, dessen zweite Grenzlinie t_3 sei. Läge t_3 auf $\mathfrak{e}_3$, so bildeten $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{s}_3$, $\mathfrak{z}_2$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_k$, für welche der anstoßende Schenkel $\mathfrak{s}_2$ in erster Lage ist. Nach dem zweiten Schritt ist dies nicht mehr möglich. s_3 und t_3 zerlegen daher E_3' in $\mathfrak{e}_3$, ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_3$ und ein Zweieck $\mathfrak{y}_3$.

Auf E_3' liegt eine Schnittlinie v_3 mit $\mathfrak{s}_2$. Diese kann nicht auf $\mathfrak{e}_3$ liegen, da s_2 nicht auf $\mathfrak{f}_2$ liegt und v_3, $\mathfrak{e}_3$ aus s_2, $\mathfrak{f}_2$ beim Zusammenziehen von E_2' auf E_3' entstehen. v_3 kann auch nicht auf $\mathfrak{y}_3$ liegen. Es würde sonst $\mathfrak{z}_3$ von dem aus $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{s}_2$ bestehenden Kreisring auf $\mathfrak{T}_k$ durchdrungen, wie man vermöge der von $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{f}_3$ gebildeten 2-Sphäre erkennt. v_3 liegt also auf $\mathfrak{f}_3$.

Für die bisherige Betrachtung des Falles wurde das Knie $\mathfrak{z}_0$ nicht benutzt, also kein Gebrauch davon gemacht, daß $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{z}_1$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_k$ bilden sollen. Benutzt wurde nur, daß P_0 nicht zwischen E_1' und E_2' liegt. Wir erhalten die Ausgangsfigur, wenn wir $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{s}_1$ weglassen, danach die Indizes um 1 erniedrigen und die Bezeichnungen innen und außen (bezüglich der Schartetraeder) vertauschen. Die gesamte Betrachtung läßt sich daher wiederholen, wenn man die Indizes um 1 erhöht und Zusammenziehungen von Schartetraedern durch Dehnungen ersetzt, und man bemerkt nun, daß sich die Betrachtung beliebig oft wiederholen läßt unter jeweiliger Erhöhung der Indizes um 1. Bei jedem solchen Schritt erhielte man eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_k$, die zwischen den Schartetraedern durch die beiden vorangehenden Ausnahmeecken liegt, woraus folgte, daß auf $\mathfrak{T}_k$ unendlich viele verschiedene Ausnahmeecken liegen, was nicht der Fall ist. Der hier behandelte Fall kann also nicht mehr eintreten.

Wie sich aus dem Vorangehenden ergibt, lassen sich für die Tori $\mathfrak{T}_i$ alle verbliebenen Einstülpungen beseitigen. Danach ist die gewünschte Gestalt der Tori erreicht, was wir im folgenden zeigen werden.

§ 7. Abschluß des Beweises von Hilfssatz 7.

Wir betrachten irgendeinen der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa $\mathfrak{T}_k$. Er besteht nur aus Knien und Schenkeln, wobei jedes innere Knie das Grenztetraeder E_1, jedes äußere Knie das Grenztetraeder E_2 von k schneidet. Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{T}_k$ bezüglich der Schar (E) in Brückenform ist, müssen wir nur noch zeigen, daß für jedes Knie die beiden Grenzlinien auf ihrem Schartetraeder zwei Meridianflächen von $\mathfrak{V}_k$ beranden.

$\mathfrak{T}_k$ besitzt mehr als zwei Schenkel. Anderenfalls bestände $\mathfrak{T}_k$ nur aus zwei Schenkeln und zwei Knien und wäre damit offenbar in Brückenform. Nach Hilfssatz 6 und Satz 1 wäre dann aber $\mathfrak{V}_k$ unverknotet im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es seien $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ Schenkel, $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ Knie von $\mathfrak{T}_k$ (Fig. 13). Dabei habe $\mathfrak{z}_i$ $(i=0, 1, 2)$ mit $\mathfrak{s}_i$ die Grenzlinie s_i, mit $\mathfrak{s}_{i+1}$ die Grenzlinie t_i gemein. Wir sagen, daß die Knie $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_2$ zu $\mathfrak{z}_1$ benachbart sind. Das Schartetraeder durch die Grenzlinien von $\mathfrak{z}_i$ sei E_i'. s_i und t_i beranden auf E_i' zwei

Elementarflächenstücke e_i, f_i, die nur einen Punkt P_i gemein haben. Dehnt man[1]) E_1' in E_0' bzw. E_2', so entsteht f_0 aus e_1 bzw. e_2 aus f_1, da andernfalls $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{z}_2$ eine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$ bildeten.

Es sei jetzt E_1' das innerste Schartetraeder, auf dem eine Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$ liegt. Auf E_1' liegen die Meridiane s_1, t_1 von $\mathfrak{V}_h$, und es liegen auf E_1' keine weiteren Meridiane von $\mathfrak{V}_h$, da ein solcher auf einem von $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ verschiedenen Schenkel von $\mathfrak{T}_h$ liegen müßte, woraus die Existenz einer Ausnahmeecke von $\mathfrak{T}_h$ innerhalb E_1' folgte im Widerspruch zur Annahme. Auf e_1, f_1 liegen möglicherweise noch Schnitte mit Knien von $\mathfrak{T}_h$, also Schnitte, die nullhomolog auf $\mathfrak{T}_h$ sind. Durch Deformation von e_1 und f_1 kann man diese Schnitte beseitigen[2]), wodurch man aus e_1, f_1 Meridianflächen von $\mathfrak{V}_h$ erhält. Es ergibt sich, daß e_1 und f_1 in ihren Rändern vom Inneren des Vollringes $\mathfrak{V}_h$ her an $\mathfrak{T}_h$ anstoßen. Für diesen Sachverhalt wollen wir sagen, daß $\mathfrak{V}_h$ an $\mathfrak{z}_1$ von innen anstößt.

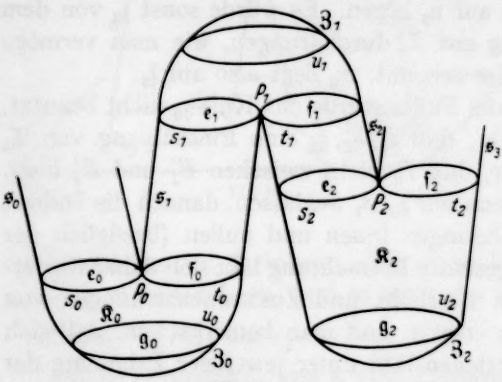


Fig. 13.

Ist jetzt $\mathfrak{z}_{11}$ ein beliebiges Knie von $\mathfrak{T}_h$, an das $\mathfrak{V}_h$ von innen anstößt, so folgt aus der Tatsache, daß keine Einstülpung von $\mathfrak{T}_h$ vorhanden ist, sofort (Fig. 13), daß $\mathfrak{V}_h$ auch an die zu $\mathfrak{z}_{11}$ benachbarten Knie von innen anstößt, und es ergibt sich damit, daß $\mathfrak{V}_h$ an alle Knie von $\mathfrak{T}_h$ von innen anstößt.

Es sei nun $\mathfrak{z}_{11}$ irgendein inneres Knie von $\mathfrak{T}_h$. Die zu $\mathfrak{z}_{11}$ benachbarten Knie $\mathfrak{z}_{10}, \mathfrak{z}_{12}$ sind dann äußere Knie, und wir bezeichnen sie als benachbarte äußere Knie von $\mathfrak{T}_h$. Es liege E_2' etwa im Inneren von E_0'. E_2' schneidet dann $\mathfrak{s}_1$ in einer Schnittlinie v_2. Diese liegt sicher nicht auf e_2, sie kann auch nicht auf f_2 liegen, weil sich sonst durch die Schlußweise des Falles 3 von § 6 Schritt 3 ergäbe, daß es auf $\mathfrak{T}_h$ unendlich viele verschiedene Ausnahmeecken gibt (Fig. 12). f_0 liegt daher nicht auf der von e_2, f_2 und $\mathfrak{z}_{12}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Kugel $\mathfrak{K}_2$, die mit dem von E_2' berandeten 3-Simplex nur $e_2 + f_2$ gemein hat. Das Schartetraeder E_0' schneidet $\mathfrak{z}_{12}$ in einer Schnittlinie v_0. v_0 liegt sicher nicht auf f_0, wie durch Dehnung von E_1' in E_0' zu erkennen ist. v_0 liegt auch nicht auf e_0. Durch Betrachtung von $\mathfrak{s}_0$ und der weiteren folgenden Knie und Schenkel $\mathfrak{z}_{-1}, \mathfrak{s}_{-1}, \mathfrak{z}_{-2}, \ldots$ erhielte man nämlich durch eine Schlußweise, die derjenigen des dritten Falles von § 6 Schritt 3 entspricht, daß es unendlich viele Ausnahmeecken auf $\mathfrak{T}_h$ gäbe. Da nun f_0 nicht in $\mathfrak{K}_2$ liegt und $e_0 + f_0$ zum Rande von $\mathfrak{K}_2$ punktfremd ist, ist die Kugel $\mathfrak{K}_0$, die von e_0, f_0 und $\mathfrak{z}_{10}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandet wird und die mit dem von E_0' berandeten 3-Simplex nur $e_0 + f_0$ gemein hat, punktfremd zu $\mathfrak{K}_2$. $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_2$ schneiden also aus dem

[1]) Es ist zugelassen, daß der Dehnungsfaktor kleiner als 1 ist.

[2]) KV § 9, Hilfssatz 6.

Grenztetraeder E_2 von k zwei disjunkte Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_2$ aus, die von je einer Schnittlinie u_0 bzw. u_2 von E_2 mit $\mathfrak{z}_0$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ berandet werden. $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_2$ stoßen mit ihren Rändern vom Inneren des Vollringes $\mathfrak{V}_k$ her an $\mathfrak{T}_k$ an, denn es entsteht $\mathfrak{g}_0$ bzw. $\mathfrak{g}_2$ aus $\mathfrak{e}_0+\mathfrak{f}_0$ bzw. $\mathfrak{e}_2+\mathfrak{f}_2$, wenn man E_0' bzw. E_2' in E_2 dehnt, und es stößt $\mathfrak{V}_k$ an $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_2$ von innen an.

Es sei nun u_2 eine auf E_2 innerste Schnittlinie von E_2 mit $\mathfrak{T}_k$, d.h. u_2 berandet auf E_2 ein Elementarflächenstück, das außer seinem Rand keine weitere Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_k$ enthält. Dieses Elementarflächenstück muß $\mathfrak{g}_2$ sein, da sonst u_0 auf ihm läge. Da nun jedes äußere Knie von E_2 geschnitten wird und auf $\mathfrak{g}_2$ keine Schnitte mit $\mathfrak{T}_k$ liegen, können auch auf $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{f}_2$ keine Schnitte mit $\mathfrak{T}_k$ liegen, d.h. $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{f}_2$ sind Meridianflächen von $\mathfrak{V}_k$. Entsprechend folgt, daß auch $\mathfrak{f}_1$ Meridianfläche von $\mathfrak{V}_k$ ist und daß die zweite Grenzlinie s_3 des Schenkels $\mathfrak{s}_3$ auf ihrem Schartetraeder eine Meridianfläche $\mathfrak{e}_3$ von $\mathfrak{V}_k$ berandet.

Wir sind am Ziele, wenn wir noch zeigen, daß jeder Schnitt von E_2 und $\mathfrak{T}_k$ ein auf E_2 innerster Schnitt ist. Wir betrachten dazu eine Schnittlinie u_{2r} von $\mathfrak{T}_k$ mit E_2, die auf E_2 ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{2r}'$ berandet, das außer seinem Rande noch Schnitte $u_2, u_4, \ldots, u_{2r-2}$ mit $\mathfrak{T}_k$ besitzt, wobei jedoch jeder solcher Schnitt ein auf $\mathfrak{g}_{2r}'$ innerster ist, d.h. auf $\mathfrak{g}_{2r}'$ ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{2j}$ $(j=1, 2, \ldots, r-1)$ berandet. Offenbar ist eine solche Schnittlinie u_{2r} stets vorhanden. u_{2r} zerlegt E_2 in $\mathfrak{g}_{2r}'$ und ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{2r}$. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{g}_{2r}$ außer seinem Rande keine Schnittlinie mit $\mathfrak{T}_k$ enthält.

u_{2j} $(j=1, 2, \ldots, r)$ liege auf dem Knie $\mathfrak{z}_{2j}$ von $\mathfrak{T}_k$. $\mathfrak{g}_{2r}'$ stößt mit seinem Rande von außen an $\mathfrak{V}_k$ an, da $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_4, \ldots, \mathfrak{g}_{2r-2}$ im Inneren von $\mathfrak{V}_k$ liegen. $\mathfrak{g}_{2r}$ stößt also mit seinem Rande vom Inneren des Vollringes $\mathfrak{V}_k$ her an $\mathfrak{T}_k$ an, und die zu $\mathfrak{z}_{2r}$ benachbarten äußeren Knie sind unter den Knien $\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_4, \ldots, \mathfrak{z}_{2r-2}$ vorhanden. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}_{2r-2}$ die zu $\mathfrak{z}_{2r}$ benachbarten äußeren Knie von $\mathfrak{T}_k$ sind. Da u_2 und u_{2r-2} auf E_2 innerste Schnitte von E_2 und $\mathfrak{T}_k$ sind, beranden die Grenzlinien von $\mathfrak{z}_2$ bzw. $\mathfrak{z}_{2r-2}$ auf ihrem Schartetraeder zwei Meridianflächen $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_2$ bzw. $\mathfrak{e}_{2r-2}$, $\mathfrak{f}_{2r-2}$ von $\mathfrak{V}_k$. $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{f}_{2r-2}$ zerlegen $\mathfrak{V}_k$ in zwei Kugeln, wobei $\mathfrak{K}$ diejenige sei, auf derem Rande $\mathfrak{z}_{2r}$ liegt. $\mathfrak{g}_{2r}$ hat mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ nur seinen Rand u_{2r} gemein und stößt in u_{2r} vom Inneren von $\mathfrak{V}_k$ her an $\mathfrak{T}_k$ an. $\mathfrak{g}_{2r}$ liegt daher ganz auf $\mathfrak{K}$ und damit auf $\mathfrak{V}_k$. u_{2r} ist tatsächlich ein auf E_2 innerster Schnitt von E_2 und $\mathfrak{T}_k$, und es sind nur solche vorhanden. Der Beweis des Hilfssatzes ist damit beendet.

§ 8. Minimale Brückenzahl und Vielfachheit von Begleitknoten.

Wir erinnern zunächst an einige Definitionen. Die Knotenlinie k stelle den Knoten $\varkappa$ dar. $\mathfrak{V}$ sei ein *verknoteter* Vollring, der k *nichttrivial im Inneren* enthält, d.h. so, daß k nicht Seele von $\mathfrak{V}$ ist und nicht in einer auf $\mathfrak{V}$ liegenden Kugel enthalten ist. α sei die *Ordnung* von $\mathfrak{V}$ in bezug auf k, d.h. jede Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ trifft k in mindestens α Punkten, und es gibt eine solche, die k in nur α Punkten trifft. $\mathfrak{V}$ stellt dann mit k einen *Begleitknoten* λ *der*

Ordnung α *von* $\varkappa$ dar, wobei[1]) $\alpha \geq 1$ ist. Falls k auf $\mathfrak{V}$ nullhomolog ist, ist λ nichtorientiert und wird durch die Seelen von $\mathfrak{V}$ dargestellt. Falls k auf $\mathfrak{V}$ nicht nullhomolog ist, ist λ orientiert und wird durch diejenigen orientierten Seelen von $\mathfrak{V}$ dargestellt, für welche ein positives Vielfaches homolog zu k auf $\mathfrak{V}$ ist. Ein System von Vollringen $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ heißt *bezüglich* k *nebengeordnet*, wenn jeder dieser Vollringe mit k einen Begleitknoten von $\varkappa$ darstellt und die abgeschlossenen Komplemente der übrigen Vollringe im Inneren enthält.

Satz 2. *Die Knotenlinie* k *stelle den Knoten* $\varkappa$ *dar.* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *mögen sich als Begleitknoten der Ordnung* α *von* $\varkappa$ *durch ein bezüglich* k *nebengeordnetes System von Vollringen* $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ *darstellen lassen. Bezeichnet* $b(\lambda_i)$ *bzw.* $b(\varkappa)$ *die minimale Brückenzahl von* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *bzw.* $\varkappa$, *so gilt*:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \left(b(\lambda_i) - 1\right) + \alpha \leq b(\varkappa). \tag{1}$$

Beweis. Das Zentrum der Schar konzentrischer Tetraeder (E) des R^3 liege im Inneren von $\mathfrak{E}^3$. Wir können annehmen, daß k eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art bezüglich (E) von $\varkappa$ mit der Brückenzahl $b(\varkappa)$ ist. Wegen Hilfssatz 7 kann angenommen werden, daß die Ränder $\mathfrak{T}_i$ der Vollringe $\mathfrak{V}_i$ in Brückenform bezüglich (E) sind, wobei keine zwei Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_i$ auf demselben Schartetraeder liegen und jedes innere Knie das innere Grenztetraeder E_1 von k trifft.

Der Durchschnitt von E_1 mit einem der Vollringe $\mathfrak{V}_i$, etwa $\mathfrak{V}_h$, besteht aus paarweise disjunkten Elementarflächenstücken, die wir als *bezüglich* $\mathfrak{V}_h$ *innere Elementarflächenstücke* bezeichnen wollen. Sei e ein solches. Das abgeschlossene Komplement von e bezüglich E_1 nennen wir das *zu* e *komplementäre Elementarflächenstück*. Auf ihm liegen alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_h$.

Der Durchschnitt von $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ und E_1 besteht aus paarweise disjunkten Flächenstücken, die einfach oder mehrfach zusammenhängend sind, je nachdem sie einen oder mehrere Ränder besitzen. Wir bezeichnen sie als *innere Flächenstücke*.

Es ist unsere Absicht, die Brücken von k mit Hilfe der inneren Flächenstücke abzuzählen. Dazu benötigen wir die Anzahl γ der inneren Flächenstücke. Bezeichnet β_i die Anzahl der inneren Knie von $\mathfrak{T}_i$, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - 1) + 1 = \gamma. \tag{2}$$

Um zu dieser Gleichung zu gelangen, beweisen wir zunächst durch vollständige Induktion nach n, daß es für ein System von n Vollringen, die bezüglich einer Knotenlinie nebengeordnet sind und deren Ränder die angegebene Brückenform besitzen, stets ein bezüglich eines Vollringes inneres Elementarflächenstück auf E_1 gibt, das alle Schnitte von E_1 mit den Rändern der übrigen Vollringe enthält. Für $n = 1$ ist diese Aussage trivial. Sie gelte

[1]) KV § 9, Satz 1.

für je $n-1$ Vollringe der bezeichneten Lage mit $n-1 \geq 1$. Betrachten wir nun n solche Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$, wobei $\mathfrak{T}_i$ wieder der Rand von $\mathfrak{V}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sei. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für einen der Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$, etwa für $\mathfrak{V}_1$, ein bezüglich $\mathfrak{V}_1$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$, das alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$ enthält. Liegen auf $\mathfrak{e}_1$ auch alle Schnitte von E_1 und $\mathfrak{T}_n$, so ist nichts zu zeigen. Es gebe nun einen Schnitt von E_1 und $\mathfrak{T}_n$, der nicht auf $\mathfrak{e}_1$ liegt. Da $\mathfrak{T}_n$ im Inneren von $\mathfrak{V}_1$ liegt, muß jeder Schnitt von E_1 und $\mathfrak{T}_n$ auf einem bezüglich $\mathfrak{V}_1$ inneren Flächenstück liegen. Es gibt also ein von $\mathfrak{e}_1$ verschiedenes bezüglich $\mathfrak{V}_1$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_1$, das einen Schnitt mit $\mathfrak{T}_n$ besitzt. Der Rand von $\mathfrak{f}_1$ liegt auf $\mathfrak{T}_1$ und damit im Inneren von $\mathfrak{V}_n$. Er liegt also auf einem bezüglich $\mathfrak{V}_n$ inneren Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n$. $\mathfrak{f}_1$ kann nicht auf $\mathfrak{e}_n$ liegen, da sonst $\mathfrak{f}_1$ nicht von $\mathfrak{T}_n$ geschnitten würde. Also enthält $\mathfrak{e}_n$ das zu $\mathfrak{f}_1$ komplementäre Elementarflächenstück. Auf diesem liegen nun alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_1$ und auch $\mathfrak{e}_1$. Also liegen auf dem bezüglich $\mathfrak{V}_n$ inneren Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n$ alle Schnitte von E_1 mit $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Wir beweisen nun Gl. (2) für Vollringe der bezeichneten Lage durch vollständige Induktion. Für $n=1$ ist $\beta_1=\gamma$, also Gl. (2) richtig. Gl. (2) gelte nun für je $n-1$ Vollringe der bezeichneten Lage mit $n-1 \geq 1$. Betrachten wir nun n solche Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$, so gibt es bei geeigneter Numerierung nach dem Vorangehenden ein bezüglich $\mathfrak{V}_n$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n$, das alle Schnitte von E_1 mit den Rändern $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$ der Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ enthält. Das zu $\mathfrak{e}_n$ komplementäre Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_n'$ liegt dann auf einem für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ inneren Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$. Es liegt nämlich der Rand von $\mathfrak{e}_n'$ im Inneren von $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$, da dies für $\mathfrak{T}_n$ der Fall ist, und $\mathfrak{e}_n'$ trifft $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_{n-1}$ nicht. Die von $\mathfrak{f}$ verschiedenen für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ inneren Flächenstücke liegen also auf $\mathfrak{e}_n$ und sind innere Flächenstücke für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$. Aus dem für $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_{n-1}$ inneren Flächenstück $\mathfrak{f}$ entstehen bei Hinzunahme von $\mathfrak{V}_n$ nun β_n für $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ innere Flächenstücke, nämlich $\mathfrak{f}-\mathfrak{e}_n'$ und β_n-1 bezüglich $\mathfrak{V}_n$ innere Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{e}_n'$. Die Anzahl der inneren Flächenstücke erhöht sich also bei Hinzunahme von $\mathfrak{V}_n$ um β_n-1. Gl. (2) ist damit bewiesen.

Nach Hilfssatz 6 ist $b(\lambda_i) \leq \beta_i$ für $i=1, 2, \ldots, n$, also wegen Gl. (2)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(b(\lambda_i) - 1\right) + 1 \leq \gamma.$$

Wir erhalten hieraus Ungleichung (1), wenn wir noch zeigen, daß

$$\alpha\gamma \leq b(\varkappa) \tag{3}$$

ist. Da k im Inneren aller Vollringe $\mathfrak{V}_i$ liegt, besteht der Durchschnitt einer Brücke k_1 von k mit E_1 aus einem Streckenzug, der auf einem inneren Flächenstück $\mathfrak{f}$ liegt. Wir wollen sagen, daß $\mathfrak{f}$ *die Brücke* k_1 *berührt*. Eine Brücke von k kann nicht von zwei verschiedenen inneren Flächenstücken berührt werden.

Wir erhalten Ungleichung (3), wenn wir zeigen, daß jedes innere Flächenstück mindestens α Brücken von k berührt.

Wir betrachten zunächst ein inneres Flächenstück $\mathfrak{f}$, das einfach zusammenhängend ist. Sein Rand liegt auf einem inneren Knie der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa auf dem Knie $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{T}_h$. Die Grenzlinien von $\mathfrak{z}$ beranden auf ihrem Schartetraeder E zwei Meridianflächen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}_h$, und es beranden $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{z}$ eine auf $\mathfrak{V}_h$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$. Dabei ist $\mathfrak{f}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und E_1, da E_1 den Rand von $\mathfrak{K}$ nur im Rande von $\mathfrak{f}$ schneidet und $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{V}_h$ liegt. Der Durchschnitt von k mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ kann nur aus Punkten von $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ bestehen, da $\mathfrak{z}$ zu k punktfremd ist, und besteht daher aus Schnittpunkten von $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ mit zentrisch monotonen Streckenzügen von k. Auf $\mathfrak{m}_1$ müssen mindestens α solche Schnittpunkte liegen, ebenso auf $\mathfrak{m}_2$, da $\mathfrak{V}_h$ in bezug auf k die Ordnung α hat. $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ liegt auf dem Schartetraeder E, kann also mit einem zentrisch monotonen Streckenzug von k höchstens einen Punkt gemein haben. Durch $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ dringen somit mindestens 2α zentrisch monotone Streckenzüge von k ins Innere von $\mathfrak{K}$ ein, und jeder solche Streckenzug besitzt einen Endpunkt auf $\mathfrak{f}$, da $\mathfrak{f}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und E_1 ausmacht. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{f}$ mindestens α Brücken von k berührt.

Sei nun $\mathfrak{f}$ ein inneres Flächenstück, das mehrfach zusammenhängend ist. Seine Ränder seien $s_1, s_2, \ldots, s_r$. Jeder Rand liegt auf einem inneren Knie der Tori $\mathfrak{T}_i$, etwa s_j auf $\mathfrak{z}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Keine zwei dieser Knie können auf demselben Torus liegen, da verschiedene Knie desselben Torus aus E_1 disjunkte Elementarflächenstücke ausschneiden, die innere bezüglich des zugehörigen Vollringes sind. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{z}_j$ auf $\mathfrak{T}_j$ liegt. s_j zerlegt dann E_1 in ein bezüglich $\mathfrak{V}_j$ inneres Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_j$ und das dazu komplementäre Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_j'$, und es ist $\mathfrak{f}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_r$. Unter den Schartetraedern durch die Grenzlinien der Knie $\mathfrak{z}_j$ sei E das innerste. Da keine zwei Ausnahmeecken der Tori $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_n$ auf demselben Schartetraeder liegen, geht E durch die Grenzlinien nur eines Knies $\mathfrak{z}_j$, etwa durch diejenigen von $\mathfrak{z}_1$. Die Grenzlinien von $\mathfrak{z}_1$ beranden auf E zwei Meridianflächen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}_1$, die genau einen Punkt P gemein haben. $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{z}_1$ beranden eine auf $\mathfrak{V}_1$ liegende Kugel $\mathfrak{K}_1$, deren Durchschnitt mit E_1 aus $\mathfrak{e}_1$ besteht. $\mathfrak{e}_1$ setzt sich aus $\mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_r'$ und $\mathfrak{f}$ zusammen, da $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{e}_1$ liegt und $s_2, \ldots, s_r$ Ränder von $\mathfrak{f}$ sind. Da $\mathfrak{K}_1$ auf dem von E berandeten 3-Simplex liegt und die Grenzlinien der Knie $\mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_r$ außerhalb E liegen, besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{z}_j$ $(j = 2, \ldots, r)$ aus einem Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_j'$, das $\mathfrak{s}_j$ enthält und dessen Rand t_j auf $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ liegt. $t_2, \ldots, t_r$ beranden auf $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ paarweise disjunkte Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$, die aus $\mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_r'$ entstehen, wenn man E_1 in E dehnt. Ersetzt man nun $\mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$ durch $\mathfrak{g}_2', \ldots, \mathfrak{g}_r'$, so entstehen aus $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2'$, die nur den Punkt P gemein haben. $\mathfrak{m}_1'$ und $\mathfrak{m}_2'$ sind Meridianflächen von $\mathfrak{V}_1$, da ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{T}_1$ nur aus den Rändern der Meridianflächen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ von $\mathfrak{V}_1$ besteht. $\mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2', \mathfrak{z}_1$ beranden eine auf $\mathfrak{K}_1$ liegende Kugel $\mathfrak{K}$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ mit E_1 ist $\mathfrak{f}$. Der Durchschnitt von E_1 mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ besteht nämlich aus den Rändern von $\mathfrak{f}$, und $\mathfrak{f}$ stößt mit dem Rande s_1

im Inneren von $\mathfrak{K}$ an $\mathfrak{z}_1$ an. Da $\mathfrak{V}_1$ in bezug auf k die Ordnung α hat, liegen auf $\mathfrak{m}_1'$ mindestens α Schnittpunkte mit k, ebenso auf $\mathfrak{m}_2'$. Da $\mathfrak{g}_2', \ldots, \mathfrak{g}_r'$ auf den Knien $\mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_r$ liegen, können sie von k nicht getroffen werden. Die Schnittpunkte von k mit $\mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$ sind also Schnittpunkte von $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ mit k, und sie liegen auf zentrisch monotonen Streckenzügen von k. Da mindestens 2α solcher Schnittpunkte auf $\mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2'$ vorhanden sind, liegen auf dem Durchschnitt $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{K}$ und E_1 mindestens 2α Endpunkte zentrisch monotoner Streckenzüge von k, womit sich auch hier ergibt, daß $\mathfrak{f}$ mindestens α Brücken von k berührt. Der Satz ist damit bewiesen.

Satz 3. *Es sei λ ein Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$. Bezeichnet $b(\lambda)$ bzw. $b(\varkappa)$ die minimale Brückenzahl von λ bzw. $\varkappa$, so gilt*

$$\alpha\, b(\lambda) \leq b(\varkappa) \tag{4}$$

und es ist $b(\lambda) < b(\varkappa)$.

Beweis. Ungleichung (4) ergibt sich durch den Beweis von Satz 2 als Spezialfall von (1). Es ist nur zu zeigen, daß $b(\lambda) < b(\varkappa)$ ist. Wegen (4) könnte dies nur für $\alpha = 1$ nicht der Fall sein. Ist λ ein Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$, so ist[2]) $\varkappa$ das Produkt von λ und einem vom Kreis verschiedenen Knoten μ, und es gibt zwei bezüglich eines Repräsentanten k von $\varkappa$ nebengeordnete Vollringe $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$ derart, daß λ durch $\mathfrak{V}_1$ mit k und μ durch $\mathfrak{V}_2$ mit k als Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$ dargestellt wird[3]). Nach Satz 2 ist

$$b(\lambda) + b(\mu) - 1 \leq b(\varkappa). \tag{5}$$

Da μ vom Kreis verschieden ist, ist $b(\mu) \geq 2$ nach Satz 1 und somit $b(\lambda) < b(\varkappa)$.

Da der Kreis als Begleitknoten ausgeschlossen ist, folgt aus den Sätzen 1 und 3

Satz 4. *Sei $b(\varkappa)$ die minimale Brückenzahl des Knotens $\varkappa$. Ein Begleitknoten von $\varkappa$ kann höchstens mit der Ordnung $\frac{1}{2}\, b(\varkappa)$ auftreten.*

Dieser Satz stellt eine Verschärfung von KV § 9, Satz 5 dar. Die hier angegebene Schranke kann angenommen werden, beispielsweise bei Schlauchknoten, deren Träger die minimale Brückenzahl 2 besitzt (§ 11).

Ein Knoten, der keine Begleitknoten besitzt, heißt einfach. Aus den Sätzen 1 und 3 folgt

Satz 5. *Knoten der minimalen Brückenzahl 2 sind einfach.*

Sei wieder λ ein Begleitknoten von $\varkappa$, der als Begleitknoten von $\varkappa$ mit der Ordnung α auftritt[4]). Wir sagen, daß λ als *Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ die Vielfachheit n* besitzt, wenn es für einen Repräsentanten k von $\varkappa$ ein System von n bezüglich k nebengeordneten Vollringen gibt, bei dem λ durch jeden Vollring mit k als Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ dargestellt wird, und wenn es kein solches System von $n+1$ Vollringen gibt. Diese

[2]) KV § 14, Satz 1.

[3]) KV § 14.

[4]) λ kann als Begleitknoten von $\varkappa$ mit verschiedenen Ordnungen auftreten. Vgl. KV § 13.

Definition ist sinnvoll, weil sich aus Satz 2 eine obere Schranke für die Vielfachheit ergibt. Ist $\varkappa$ ein Produktknoten und λ ein Primfaktor von $\varkappa$, so ist[5]) λ Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$ und besitzt als solcher diejenige Vielfachheit, die er in der Primfaktorzerlegung von $\varkappa$ hat[6]). Für einen anderen Faktor μ von $\varkappa$ braucht die hier definierte Vielfachheit nicht mit derjenigen übereinzustimmen, die sich als Zahl der Kompositionsmöglichkeiten von μ aus den Primfaktoren von $\varkappa$ ergibt. Ist beispielsweise $\varkappa$ das vierfache Produkt des Primknotens λ mit sich, $\varkappa = \lambda^4 = \lambda\lambda\lambda\lambda$, so erhält man nach der obigen Definition den Knoten $\mu = \lambda^2$ als Begleitknoten der Ordnung 1 von $\varkappa$ mit der Vielfachheit 2, während man aus 4 Knoten 6 Produkte von je zweien bilden kann.

Satz 6. *Jeder Knoten $\varkappa$ besitzt höchstens endlich viele Begleitknoten, und jeder Begleitknoten besitzt in den Ordnungen, mit denen er als Begleitknoten von $\varkappa$ auftritt, eine endliche Vielfachheit.*

Beweis. Nur die erste Behauptung ist zu beweisen. Da nach Satz 4 die Ordnungen der Begleitknoten von $\varkappa$ beschränkt sind, muß gezeigt werden, daß für jede mögliche Ordnung nur endlich viele Begleitknoten auftreten können. $\varkappa$ besitze Begleitknoten der Ordnung α, und es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ voneinander verschiedene unter ihnen, die Primknoten sind oder solche nichtorientierte Knoten, deren orientierte Komponenten Primknoten sind. μ_i besitze als Begleitknoten der Ordnung α die Vielfachheit n_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Die Knotenlinie k stelle den Knoten $\varkappa$ dar. Für jedes μ_i wählen wir ein System von n_i bezüglich k nebengeordneten Vollringen $\mathfrak{V}_1^i, \mathfrak{V}_2^i, \ldots, \mathfrak{V}_{n_i}^i$ derart, daß μ_i durch $\mathfrak{V}_j^i$ mit k als Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ dargestellt wird. Dies kann so geschehen, daß die Ränder aller Vollringe paarweise punktfremd sind[7]). Keiner dieser Vollringe kann einen anderen im Inneren enthalten. Für zwei Vollringe, die zum gleichen μ_i gehören, ist dies sicher nicht der Fall. Nehmen wir an, daß etwa $\mathfrak{V}_1^1$ im Inneren von $\mathfrak{V}_1^2$ läge. $\mathfrak{V}_1^2$ hätte dann[8]) in bezug auf $\mathfrak{V}_1^1$ die Ordnung 1, und es müßte[9]) entweder $\mu_2 = \mu_1$ sein im Widerspruch zur Wahl der μ_i, oder es wäre μ_2 Begleitknoten der Ordnung 1 von μ_1, was ebenfalls unmöglich ist[10]), da μ_1 Primknoten oder ein nichtorientierter Knoten ist, dessen orientierte Komponenten Primknoten sind. Daher bilden alle für $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ gewählten Vollringe ein einziges bezüglich k nebengeordnetes System. Wegen $b(\mu_i) \geq 2$ und Satz 2 ist die Anzahl der Vollringe dieses Systems beschränkt, und es ergibt sich, daß r nicht beliebig groß sein kann. Wir können daher annehmen, daß $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ alle verschiedenen Begleitknoten von $\varkappa$ der Ordnung α sind, die Primknoten

[5]) KV § 14, Satz 2.

[6]) Die hier definierte Vielfachheit ist nicht kleiner als diejenige in der Primfaktorzerlegung nach KV § 19, Hilfssatz, und sie ist nicht größer, da sonst die Schlußweise des Beweises von KV § 19, Satz 1 einen Widerspruch ergäbe. Vgl. den Beweis des folgenden Satzes 6.

[7]) Dies ergibt sich durch wiederholte Anwendung von KV § 18, Satz 2.

[8]) KV § 9, Satz 3.

[9]) KV § 9, Satz 2.

[10]) KV § 14, Satz 3.

oder nichtorientierte Knoten mit Primknoten als orientierten Komponenten sind.

Sei nun λ ein Produktknoten, der Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ ist. Die Knotenlinie l stelle λ dar. Zu l gibt es ein nebengeordnetes System von Vollringen, etwa $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_s$ derart[11]), daß $\mathfrak{U}_i$ mit l einen Primfaktor λ_i von λ als Begleitknoten der Ordnung 1 von λ darstellt und daß $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$ ist. Eine geeignete Umgebung von l macht einen Vollring $\mathfrak{V}$ aus, der l zur Seele hat und im Inneren von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_s$ liegt. Der Repräsentant k von $\varkappa$ kann so gewählt werden, daß k im Inneren von $\mathfrak{V}$ liegt und daß $\mathfrak{V}$ mit k den Begleitknoten λ von $\varkappa$ mit der Ordnung α darstellt. Dann stellen[12]) auch $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_s$ mit k Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ dar. Die Primknoten λ_i sind daher unter den Begleitknoten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ von $\varkappa$ enthalten, und ihre Vielfachheit in der Primfaktorzerlegung von λ ist nicht größer als ihre Vielfachheit, die sie als Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ besitzen.

Falls λ ein nichtorientierter Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$ ist, dessen orientierte Komponenten Produktknoten sind, kann entsprechend geschlossen werden, wenn l eine orientierte Komponente λ' von λ darstellt und für die Primfaktoren von λ' von der Orientierung abgesehen wird.

Es gibt nun nur endlich viele Möglichkeiten, Produkte aus $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ bzw. ihren orientierten Komponenten zu bilden, wenn dabei die Vielfachheit von μ_i als Faktor durch n_i beschränkt ist. Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 9. Die minimale Brückenzahl von Produktknoten[1]).

Satz 7. *Für das Produkt von Knoten ist die um* 1 *verminderte minimale Brückenzahl additiv.*

Beweis. Es genügt offenbar, die Behauptung für ein Produkt von zwei Knoten zu beweisen. Dabei kann wegen Satz 1 der Fall außer Acht gelassen werden, daß einer der Faktoren der Kreis ist, da der Kreis für das Produkt von Knoten die Rolle des Einselements spielt.

Es sei $\varkappa$ das Produkt der beiden vom Kreis verschiedenen Knoten λ und μ. Nach § 8 Ungleichung (5) ist

$$b(\lambda) + b(\mu) - 1 \leq b(\varkappa).$$

Wir erhalten die Behauptung, wenn wir eine Brückendarstellung von $\varkappa$ angeben, deren Brückenzahl $b(\lambda) + b(\mu) - 1$ ist. Wir benutzen dazu eine Schar paralleler Ebenen des R^3, die wir als waagerecht bezeichnen.

Es sei l eine Brückendarstellung von λ mit der Brückenzahl $\beta = b(\lambda)$. Dabei sei E_1 die obere, E_2 die untere Grenzebene von l. Es kann angenommen werden, daß die auf E_1 liegenden Stücke von l Strecken sind, die auf einer orientierten Geraden g in E_1 liegen, und daß auf diesen Strecken die von l herrührende Orientierung mit der von g übereinstimmt. Dies läßt sich stets durch eine s-Abbildung des R^3 erreichen, welche die senkrechten Geraden

[11]) KV § 14.
[12]) KV § 13, Satz 1.
[1]) Vgl. hierzu KV §§ 5, 14, 19 und [4].

permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt. Ferner kann angenommen werden, daß die senkrechte Ebene durch g mit den auf E_2 liegenden Stücken von l nur isolierte Punkte gemein hat, da man diese Stücke noch geeignet kombinatorisch isotop auf E_2 deformieren kann. Die gemeinsamen Strecken von g und l bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ in der Reihenfolge, in der sie beim Durchlaufen von g im Sinne der Orientierung auftreten.

Wir wählen nun eine Brückendarstellung m von μ mit der Brückenzahl $\gamma = b(\mu)$ auf folgende Weise (Fig. 14):

1. Es sei E_1 die untere Grenzebene von m, die obere heiße E_0.

2. Für m seien die Verbindungswege der Brückenfußpunkte auf E_1 Strecken auf g, deren von m herrührende Orientierung derjenigen von g entgegengesetzt

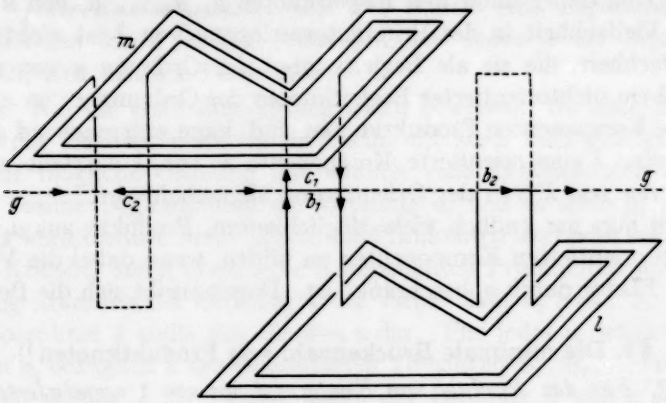


Fig. 14.

ist. Diese Strecken mögen mit $c_1, c_2, \ldots, c_\gamma$ bezeichnet werden in der Reihenfolge, die man bei Durchlaufen von g entgegen seiner Orientierung erhält.

3. Die Strecken b_1 und c_1 fallen mit entgegengesetzter Orientierung zusammen.

4. m treffe keine senkrechte Gerade durch einen Punkt von $b_2, \ldots, b_\beta$, und es treffe l keine senkrechte Gerade durch einen Punkt von $c_2, \ldots, c_\gamma$.

Daß m so gewählt werden kann, erkennt man ohne weiteres, wenn man eine Brückendarstellung von μ mit der Brückenzahl γ zunächst so wählt, daß sie E_1 als untere Grenzebene besitzt, und danach diese Darstellung einer geeigneten s-Abbildung des R^3 unterwirft, welche die senkrechten Geraden permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt.

Läßt man nun von l und m die Strecken b_1 und c_1 fort, so setzen sich die verbleibenden Stücke zu einer Knotenlinie k zusammen, welche den Knoten $\varkappa$ darstellt. Hebt man nämlich $b_2, \ldots, b_\beta$ von E_1 nach unten ab und $c_2, \ldots, c_\gamma$ nach oben, so wird die aus k entstehende Knotenlinie von E_1 nur noch in den Endpunkten von b_1 getroffen und damit der von k repräsentierte Knoten als Produkt der von l und m repräsentierten Knoten λ, μ dargestellt. Man erhält aus k eine Brückendarstellung von $\varkappa$, wenn man bei k die Strecken $b_2, \ldots, b_\beta$ unter gleichzeitiger Verlängerung der daran anstoßenden senk-

rechten Strecken nach oben in E_0 verschiebt und entsprechend die Strecken $c_2, \ldots, c_\gamma$ nach unten in E_2 verschiebt (Fig. 14). Die obige Bedingung 4. besagt, daß dies möglich ist, etwa durch kombinatorisch isotope Deformation von k. Die aus k entstehende Brückendarstellung von $\varkappa$ besitzt dann $\beta + \gamma - 1 = b(\lambda) + b(\mu) - 1$ Brücken, womit sich die Behauptung ergibt.

§ 10. Die minimale Brückenzahl von Schlingknoten[1]).

Satz 8. *Es sei $\varkappa$ ein vom Kreis verschiedener Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ. Für die minimalen Brückenzahlen $b(\varkappa)$, $b(\lambda)$ von $\varkappa$ und λ gilt*

$$b(\varkappa) = 2b(\lambda).$$

Beweis. Ist λ verknotet, so ist[2]) λ nichtorientierter Begleitknoten der Ordnung 2 von $\varkappa$, und wegen Satz 3 gilt

$$b(\varkappa) \geq 2b(\lambda).$$

Wegen Satz 1 gilt diese Beziehung auch, wenn λ der nichtorientierte Kreis ist. Wir erhalten die Behauptung, wenn wir eine Brückendarstellung von $\varkappa$ angeben, deren Brückenzahl $2b(\lambda)$ ist.

Es sei (E) die Schar der waagerechten Ebenen des R^3. l sei eine Brückendarstellung von λ bezüglich der Schar (E) mit der Brückenzahl $b(\lambda)$. Dabei sei E_1 die obere, E_2 die untere Grenzebene von l. Zu l können wir einen Kreisring $\mathfrak{r}$ angeben, der l als einen Rand besitzt und der aus Elementarflächenstücken auf E_1 und E_2 und dazu senkrechten ebenen Elementarflächenstücken besteht. l' sei der zweite Rand von $\mathfrak{r}$. Bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{r}$ ist auch l' eine Brückendarstellung von λ mit der Brückenzahl $b(\lambda)$. Wir betrachten ein auf E_1 liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{r}$. Durch eine s-Abbildung des R^3, welche die senkrechten Geraden permutiert und jeden Punkt auf gleicher Höhe läßt, kann erreicht werden, daß $\mathfrak{e}$ ein Rechteck mit den Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 ist, wobei die Kante P_1P_2 auf l, die Kante P_3P_4 auf l' liegt und P_2P_3, P_4P_1 die beiden anderen Kanten sind. Nach Wegnahme von P_1P_2 verbleibt von l ein Streckenzug v, von l' verbleibt ein Streckenzug v' bei Wegnahme von P_3P_4. P_1P_4 und P_2P_3 sind zwei Querschnitte von $\mathfrak{r}$, die $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{e}$ und ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$ zerlegen. Wir verbinden nun P_1 mit P_4 durch einen Streckenzug u_1 auf E_1 und P_2 mit P_3 durch einen Streckenzug u_2 auf E_1 auf eine der beiden Weisen, die in Fig. 15a und b dargestellt sind. Dann setzen sich v, v', u_1 und u_2 zu einer nichtorientierten Knotenlinie k zusammen, die einen Schlingknoten mit dem Diagonalknoten λ darstellt. Betrachtet man nämlich das von P_1P_4 und u_1 auf E_1 berandete Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$ und das von P_2P_3 und u_2 auf E_1 berandete Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_2$, so erhält man aus $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{f}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{y}$ mit Selbstdurchdringung, wenn man $\mathfrak{g}_1$ nach oben aus E_1 heraushebt (Fig. 16), und vermöge l erkennt man ohne weiteres, daß $\mathfrak{y}$ den Diagonalknoten λ besitzt.

[1]) Vgl. hierzu SEIFERT [8] und KV § 20.

[2]) KV § 20, Hilfssatz 2.

Stimmt die Eigenschnittzahl von $\mathfrak{y}$ nicht mit der zu $\varkappa$ gehörigen überein, so ist die nach Fig. 15a oder b erfolgte Wahl von u_1, u_2 durch die andere zu ersetzen. Die Eigenschnittzahl von $\mathfrak{y}$ wechselt dabei das Vorzeichen, weil Fig. 15a und b auseinander durch Spiegelung entstehen. k stellt nun einen Schlingknoten dar, der mit $\varkappa$ in Diagonalknoten und Eigenschnittzahl übereinstimmt. Für die Verdrillungszahl braucht dies noch nicht der Fall zu sein. Man kann dies aber dadurch erreichen, daß man eines der ebenen senkrechten Elementarflächenstücke von $\mathfrak{f}$ durch ein geeignet tordiertes so ersetzt, daß die beiden nicht auf E_1 und E_2 liegenden Randstücke monotone Streckenzüge sind, man fügt also einen geeigneten Zweierzopf ein, was offenbar möglich ist. Da $\varkappa$ durch Diagonalknoten, Eigenschnittzahl und Verdrillungszahl vollständig bestimmt ist, ist nun k eine verallgemeinerte Brückendarstellung erster Art

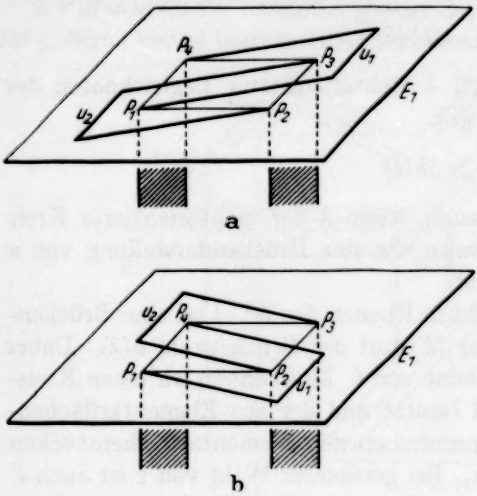


Fig. 15.

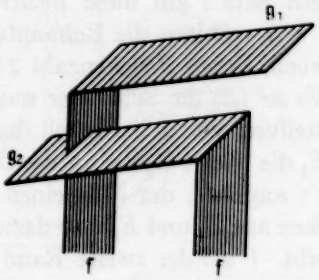


Fig. 16.

von $\varkappa$. Die Brückenzahl von k ist $2b(\lambda)$. Denn es liegen genau $4b(\lambda)$ monotone Streckenzüge auf k, von denen je $2b(\lambda)$ von l und l' herrühren. Der Satz ist damit bewiesen.

Aus Satz 8 und Satz 5 folgt erneut[3]), daß Schlingknoten, die den Kreis als Diagonalknoten besitzen, einfach sind.

§ 11. Die minimale Brückenzahl von Schlauchknoten[1]).

Es sei $\mathfrak{V}$ ein *verknoteter* Vollring, der die Knotenlinie k im Inneren enthält und in bezug auf k die Ordnung $\alpha > 1$ hat. Wenn sich $\mathfrak{V}$ längs einer Meridianfläche so zu einem Prisma aufschneiden läßt, daß k dabei in α Streckenzüge zerfällt, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche des Prismas führen, so stellt $\mathfrak{V}$ mit k einen *Schlauchzopf* dar. α heißt die *Fädenzahl* des Schlauchzopfes. Auf $\mathfrak{V}$ ist k homolog dem α-fachen einer geeignet orientierten Seele von $\mathfrak{V}$. Der durch sie dargestellte Knoten λ ist der *Träger* des Schlauchzopfes. Von dem durch k dargestellten Knoten sagen wir, daß er sich durch einen Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α darstellen läßt.

[3]) KV § 20, Satz 4.

[1]) Vgl. hierzu KV §§ 21, 22, 23.

Ist $\varkappa$ ein Schlauchknoten mit verknotetem Träger λ und der Umlaufzahl α, so läßt sich $\varkappa$ durch einen Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α darstellen.

Satz 9. *Es sei $\varkappa$ ein Knoten, der sich als Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α darstellen läßt. Für die minimalen Brückenzahlen $b(\varkappa)$ und $b(\lambda)$ von $\varkappa$ und λ gilt*

$$b(\varkappa) = \alpha\, b(\lambda).$$

Beweis. λ ist Begleitknoten der Ordnung α von $\varkappa$. Zum Beweise der Behauptung genügt es wegen Satz 3, eine Brückendarstellung von $\varkappa$ anzugeben, die $\alpha\, b(\lambda)$ Brücken besitzt.

Der Vollring $\mathfrak{V}'$ in der $\mathfrak{S}^3$ stelle mit der Knotenlinie k' einen Schlauchzopf mit dem Träger λ und der Fädenzahl α dar, wobei $\varkappa$ durch k' dargestellt werde. Längs einer geeigneten Meridianfläche läßt sich $\mathfrak{V}'$ so zu einem senkrechten Prisma $\mathfrak{P}'$ im R^3 aufschneiden, daß k' in α Sehnen $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ von $\mathfrak{P}'$ zerfällt, die monoton von der Dachfläche $\mathfrak{e}_1'$ zur Bodenfläche $\mathfrak{e}_2'$ von $\mathfrak{P}'$ führen. Es gibt also eine simpliziale Abbildung σ' von $\mathfrak{P}'$ auf $\mathfrak{V}'$, die topologisch ist, wenn man übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ identifiziert, und die $k_1' + k_2' + \cdots + k_\alpha'$ in k' überführt. Der $\mathfrak{S}^3$ und dem R^3 seien feste Orientierungen erteilt. Es kann angenommen werden, daß σ' die vom R^3 auf $\mathfrak{P}'$ induzierte Orientierung in die von der $\mathfrak{S}^3$ auf $\mathfrak{V}'$ induzierte überträgt. Ferner kann angenommen werden, daß $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ reguläre Polygone sind und daß σ' die senkrechten Mantellinien von $\mathfrak{P}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}'$ überführt. Wir können außerdem σ' so wählen, daß die Anfangspunkte von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ in dieser Reihenfolge auf einer Geraden durch den Mittelpunkt von $\mathfrak{e}_1'$ liegen, und zwar so, daß der Anfangspunkt von k_1' der Mittelpunkt von $\mathfrak{e}_1'$ ist. Dies läßt sich durch eine s-Abbildung von $\mathfrak{P}'$ auf sich erreichen, welche auf dem Mantel von $\mathfrak{P}'$ die Identität ist und welche die senkrechten Strecken auf $\mathfrak{P}'$ permutiert. Schließlich können wir annehmen, daß jede der Sehnen $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ ein senkrechtes Anfangsstück besitzt. Dies läßt sich nämlich durch eine isotope simpliziale Deformation dieser Sehnen bewirken, welche die Anfangs- und Endpunkte festläßt und bei welcher die Sehnen monoton bleiben, also auch durch eine s-Abbildung von $\mathfrak{P}'$ auf sich, welche auf dem Rande von $\mathfrak{P}'$ die Identität ist. Wir zerlegen nun $\mathfrak{P}'$ durch ein waagerechtes Elementarflächenstück $\mathfrak{f}'$ so in eine obere Kugel $\mathfrak{P}_1'$ und eine untere Kugel $\mathfrak{P}_2'$, daß die auf $\mathfrak{P}_1'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ senkrecht sind. Der Durchschnitt von $\mathfrak{P}_i'$ $(i = 1, 2)$ mit dem Mantel von $\mathfrak{P}'$ ist ein Kreisring $\mathfrak{k}_i'$. Auf $\mathfrak{P}_1'$ gibt es ein senkrechtes, rechteckiges Elementarflächenstück $\mathfrak{r}_1'$, das die auf $\mathfrak{P}_1'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ enthält und dessen Rand aus je einer senkrechten Strecke auf k_1' und k_α' und je einer waagerechten Strecke auf $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{f}'$ besteht. a' sei die von $\mathfrak{e}_1'$ nach $\mathfrak{e}_2'$ orientierte Achse von $\mathfrak{P}'$. $\sigma'(a')$ ist eine orientierte Seele von $\mathfrak{V}'$, die den Knoten λ darstellt.

Es sei nun (E) eine Schar konzentrischer Tetraeder des R^3, deren Mittelpunkt im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegt. l sei eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art von λ bezüglich (E) mit der Brückenzahl $b(\lambda)$. E_1 sei das innere,

E_2 das äußere Grenztetraeder von l. Es kann wegen Hilfssatz 3 angenommen werden, daß l im Inneren des Projektionskegels vom Scharzentrum nach den waagerechten Tetraederseiten liegt und bezüglich der waagerechten Ebenen des R^3 eine Brückendarstellung von λ ist. $\mathfrak{V}$ sei ein Vollring, der l zur Seele hat. Wegen Hilfssatz 7 können wir annehmen, daß der Rand $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{V}$ bezüglich (E) in Brückenform ist.

Zu l können wir einen Kreisring $\mathfrak{r}$ im Inneren von $\mathfrak{V}$ angeben, der l als einen Rand besitzt und der aus ebenen Elementarflächenstücken auf E_1 und E_2 und dazu senkrechten ebenen Elementarflächenstücken besteht, wobei jedes solche Elementarflächenstück mit l genau ein Stück des Randes gemein hat. Es sei $\mathfrak{s}_2$ ein Schenkel von $\mathfrak{T}$. Seine Grenzlinien beranden auf ihren Schartetraedern je eine Meridianfläche $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{V}$. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ zerlegen $\mathfrak{V}$ in zwei Kugeln $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, wobei $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{s}_2$ berandet werde. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_2$ und l ist eine Strecke. Die Bezeichnungen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ seien so gewählt, daß diese Strecke im Sinne der Orientierung von l von $\mathfrak{f}$ nach $\mathfrak{e}$ führt. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_i$ $(i=1, 2)$ mit $\mathfrak{r}$ ist ein Elementarflächenstück $\mathfrak{r}_i$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{r}_i$ mit $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{f}$ ist eine waagerechte Strecke.

σ^* sei nun eine semilineare Abbildung von $\mathfrak{P}_2'$ auf $\mathfrak{K}_2$ mit den folgenden Eigenschaften[2]):

1. σ^* überträgt die vom R^3 auf $\mathfrak{P}_2'$ induzierte Orientierung in die von der $\mathfrak{S}^3$ auf $\mathfrak{K}_2$ induzierte.

2. Es ist $\mathfrak{e}=\sigma^*(\mathfrak{e}_2')$ und $\mathfrak{f}=\sigma^*(\mathfrak{f}')$. Dabei geht der Durchschnitt von $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{r}_1'$ in den Durchschnitt von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{r}$ über, und der Durchschnitt von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}$ ist das Bild derjenigen Strecke auf $\mathfrak{e}_2'$, die aus dem Durchschnitt von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{r}_1'$ durch Translation längs der Achse von $\mathfrak{P}'$ entsteht.

3. Die auf $\mathfrak{P}_2'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ gehen in zentrisch monotone Streckenzüge auf $\mathfrak{K}_2$ über, und der Durchschnitt von l und $\mathfrak{K}_2$ ist das Bild der Achse von $\mathfrak{P}_2'$.

σ^* läßt sich so auf $\mathfrak{P}_1'$ fortsetzen, daß $\mathfrak{P}_1'$ auf $\mathfrak{K}_1$ abgebildet wird, daß übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ denselben Bildpunkt auf $\mathfrak{e}$ haben und daß die senkrechten Mantellinien von $\mathfrak{P}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}$ übergehen[3]). Das Bild von $\mathfrak{r}_1'$ ist dann ein Elementarflächenstück $\mathfrak{r}_1^*$ auf $\mathfrak{K}_1$, dessen Durchschnitt mit dem Rande von $\mathfrak{K}_1$ aus je einer Strecke auf $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ besteht, die den Durchschnitt von $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{f}$ ausmacht. Die beiden restlichen Randstücke von $\mathfrak{r}_1$ bzw. $\mathfrak{r}_1^*$ bilden zwei unverknotete Sehnen u_1, u_2 bzw. u_1^*, u_2^* von $\mathfrak{K}_1$, die von $\mathfrak{e}$ nach $\mathfrak{f}$ orientiert seien. Auf dem Rande von $\mathfrak{K}_1$ können wir zwei disjunkte Streckenzüge v_1, v_2 wählen, die u_1, u_2 zu Knotenlinien schließen und die mit $\mathfrak{r}_1$ nur ihre Endpunkte gemein haben. Die Verschlingungszahl von u_1+v_1 und u_2+v_2 bezeichnen wir als die Windungszahl von $\mathfrak{r}_1$. Die Windungszahl von $\mathfrak{r}_1^*$ erhält man entsprechend vermöge $u_1^*+v_1$ und $u_2^*+v_2$. Die beiden Windungszahlen brauchen nicht übereinzustimmen. Wir können dies aber dadurch erreichen, daß wir eines der senkrechten, bisher ebenen

[2]) Daß eine solche Abbildung existiert, ergibt sich beispielsweise durch die Konstruktion von KV § 23, Beweis von Hilfssatz 2, sechster Schritt.

[3]) Vgl. KV § 3.

Elementarflächenstücke von $\mathfrak{r}_1$ geeignet tordieren, und zwar so, daß das auf l liegende Randstück festbleibt und daß das tordierte Elementarflächenstück mit jedem schneidenden Schartetraeder nur einen Querschnitt gemein hat. Nun gibt es eine s-Abbildung φ der $\mathfrak{S}^3$ auf sich[4]), die $\mathfrak{r}_1^*$ in $\mathfrak{r}_1$ überführt und im Komplement von $\mathfrak{K}_1$ die Identität ist. Die auf $\mathfrak{P}_1'$ liegenden Stücke von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ gehen durch $\varphi\sigma^*$ in Sehnen von $\mathfrak{K}_1$ über, die auf $\mathfrak{r}_1$ liegen und von $\mathfrak{e}$ nach $\mathfrak{f}$ führen. Wenn φ geeignet gewählt ist, so liegt für jede dieser Sehnen nur je ein Streckenzug auf den waagerechten Elementarflächenstücken von $\mathfrak{r}_1$ auf E_1 und E_2 und auch nur je ein Streckenzug auf den senkrechten Stücken von $\mathfrak{r}_1$, wobei noch diese letzten Streckenzüge monoton sind. Für die von k_1' und k_α' herrührenden Sehnen von $\mathfrak{K}_1$ ist dies von selbst der Fall, da sie auf dem Rande von $\mathfrak{r}_1$ liegen. Wenn es für die anderen noch nicht der Fall ist, so läßt es sich durch kombinatorisch isotope Deformation auf $\mathfrak{r}_1$ erreichen und daher auch dadurch, daß man φ geeignet ändert[5]).

$\sigma = \varphi\sigma^*$ ist nun eine simpliziale Abbildung von $\mathfrak{P}'$ auf $\mathfrak{V}$, die topologisch ist, wenn man übereinanderliegende Punkte von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ identifiziert, und die die senkrechten Mantellinien von $\mathfrak{P}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}$ überführt. Das Bild der von $\mathfrak{e}_1'$ nach $\mathfrak{e}_2'$ orientierten Achse a' von $\mathfrak{P}'$ ist l. Die Bilder von $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ setzen sich zu einer Knotenlinie k zusammen, die eine verallgemeinerte Brückendarstellung zweiter Art bezüglich (E) ist. Die Brückenzahl von k ist $\alpha\, b(\lambda)$. Der Durchschnitt von k mit E_1 besteht nämlich nur aus Streckenzügen auf $\mathfrak{r}_1$, nach Wahl von l und $\mathfrak{r}$ besteht der Durchschnitt von $\mathfrak{r}_1$ und E_1 aus $b(\lambda)$ Elementarflächenstücken, und auf jedem solchen liegen genau α Streckenzüge von k.

Wir sind am Ziele, wenn wir noch zeigen, daß k den Knoten $\varkappa$ darstellt. Nun vermitteln σ' und σ eine semilineare Abbildung τ von $\mathfrak{V}'$ auf $\mathfrak{V}$, welche die von der $\mathfrak{S}^3$ induzierte Orientierung von $\mathfrak{V}'$ in diejenige von $\mathfrak{V}$ überträgt und welche die Breitenkreise von $\mathfrak{V}'$ in Breitenkreise von $\mathfrak{V}$ überführt. Die orientierte Seele $\sigma'(a')$ von $\mathfrak{V}'$ geht vermöge τ in die orientierte Seele $\sigma(a') = l$ von $\mathfrak{V}$ über. Da nun λ sowohl durch $\sigma'(a')$ als auch durch l dargestellt wird, läßt sich τ zu einer s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich erweitern[6]). Dabei ist $k = \tau(k')$, wie man vermöge σ', σ und der Sehnen $k_1', k_2', \ldots, k_\alpha'$ von $\mathfrak{P}'$ erkennt. k stellt also tatsächlich den Knoten $\varkappa$ dar. Der Satz ist damit bewiesen.

Anmerkung. Im vorangehenden Beweis haben wir bei der Konstruktion von k keinen Gebrauch von der Verknotung von λ gemacht. Durch dieselbe Schlußweise ergibt sich daher:

Wenn sich der Knoten $\varkappa$ durch einen geschlossenen Zopf der Fädenzahl α darstellen läßt, so ist $b(\varkappa) \leq \alpha$.

Die minimale Brückenzahl $b(\varkappa)$ von $\varkappa$ kann dabei kleiner sein als die kleinste Fädenzahl der geschlossenen Zöpfe, durch welche sich $\varkappa$ darstellen läßt[7]). Beispielsweise lassen sich durch geschlossene Zöpfe der Fädenzahl 2

[4]) Graeub [*1*] § 8.
[5]) KV § 2, Satz 2, Anmerkung 3 und Satz 4.
[6]) KV § 11, Satz 2.
[7]) Jeder Knoten läßt sich durch geschlossene Zöpfe darstellen.

nur der Kreis und die Torusknoten der Umlaufzahl 2 darstellen. Da die beiden Kleeblattschlingen die beiden einzigen Schlingknoten sind, die zugleich Torusknoten sind[8]), kann ein vom Kreis und den beiden Kleeblattschlingen verschiedener Schlingknoten, der den Kreis als Diagonalknoten besitzt, nicht durch einen geschlossenen Zopf mit nur 2 Fäden dargestellt werden. Die minimale Brückenzahl eines solchen Knotens ist jedoch 2 nach Satz 8.

Durch Satz 9 sind insbesondere diejenigen Schlauchknoten erfaßt, deren Träger verknotet ist. Für Torusknoten, also Schlauchknoten, deren Träger der Kreis ist, gilt entsprechend

Satz 10. *Es sei $\varkappa$ ein Torusknoten der Umlaufzahl α und der Verschlingungszahl δ, wobei Umlauf- und Verschlingungszahl so bezogen sind, daß $\alpha < |\delta|$ ist. Dann ist α die minimale Brückenzahl von $\varkappa$.*

Beweis. Ein Torus in $\mathfrak{E}^3$, der aus zwei waagerechten und zwei senkrechten Kreisringen besteht, zerlegt die $\mathfrak{E}^3$ in zwei unverknotete Vollringe, und man erkennt ohne weiteres, daß sich $\varkappa$ durch eine Knotenlinie auf diesem Torus darstellen läßt, die eine Brückendarstellung von $\varkappa$ mit nur α Brücken ist (vgl. Fig. 1b). Es muß also gezeigt werden, daß jede Brückendarstellung von $\varkappa$ mindestens α Brücken besitzt.

Es sei $\mathfrak{T}'$ ein Torus in der $\mathfrak{E}^3$, der die $\mathfrak{E}^3$ in die beiden unverknoteten Vollringe $\mathfrak{V}_1'$ und $\mathfrak{V}_2'$ zerlegt. k' sei eine Knotenlinie auf $\mathfrak{T}'$, die den Knoten $\varkappa$ darstellt. k' habe die Umlaufzahl α und die Verschlingungszahl δ etwa bezüglich $\mathfrak{V}_1'$. Bezüglich $\mathfrak{V}_2'$ hat dann k' die Umlaufzahl $|\delta|$ und die Verschlingungszahl α sign δ. Wenn man $\mathfrak{V}_1'$ längs einer Meridianfläche aufschneidet, deren Rand von k' in nur α Punkten getroffen wird, so erkennt man, daß es auf $\mathfrak{V}_1'$ einen Kreisring $\mathfrak{r}_1'$ gibt, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{T}'$ nur aus k' besteht. Der zweite Rand von $\mathfrak{r}_1'$ sei k_1', wobei k_1' so orientiert sei, daß k_1' auf $\mathfrak{r}_1'$ zu k' homolog ist. Entsprechend sei $\mathfrak{r}_2'$ ein Kreisring auf $\mathfrak{V}_2'$, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{T}'$ nur aus k' besteht und dessen zweiter Rand k_2' so orientiert sei, daß k_2' auf $\mathfrak{r}_2'$ zu k' homolog ist. $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ bilden zusammen einen Kreisring $\mathfrak{r}'$ mit den Rändern k_1' und k_2'. Die Verschlingungszahl von k_1' mit k_2' ist $\alpha\delta$.

Es sei nun (E) die Schar der waagerechten Ebenen des R^3. k sei eine Brückendarstellung von $\varkappa$ bezüglich (E) von minimaler Brückenzahl $b(\varkappa)$. E_1 sei die obere, E_2 die untere Grenzebene von k. Zu k wählen wir einen Kreisring $\mathfrak{r}$ so, daß k Mittellinie von $\mathfrak{r}$ ist, d.h. k liegt auf $\mathfrak{r}$, ohne die Ränder von $\mathfrak{r}$ zu treffen, und ist Erzeugende der eindimensionalen Homologiegruppe von $\mathfrak{r}$. $\mathfrak{r}$ soll zunächst so gewählt werden, daß $\mathfrak{r}$ nur aus ebenen Elementarflächenstücken auf E_1 und E_2 und dazu senkrechten ebenen Elementarflächenstücken besteht, wobei k auf jedem solchen Elementarflächenstück einen Querschnitt bildet. k_1 und k_2 seien die Ränder von $\mathfrak{r}$ und seien so orientiert, daß sie auf $\mathfrak{r}$ zu k homolog sind. Wenn die Verschlingungszahl von k_1 und k_2 noch nicht $\alpha\,\delta$ ist, so erreichen wir es dadurch, daß wir eines der senkrechten Elementarflächenstücke von $\mathfrak{r}$ geeignet tordieren, und zwar so, daß

[8]) Dies folgt aus KV § 20, Satz 1 und § 21, Satz 1.

das tordierte Elementarflächenstück mit jeder schneidenden waagerechten Ebene nur einen Querschnitt gemein hat. k_1 und k_2 sind verallgemeinerte Brückendarstellungen erster Art von $\varkappa$ bezüglich (E), und es haben k_1 und k_2 die Brückenzahl $b(\varkappa)$.

Es kann angenommen werden, daß $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{E}^3$ liegt. Nach dem unten nachzutragenden Hilfssatz 8 gibt es nun eine s-Abbildung φ der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die $\mathfrak{r}'$ in $\mathfrak{r}$ überführt. φ kann so gewählt werden[9]), daß $\mathfrak{T} = \varphi(\mathfrak{T}')$ im Inneren von $\mathfrak{E}^3$ liegt und daß die Ebenenschar (E) zulässig in bezug auf $\mathfrak{T}$ ist. $\mathfrak{T}$ zerlegt die $\mathfrak{S}^3$ in die beiden unverknoteten Vollringe $\mathfrak{V}_1 = \varphi(\mathfrak{V}_1')$ und $\mathfrak{V}_2 = \varphi(\mathfrak{V}_2')$. Die Bezeichnung von k_1 und k_2 sei so gewählt, daß k_i in $\mathfrak{V}_i$ liegt $(i = 1, 2)$. Durch φ wird dann k_i' auf k_i abgebildet. Möglicherweise sind $\varphi(k_i')$ und k_i entgegengesetzt orientiert, doch ist dies belanglos. Jedenfalls hat k_1 auf $\mathfrak{V}_1$ die Umlaufzahl α, ist also auf $\mathfrak{V}_1$ homolog dem α-fachen einer geeignet orientierten Seele von $\mathfrak{V}_1$, k_2 hat auf $\mathfrak{V}_2$ die Umlaufzahl $|\delta|$. Es gibt nun eine waagerechte Ebene E, die $\mathfrak{T}$ in einem Meridian eines von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Vollringes schneidet[10]). Es sei m eine auf E innerste solche Schnittlinie von E und $\mathfrak{T}$. m berandet also auf E ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$, das außer seinem Rand keine Schnittlinie mit $\mathfrak{T}$ enthält, die Meridian eines von $\mathfrak{T}$ in der $\mathfrak{S}^3$ berandeten Vollringes ist. Auf $\mathfrak{e}$ liegen möglicherweise noch weitere Schnitte mit $\mathfrak{T}$, doch sind diese auf $\mathfrak{T}$ nullhomolog, weil andernfalls die Existenz eines weiteren Meridianschnittes von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{T}$ folgte[11]).

Sei zunächst m Meridian von $\mathfrak{V}_1$. Durch Deformation von $\mathfrak{e}$ kann man dann eine Meridianfläche von $\mathfrak{V}_1$ erhalten, deren Durchschnitt mit k_1 auf $\mathfrak{e}$ liegt[12]). Da k_1 auf $\mathfrak{V}_1$ die Umlaufzahl α hat, durchsetzt k_1 jede Meridianfläche von $\mathfrak{V}_1$ mindestens α-mal im gleichen Sinne. Hieraus folgt, daß das waagerechte Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ zwischen E_1 und E_2 liegt, also k_1 nur in Punkten der monotonen Streckenzüge von k_1 trifft, und daß $\mathfrak{e}$ von mindestens α monotonen Streckenzügen von k_1 im gleichen Sinne durchsetzt wird. k_1 muß daher mindestens α Brücken besitzen.

Ist m Meridian von $\mathfrak{V}_2$, so folgt entsprechend, daß k_2 mindestens $|\delta|$ Brücken besitzt, weil $|\delta|$ die Umlaufzahl von k_2 auf $\mathfrak{V}_2$ ist. Nach Konstruktion ist $b(\varkappa)$ die Brückenzahl von k_1 und k_2. Wegen $|\delta| > \alpha$ ergibt sich also jedenfalls $b(\varkappa) \geqq \alpha$, was zu zeigen war.

Es sei $\mathfrak{r}$ ein Kreisring in der $\mathfrak{S}^3$. Durch seine Ränder wird ein nichtorientierter Knoten dargestellt, den wir als die *Verknotung des Kreisringes* $\mathfrak{r}$ bezeichnen. Die beiden Ränder von $\mathfrak{r}$ mögen so orientiert werden, daß sie auf $\mathfrak{r}$ zueinander homolog sind. Ihre Verschlingungszahl ist dieselbe in beiden möglichen Orientierungen. Wir bezeichnen sie als die *Verdrillung des Kreisringes* $\mathfrak{r}$.

Hilfssatz 8. *Zwei Kreisringe in der $\mathfrak{S}^3$ lassen sich genau dann durch s-Abbildungen der $\mathfrak{S}^3$ ineinander überführen, wenn sie in Verknotung und Verdrillung übereinstimmen.*

[9]) KV § 1, Satz 5, Satz 6 und anschließende Bemerkungen.
[10]) KV § 4, Satz 2.
[11]) Vgl. KV § 4, Beweis von Satz 2.
[12]) KV § 9, Hilfssatz 6.

Beweis. Unterwirft man einen Kreisring in der $\mathfrak{S}^3$ einer s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, so bleiben Verknotung und Verdrillung erhalten. Es seien nun $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ zwei Kreisringe in der $\mathfrak{S}^3$, die in Verknotung und Verdrillung übereinstimmen. Zu $\mathfrak{r}_1$ kann man einen Kreisring $\mathfrak{s}_1$ angeben, der mit $\mathfrak{r}_1$ nur die Ränder gemein hat und der zusammen mit $\mathfrak{r}_1$ einen Vollring $\mathfrak{V}_1$ berandet, auf dem die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ bei Orientierung die Umlaufzahl 1 haben. Man kann $\mathfrak{s}_1$ etwa dadurch erhalten, daß man $\mathfrak{r}_1$ bei festen Rändern „von sich selbst abhebt“[13]), also geeignet deformiert. Entsprechend erhält man einen Vollring $\mathfrak{V}_2$ für $\mathfrak{r}_2$. $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ sind gleich verknotet. Da nämlich die Ränder von $\mathfrak{r}_i$ $(i=1, 2)$ auf $\mathfrak{V}_i$ die Umlaufzahl 1 haben, stellen sie denselben nichtorientierten Knoten dar[14]) wie die Seelen von $\mathfrak{V}_i$, und es sind $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ gleich verknotet. Es gibt daher eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die $\mathfrak{V}_1$ auf $\mathfrak{V}_2$ abbildet[15]), und wir können weiterhin annehmen, daß $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ zusammenfallen. Es sei $\mathfrak{T}$ der Rand und a eine orientierte Seele von $\mathfrak{V}_1=\mathfrak{V}_2$. Die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ mögen so orientiert werden, daß sie auf $\mathfrak{V}_1$ zu a homolog sind. Die Verdrillung von $\mathfrak{r}_i$ ist nun zugleich die Verschlingungszahl eines Randes von $\mathfrak{r}_i$ mit a. Da $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ dieselbe Verdrillung besitzen, ergibt sich, daß die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ derselben Homologieklasse von $\mathfrak{T}$ angehören. Es gibt folglich[16]) eine s-Abbildung der $\mathfrak{S}^3$ auf sich, die $\mathfrak{T}$ auf sich abbildet und die die Ränder von $\mathfrak{r}_1$ in diejenigen von $\mathfrak{r}_2$ überführt, wobei die Abbildung so gewählt werden kann, daß $\mathfrak{r}_1$ in $\mathfrak{r}_2$ übergeht. Damit erhalten wir die Behauptung.

Literatur.

[1] GRAEUB, W.: Die semilinearen Abbildungen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 4. Abh. **1950**. — [2] MILNOR, J. W.: On the total curvature of knots. Ann. Math. (2) **52**, 248—257 (1950). — [3] REIDEMEISTER, K.: Knotentheorie. Berlin 1932. — [4] SCHUBERT, H.: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. **1949**. — [5] SCHUBERT, H.: Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 131—286 (1953). — [6] SEIFERT, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571—592 (1935). — [7] SEIFERT, H.: On the homology invariants of knots. Quart. J. Oxford (2) **1**, 23—32 (1950). — [8] SEIFERT, H.: Schlingknoten. Math. Z. **52**, 62—80 (1949). — [9] WENDT, H.: Die gordische Auflösung von Knoten. Math. Z. **42**, 680—696 (1937).

[13]) Vgl. KV Anmerkung 2 zum Satz von § 8.
[14]) KV § 6, Hilfssatz 3.
[15]) KV § 10, Satz 1.
[16]) KV § 2, Satz 4 und Anmerkung.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. Juli 1954.)

MEINARDUS, G.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 289—302 (1954)

Über Partitionen mit Differenzenbedingungen.

Von
GÜNTER MEINARDUS.

In der vorliegenden Arbeit werden für einige Partitionenanzahlen asymptotische Aussagen bewiesen. Es handelt sich im § 1 darum, ein Theorem von INGHAM [1] so abzuändern, daß ein monotones Wachstum der Zerlegungsanzahl nicht mehr vorausgesetzt zu werden braucht. Der in einer früheren Arbeit [2] bewiesene Satz über die Entwicklungskoeffizienten gewisser Funktionen der Gestalt

$$f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}, \qquad (\Re(\tau) > 0,\ a_n \geq 0)$$

läßt sich (ohne das Fehlerglied) aus dem Satz 1 gewinnen. Im § 2 wird eine weitere Anwendung von Satz 1 gemacht. Betrachtet werden die Entwicklungskoeffizienten $r(n)$ der Funktion

$$F(v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\frac{kl}{2}\nu(\nu-1)+m\nu}}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)\, v^n \qquad (|v| < 1).$$

Hier sind k, l und m natürliche Zahlen mit $(m, k) = 1$. Es ergibt sich für $r(n)$ eine asymptotische Gleichung für $n \to \infty$. Durch Spezialisierung von k und l in § 3 erhält $r(n)$ verschiedene zahlentheoretische Bedeutungen als Partitionenanzahl unter gewissen Differenzenbedingungen. Die angeführten Beispiele wurden zum Teil analog zu denen von [2] ausgewählt.

Es ist bemerkenswert, daß die Sattelpunktmethode hier zweimal zur Anwendung gelangt, einmal im Satz 1 zur Herleitung der asymptotischen Gleichung für $r(n)$, zum anderen im Satz 2 zum Beweis einer asymptotischen Beziehung für die Funktion $F(v)$ bei der Annäherung $v \to 1 - 0$. Transformationseigenschaften von $F(e^{2\pi i \tau})$ gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe werden an keiner Stelle des Beweises benutzt.

§ 1. Eine asymptotische Aussage.

Im Satz 1 treten zwei Funktionen $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ der komplexen Variablen z auf, die den folgenden Bedingungen genügen sollen:

1. In einem Gebiet D der z-Ebene seien $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ regulär. Sie seien reell und positiv für reelles positives $z = x$ in einem festen Intervall $0 < x \leq \xi$, welches zu D gehöre.

2. Nimmt x echt monoton gegen $0+0$ ab, so strebe $-\varphi'(x)$ echt monoton gegen $+\infty$. Es gelte ferner

$$\{\varphi''(x)\}^{-\frac{1}{2}} = o\big(\delta(x)\big) \quad \text{für} \quad x \to 0+0,$$

wobei $\delta(x)$ den Abstand des Punktes x vom Komplement von D bedeutet.

3. Für $x \to 0+0$ gelte

$$\chi(x+v) = O\big(\chi(x)\big),$$
$$\varphi''(x+v) = O\big(\varphi''(x)\big)$$

gleichmäßig in v für $|v| < \delta(x)$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz 1. *a) Die Reihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, e^{-nz} \tag{1}$$

sei konvergent für $\Re(z) > 0$. *Die Koeffizienten* $r(n)$ *seien reell.*

b) Es sei $z = x + i\,y$ *die Zerlegung von* z *in Real- und Imaginärteil,* $x > 0$ *und* $\varkappa(x)$ *eine reelle, positive Funktion von* x *mit den Eigenschaften*

$$\{\varphi''(x)\}^{-\frac{1}{2}} = o\big(\varkappa(x)\big); \qquad \varkappa(x) = o\big(\delta(x)\big) \quad \text{für} \quad x \to 0; \tag{2}$$

es gelte

$$f(z) = \chi(z)\, e^{\varphi(z)} \cdot \big(1 + o(1)\big) \quad \text{für} \quad x \to 0 \tag{3}$$

gleichmäßig in y *für* $|y| \leq \varkappa(x)$.

c) Für $\varkappa(x) < |y| \leq \pi$ *sei*

$$f(z) = o\left\{\frac{f(x)}{(\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad \text{für} \quad x \to 0 \tag{4}$$

gleichmäßig in y.

Dann ist

$$r(n) = \frac{\chi(x)\, e^{\varphi(x)+nx}}{(2\pi\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}} \cdot \big(1 + o(1)\big) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \tag{5}$$

wobei x *die für hinreichend großes* n *eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung*

$$-\varphi'(x) = n$$

ist.

Beweis. Aus Gl. (1) erhält man für $x > 0$ die Integraldarstellung

$$r(n) = \frac{e^{nx}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + i\,y)\, e^{i\,n\,y}\, dy.$$

Eine Aufteilung des Integrationsweges ergibt

$$r(n) = I_1 + I_2, \tag{6}$$

wobei

$$I_1 = \frac{e^{nx}}{2\pi} \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} f(x+iy)\, e^{iny}\, dy$$

und

$$I_2 = \frac{e^{nx}}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\varkappa(x)} + \int_{+\varkappa(x)}^{+\pi} \right\} f(x+iy)\, e^{iny}\, dy$$

ist. Nach (3) und (4) folgt

$$I_2 = o\left\{ \frac{\chi(x)\, e^{\varphi(x)+nx}}{(\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{7}$$

Das Integral I_1 wird nun wie bei INGHAM ([1], S. 1080) asymptotisch ausgewertet. Nach (3) ist

$$I_1 = \frac{e^{nx}}{2\pi} \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} \chi(x+iy)\, e^{\varphi(x+iy)+iny+o(1)}\, dy.$$

Es gelten (s. [1], Lemma 1) folgende asymptotische Beziehungen:

$$\chi(x+v) = \chi(x)\,(1+o(1)),$$

$$\varphi(x+v) = \varphi(x) + v\varphi'(x) + \frac{v^2}{2}\varphi''(x) + o\left(|v|^2 \varphi''(x)\right)$$

gleichmäßig in v für $x \to 0$ und $|v| \leq \varkappa(x)$.

Mit $v = iy$ wird dann

$$I_1 = \frac{\chi(x)\cdot e^{\varphi(x)+nx}}{2\pi} \left\{ \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} e^{-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)}\, dy + \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} e^{-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)} \left(e^{o(y^2\varphi''(x)+1)} - 1\right) dy \right\}.$$

Nun ist

$$e^{o(y^2\varphi''(x)+1)} - 1 = o\left(y^2\varphi''(x) + 1\right) e^{\frac{y^2}{4}\varphi''(x)},$$

also

$$I_1 = \frac{\chi(x)\cdot e^{\varphi(x)+nx}}{2\pi} \left\{ \int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} e^{-\frac{y^2}{2}\varphi''(x)}\, dy + o\left(\int_{-\varkappa(x)}^{+\varkappa(x)} \left(y^2\varphi''(x)+1\right) e^{-\frac{y^2}{4}\varphi''(x)}\, dy \right) \right\}$$

$$= \frac{\chi(x)\cdot e^{\varphi(x)+nx}}{2\pi\sqrt{\varphi''(x)}} \left\{ \int_{-\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}}^{+\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}} e^{-\frac{w^2}{2}}\, dw + o\left(\int_{-\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}}^{+\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}} (w^2+1)\, e^{-\frac{w^2}{4}}\, dw \right) \right\}.$$

Da nach (2) der Ausdruck $\varkappa(x)\sqrt{\varphi''(x)}$ für $x \to 0$ gegen $+\infty$ strebt, erhält man

$$I_1 = \frac{\chi(x)\, e^{\varphi(x)+nx}}{\sqrt{2\pi\varphi''(x)}} \left(1 + o(1)\right),$$

woraus sich nach (6) und (7) die Behauptung (5) des Satzes ergibt.

§ 2. Anwendung von Satz 1.

Es seien k, l und m natürliche Zahlen mit $(m, k) = 1$. Ferner sei $F(u, v)$ eine Funktion der beiden komplexen Veränderlichen u und v, welche für festes v mit $|v| < 1$ in einer Umgebung der Stelle $u = 0$ in u regulär ist. Dort gelte die Funktionalgleichung

$$F(u, v) = F(u \cdot v^k, v) + u \cdot v^m \cdot F(u \cdot v^{kl}, v). \tag{8}$$

Nimmt man noch $F(0, v) = 1$ an für alle v, so erkennt man aus (8) leicht, daß $F(u, v)$ für jedes u eine reguläre Funktion von v im Einheitskreis ist, nämlich

$$F(u, v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\frac{kl}{2}\nu(\nu-1)+m\nu} u^{\nu}}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})} \tag{9}$$

Läßt man auch $l = 0$ zu, was im folgenden nicht geschehen soll, so erhält man eine für $|v| < 1$ meromorphe Funktion von u. Mit Hilfe von Satz 1 gewinnen wir den

Satz 2. *Für den Koeffizienten $r(n)$ in der für $|v| < 1$ gültigen Entwicklung*

$$F(1, v) = F(v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)\, v^n \tag{10}$$

gilt

$$r(n) \sim C(k, l, m)\, n^{-\frac{3}{4}}\, e^{2\sqrt{\frac{A_l}{k} \cdot n}} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Hier ist

$$C(k, l, m) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{A_l}{k}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{(\alpha_l)^{l+1-\frac{2m}{k}} \cdot \left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$A_l = \frac{l}{2} \log^2 \alpha_l + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha_l)^{r \cdot l}}{r^2}$$

und

$$\alpha_l \text{ reell und } > 0, \quad (\alpha_l)^l + \alpha_l - 1 = 0.$$

Bemerkung. Es ist $A_1 = \pi^2/12$ und $A_2 = \pi^2/15$. — Die Polynome $x^l + x - 1$ mit $l \equiv -1$ modulo 6 sind durch das sechste Kreisteilungspolynom teilbar, worauf mich Herr M. KNESER freundlicherweise hinwies. Im Falle $l \not\equiv -1$ modulo 6 hat das Polynom $x^l + x - 1$ keine Einheitswurzeln als Nullstellen, jedoch ist mir nicht bekannt, ob es allgemein irreduzibel ist.

Beweis von Satz 2. Wir leiten zunächst eine Integraldarstellung für die Funktion $F(v)$ her. Aus Gl. (9) mit $u = 1$ folgt

$$F(v) = \operatorname*{Res}_{w=0} \left\{ \frac{1}{w} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\nu m} \cdot w^{\nu}}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}\right) \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} v^{\frac{kl}{2}\mu(\mu-1)} w^{-\mu} \right\}. \tag{11}$$

In der zweiten Reihe liefern die Glieder mit negativem Index keinen Beitrag zum Residuum; sie ergänzen die Reihe nur zu einer bekannten elliptischen

Thetafunktion. — Nach EULER gilt

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-w\cdot v^{kn+m})^{-1}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{v^{\nu m}\cdot w^{\nu}}{(1-v^{k})(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}$$

für $|v|<1$ und $|w|<|v|^{-m}$. Man erhält diese Identität, indem man zeigt, daß beide Seiten der Funktionalgleichung (8) mit $l=0$ genügen mit w an Stelle von u. Setzen wir

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} H(w,z)=\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-w\cdot e^{-(kn+m)z})^{-1}, \\ \Theta(w,z)=\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{kl}{2}\mu(\mu-1)z}w^{-\mu} \end{cases}$$

für $\Re(z)>0$, $0<|w|<e^{m\Re(z)}$, so wird nach Gl. (11), wenn wir unter $\mathfrak{R}$ einen im positiven Sinne durchlaufenen Kreis um den Nullpunkt mit einem Radius $\varrho<1$ verstehen, auf Grund des CAUCHYschen Integralsatzes

$$\text{(13)}\qquad F(e^{-z})=f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}}H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w}.$$

Wir wählen noch

$$\text{(14)}\qquad \varrho=1-\alpha_l,$$

wobei $\alpha_l>0$ und $(\alpha_l)^l+\alpha_l-1=0$ ist. Offenbar ist $0<\varrho<1$.

Um den Satz 2 zu beweisen, zeigen wir, daß $f(z)$ die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Nach Gl. (10) ist die Reihe

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n)\,e^{-nz}$$

für $\Re(z)>0$ konvergent; die Koeffizienten $r(n)$ sind nach Gl. (9) reelle Zahlen. — Um auch die Voraussetzungen b) und c) als erfüllt nachzuweisen, müssen wir, um die Beziehung (13) benutzen zu können, nach dem Verhalten der Funktionen $H(w,z)$ und $\Theta(w,z)$ auf dem Kreis $\mathfrak{R}$ für $\Re(z)\to 0$ fragen. Hierüber gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz. *Es sei $w=\varrho\,e^{i\varphi}$ mit $-\pi<\varphi\leq+\pi$, ϱ nach Gl. (14) und $z=x+iy$, $x>0$. Dann gilt für $x\to 0$, $|y|\leq x^{\frac{3}{4}}$ gleichmäßig in y und φ*

$$\text{(15)}\qquad H(w,z)=e^{\frac{1}{kz}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{w^r}{r^2}+\left(\frac{m}{k}-\frac{1}{2}\right)\log(1-w)+O\left(x^{\frac{1}{4}}\right)}$$

und

$$\text{(16)}\qquad \Theta(w,z)=\sqrt{\frac{2\pi}{klz}}\,e^{\frac{\log^2 w}{2klz}-\frac{1}{2}\log w}\cdot\left(1+O\left(e^{-\frac{c_0}{x}(\pi-|\varphi|)+c_1x^{-\frac{1}{24}}}+x\right)\right).$$

Es bedeuten hierbei c_0 und c_1, wie auch im folgenden $c_2, c_3, \dots$ stets geeignet wählbare positive Konstanten, die eventuell noch von k, l und m abhängen.

Beweis des Hilfssatzes. Aus Gl. (12) erhält man

$$\log H(w,z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+m)z \cdot r}. \tag{17}$$

Durch Anwendung der inversen MELLIN-Transformation folgt

$$\log H(w,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} (kz)^{-s} \Gamma(s) \zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) D(s+1, w)\, ds \tag{18}$$

Hier ist

$$\zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{m}{k}\right)^{-s} \qquad (s = \sigma + it)$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Die Funktion $\zeta\left(s, \frac{m}{k}\right)$ ist in die ganze s-Ebene analytisch fortsetzbar und dort überall regulär bis auf die Stelle $s = 1$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 vorliegt. Ferner ist

$$D(s,w) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^s}$$

für festes w mit $|w| < 1$ eine ganze Funktion von s. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{cases} \Gamma(\sigma + it) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{c_2}\right), \\ \zeta\left(\sigma + it, \frac{m}{k}\right) = O\left(|t|^{c_3}\right) \quad \text{und} \\ D(\sigma + it, w) = O(1) \end{cases} \tag{19}$$

für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in σ in jedem festen Vertikalstreifen $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$. Wegen $|y| \leq x^{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}$ ist für $x \leq 1$ sicher $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$, also

$$z^{-\sigma - it} = O\left(|z|^{-\sigma} e^{\frac{\pi}{4}|t|}\right) \tag{20}$$

für $|t| \to \infty$ gleichmäßig in σ. Aus (19) und (20) folgt in bekannter Weise, daß die Integrationsgerade im Integral (18) verschoben werden kann, wobei dann die Residuen des Integranden im überstrichenen Vertikalstreifen auftreten. Mit

$$\zeta\left(0, \frac{m}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{m}{k}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Pole bei $s = 0$ und $s = 1$ daher

$$\log H(w,z) = \frac{1}{kz} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^2} + \left(\frac{m}{k} - \frac{1}{2}\right) \log(1-w) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (kz)^{-s} \Gamma(s) \zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) D(s+1, w)\, ds.$$

Mit Hilfe der Abschätzungen (19) und (20) erhält man wegen

$$|z|^{\frac{1}{2}} = O(x^{\frac{1}{2}})$$

die Formel

$$\log H(w,z) = \frac{1}{k\,z}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{w^r}{r^2} + \left(\frac{m}{k}-\frac{1}{2}\right)\log(1-w) + O(x^{\frac{1}{2}})$$

für $x \to 0$ gleichmäßig in y und $\varphi = \arg w$, woraus (15) folgt.

Zum Beweis von (16) gehen wir aus von der bekannten Transformationsformel ([3], S. 78)

$$(21)\qquad \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\mu^2-\beta\mu} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2\mu^2}{\alpha}-\frac{\pi i\beta}{\alpha}\mu}$$

für $\Re(\alpha) > 0$, die man durch Anwendung der Poissonschen Summationsformel erhalten kann. Setzt man

$$\alpha = \frac{k\,l}{2}z \quad\text{und}\quad \beta = -\frac{k\,l}{2}z + \log w,$$

so liefert (21) die Beziehung

$$(22)\qquad \Theta(w,z) = \sqrt{\frac{2\pi}{k\,l\,z}}\,e^{\frac{1}{2\,k\,l\,z}\left(\log w-\frac{k\,l}{2}z\right)^2}\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi^2\mu^2}{k\,l\,z}-\frac{2\pi i\mu}{k\,l\,z}\left(\log w-\frac{k\,l}{2}z\right)}.$$

Wegen $|y| \leq x^{\frac{3}{4}}$ ist

$$\frac{1}{2\,k\,l\,z}\left(\log w-\frac{k\,l}{2}z\right)^2 = \frac{\log^2 w}{2\,k\,l\,z}-\frac{1}{2}\log w + O(x) \quad\text{für}\quad x\to 0.$$

Mit $w = \varrho\,e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq +\pi$ gilt für $|\mu| \geq 2$ ferner

$$\Re\left\{\frac{-2\pi^2\mu^2-2\pi i\mu\log w}{k\,l\,z}\right\} = -\frac{2\pi\mu\,x}{k\,l(x^2+y^2)}\left(\pi\mu-\varphi+\frac{y}{x}\log\varrho\right) \leq -c_4\frac{|\mu|}{x};$$

für $|\mu| = 1$ ist

$$\Re\left\{\frac{-2\pi^2\pm 2\pi i\log w}{k\,l\,z}\right\} \leq \frac{2\pi\,x(|\varphi|-\pi)}{k\,l(x^2+y^2)} + O\left(\frac{|y|}{x^2}\log\frac{1}{\varrho}\right)$$
$$\leq \frac{2\pi(|\varphi|-\pi)}{k\,l\,x} + O(x^{-\frac{1}{4}}) \quad\text{für}\quad x\to 0$$

gleichmäßig in y und φ. Aus diesen Abschätzungen ergibt sich mit (22) die Behauptung (16), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir wenden nun den Hilfssatz an. Es sei zunächst wieder $|y| \leq x^{\frac{3}{4}}$. Auf Grund der Integraldarstellung (13) ist

$$(23)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho e^{-i\varphi_0}}^{\varrho e^{+i\varphi_0}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w}.$$

Hier ist $\mathfrak{B}$ der Kreis $\mathfrak{K}$ ohne den Bogen von $\varrho\, e^{-i\varphi_0}$ bis $\varrho\, e^{+i\varphi_0}$ und

$$\varphi_0 = x^{\frac{1}{12}} \tag{24}$$

für hinreichend kleines x. Für das zweite Integral in (23) führen wir eine Betragsabschätzung durch. Aus Gl. (17) erkennt man

$$|H(w,z)| \leq H(\varrho, x),$$

nach (15) also

$$H(w,z) = O\left(e^{\frac{1}{kx}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{25}$$

Nach (16) ist für $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Theta(w,z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - \frac{\varphi^2 x}{2kl(x^2+y^2)}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - c_4 x^{-\frac{1}{6}}}\right),$$

oder

$$\Theta(w,z) = O\left(e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - c_7 x^{-\frac{1}{6}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{26}$$

Für das restliche Intervall $\frac{\pi}{2} < |\varphi| \leq \pi$ gilt nach (16) offenbar

$$\Theta(w,z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\frac{\log^2\varrho}{2klx} - \frac{c_3}{x} + c_1 x^{-\frac{1}{12}}}\right) = O\left(e^{\frac{\log^2\varrho - c_9}{2klx}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{27}$$

Aus (25), (26) und (27) folgt unter Berücksichtigung der Gl. (14) mit der Abkürzung

$$A_l = \frac{l}{2}\log^2\alpha_l + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(\alpha_l)^{r\cdot l}}{r^2}$$

insgesamt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w} = O\left(e^{\frac{A_l}{kx} - c_7 x^{-\frac{1}{6}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0. \tag{28}$$

Wir betrachten nun das erste Integral von Gl. (23). Unter Verwendung von (15) und (16) erhalten wir nach der Substitution $w = \varrho\, e^{i\varphi}$ die Abschätzung

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varrho e^{-i\varphi_0}}^{\varrho e^{+i\varphi_0}} H(w,z)\,\Theta(w,z)\,\frac{dw}{w} = \frac{1}{\sqrt{2\pi klz}}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} e^{\psi(\varphi)+O(x^{\frac{1}{12}})}\,d\varphi, \tag{29}$$

denn es ist sicher

$$1 + O\left(e^{-\frac{c_8}{x}(\pi-\varphi_0)+c_1 x^{-\frac{1}{12}}} + x\right) = 1 + O(x^{\frac{1}{12}}) = e^{O(x^{\frac{1}{12}})} \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

In Gl. (29) wurde gesetzt

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{kz}\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r e^{i\varphi r}}{r^2} + \frac{\log^2(\varrho\, e^{i\varphi})}{2l}\right\} - \frac{1}{2}\log\varrho - \frac{1}{2}i\varphi + \left(\frac{m}{k} - \frac{1}{2}\right)\log(1-\varrho\, e^{i\varphi}).$$

Es gilt

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r e^{i\varphi r}}{r^2}+\frac{1}{2l}\log^2(\varrho e^{i\varphi})=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{1}{2l}\log^2\varrho+i\varphi\left\{\frac{1}{l}\log\varrho+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r}\right\}-$$
$$-\frac{\varphi^2}{2}\left\{\frac{1}{l}+\frac{\varrho}{1-\varrho}\right\}+O(|\varphi|^3)$$
$$=A_l-\frac{\varphi^2}{2l}\left(l(\alpha_l)^{l-1}+1\right)+O(|\varphi|^3),$$

denn nach Gl. (14) ist

$$\frac{1}{l}\log\varrho+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r}=0.$$

Es folgt mit Gl. (14) insgesamt

$$\psi(\varphi)=\frac{A_l}{k\,z}-\frac{\varphi^2}{2k\,l\,z}\left(l(\alpha_l)^{l-1}+1\right)+\left(\frac{m}{k}-\frac{l+1}{2}\right)\log\alpha_l+O\left(\frac{|\varphi|^3}{|z|}\right)+O(|\varphi|)$$
$$=\frac{A_l}{k\,z}-\frac{\varphi^2}{2k\,l\,z}\left(l(\alpha_l)^{l-1}+1\right)+\left(\frac{m}{k}-\frac{l+1}{2}\right)\log\alpha_l+O(x^{\frac{1}{4}}).$$

Aus (29) wird dann

$$(30)\qquad I=\frac{1}{\sqrt{2\pi k\,l\,z}}e^{\frac{A_l}{k\,z}+\left(\frac{m}{k}-\frac{l+1}{2}\right)\log\alpha_l}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}e^{-\frac{\varphi^2}{2k\,l\,z}\left(l(\alpha_l)^{l-1}+1\right)+O(x^{\frac{1}{4}})}\,d\varphi.$$

Wir setzen vorübergehend

$$\frac{l(\alpha_l)^{l-1}+1}{2k\,l}=\gamma\quad(>0).$$

Dann ist

$$(31)\qquad\left\{\begin{aligned}\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}e^{-\varphi^2\frac{\gamma}{z}+O(x^{\frac{1}{4}})}\,d\varphi&=\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}e^{-\varphi^2\frac{\gamma}{z}}\,d\varphi+\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0}e^{-\varphi^2\frac{\gamma}{z}}\left(e^{O(x^{\frac{1}{4}})}-1\right)d\varphi\\&=\sqrt{\frac{z}{\gamma}}\int_{-\varphi_0\sqrt{\gamma/z}}^{+\varphi_0\sqrt{\gamma/z}}e^{-\xi^2}\,d\xi+O(|\varphi_0|\,x^{\frac{1}{4}})\\&=\sqrt{\frac{\pi z}{\gamma}}\left(1+o(1)\right)+O(x^{\frac{1}{2}})\\&=\sqrt{\frac{\pi z}{\gamma}}\left(1+o(1)\right),\end{aligned}\right.$$

denn, wie man leicht feststellt, strebt der geradlinige Integrationsweg von $-\varphi_0\sqrt{\gamma/z}$ bis $+\varphi_0\sqrt{\gamma/z}$ gegen die volle reelle Achse.

Die Formeln (23), (28), (29), (30) und (31) ergeben die Aussage

$$(32)\qquad f(z)=\left(\alpha_l^{l+1-\frac{2m}{k}}\left(l(\alpha)^{l-1}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{A_l}{k\,z}}\cdot\left(1+o(1)\right)$$

für $x\to 0$ und $|y|\leq x^{\frac{3}{4}}$ gleichmäßig in y.

Die asymptotische Gl. (32) zeigt, daß die Voraussetzung b) von Satz 1 über $f(z)$ erfüllt ist, wenn wir das Gebiet D und die Funktion $\varkappa(x)$ folgendermaßen wählen

$$D: \quad |y| < x; \quad \varkappa(x) = x^{\frac{3}{4}}; \quad \text{es ist} \quad \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x.$$

Nach (32) ist

$$\chi(z) = \left(\alpha_l^{l+1-\frac{2m}{k}} \left(l(\alpha_l)^{l-1} + 1\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \text{const} > 0 \tag{33}$$

und

$$\varphi(z) = \frac{A_l}{k z}.$$

Die Funktionen $\chi(z)$ und $\varphi(z)$ erfüllen demnach auch alle vor dem Satz 1 ausgesprochenen Bedingungen.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß

$$f(z) = o\left\{\frac{f(x)}{(\varphi''(x))^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad \text{ist für} \quad x \to 0, \quad x^{\frac{3}{4}} < |y| \leq \pi$$

gleichmäßig in y. Statt dessen beweisen wir im gleichen Intervall

$$f(z) = O\left(e^{\frac{A}{k x} - c_{10} x^{-\frac{1}{2}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0 \tag{34}$$

gleichmäßig in y, woraus sich die obige Aussage mit Hilfe von (32) und (33) ergibt.

Es sei zuerst

$$\left|y - \frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leq x^{\frac{3}{4}} \quad \text{für} \quad \lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\left[\frac{k}{2}\right].$$

Wir betrachten dann die Funktion

$$f\left(z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} H\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) \Theta\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) \frac{dw}{w}$$

für $x \to 0$, $|y| \leq x^{\frac{3}{4}}$. Aus Gl. (12) erkennt man

$$H\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) = H\left(w\, e^{-\frac{2\pi i\lambda m}{k}}, z\right)$$

und

$$\Theta\left(w, z + \frac{2\pi i\lambda}{k}\right) = \Theta(w, z).$$

Wir können deshalb wieder den Hilfssatz benutzen. Aus (15) und (16) folgt

$$H\left(w\, e^{-\frac{2\pi i\lambda m}{k}}, z\right) = O\left(e^{\Re\left\{\frac{1}{kz} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \varphi^r e^{ir\left(\varphi - \frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}\right\}}\right)$$

und

$$\Theta(w, z) = O\left(e^{\Re\left\{\frac{1}{2klz} \log^2(\varrho e^{i\varphi}) + c_{11} x^{-\frac{1}{2}}\right\}}\right)$$

für $x \to 0$, $|y| \leq x^{\frac{3}{2}}$ gleichmäßig in y und φ. Es gilt

$$\Re\left\{\frac{1}{k z}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}e^{i r\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}\right\} \leq \frac{1}{k x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{\varrho}{k}\,\Re\left\{\frac{e^{i\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}}{z}-\frac{1}{x}\right\}$$

$$\leq \frac{1}{k x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{\varrho}{k x}\left\{\frac{\cos\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)+\frac{y}{x}\sin\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)}{1+(y^2/x^2)}-1\right\}$$

$$\leq \frac{1}{k x}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^2}+\frac{\varrho}{k x}\left\{\cos\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)-1\right\}+c_{12}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\Re\left\{\frac{1}{2k l z}\log^2(\varrho e^{i\varphi})\right\} \leq \frac{x(\log^2\varrho-\varphi^2)+2\varphi y\log\varrho}{2k l(x^2+y^2)} \leq \frac{\log^2\varrho}{2k l x}-\frac{\varphi^2}{2k l x}+c_{13}\,x^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist

$$\varrho\left(\cos\left(\varphi-\frac{2\pi\lambda m}{k}\right)-1\right)-\frac{\varphi^2}{2l} \leq -c_{14} \quad \text{für alle} \quad \varphi,$$

da $(m, k)=1$ vorausgesetzt war. Es ist also

$$H\left(w\,e^{-\frac{2\pi i\lambda m}{k}}, z\right)\Theta(w,z)=O\left\{e^{\frac{1}{x}\left(\frac{A_1}{k}-c_{14}\right)+c_{13}x^{-\frac{1}{2}}}\right\}=O\left\{e^{\frac{1}{k x}(A_1-c_{14})}\right\}$$

für $x \to 0$, $|y| \leq x^{\frac{3}{2}}$ gleichmäßig in y und φ. Hieraus folgt für diesen Fall die Abschätzung (34).

Es sei nun

$$x^{\frac{3}{2}} < \left|y-\frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leq \frac{\pi}{k}, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Durch diese Ungleichungen werden alle restlichen Intervalle mit erfaßt. Wir benutzen wieder die Darstellung (13) von $f(z)$. Nach Gl. (12) ist stets

$$|\Theta(w,z)| \leq \Theta(\varrho, x),$$

also nach (16)

$$\Theta(w,z)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{\frac{1}{2k l x}\log^2\varrho}\right)$$

für alle φ und y. Ferner ist nach Gl. (17) offenbar

$$\log|H(w,z)| \leq \log H(\varrho, x)+\Re\left\{w\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(k n+m)z}\right\}-\varrho\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(k n+m)x}.$$

Für $\left|y-\frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leq \frac{\pi}{k}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(k n+m)z}=\frac{e^{-m z}}{1-e^{-k z}}=\frac{e^{-2\pi i\frac{\lambda m}{k}}}{k\left(z-\frac{2\pi i\lambda}{k}\right)}+O(1) \quad \text{für} \quad x \to 0.$$

Mit $y_1 = y - \frac{2\pi\lambda}{k}$ folgt also

$$\Re\left\{w\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+m)x}\right\} - \varrho\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+m)x} \leq \frac{\varrho}{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y_1^2}{x^2}}} - 1\right\} + O(1) \leq -c_{17}\, x^{-\frac{1}{12}},$$

da $|y_1| > x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}$ ist. Aus (15) erhält man somit

$$H(w,z) = O\left(e^{\frac{1}{kx}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varrho^r}{r^3} - c_{17}\, x^{-\frac{1}{12}}}\right)$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$H(w,z)\,\Theta(w,z) = O\left(e^{\frac{A_l}{kx} - c_{18}\, x^{-\frac{1}{12}}}\right) \quad \text{für} \quad x \to 0, \qquad x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} < \left|y - \frac{2\pi\lambda}{k}\right| \leq \frac{\pi}{k},$$

gleichmäßig in y und φ, woraus sich wieder die Abschätzung (34) ableitet.

Es erfüllt demnach die Funktion $f(z)$ alle Voraussetzungen von Satz 1. Aus (33) und (5) erhält man nun nach kurzer Rechnung die asymptotische Gleichung für $r(n)$. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

§ 3. Beispiele.

1. Wir setzen im Satz 2 die Zahl $k = 1$. In der Entwicklung

$$F(v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v^{\frac{l}{2}\nu(\nu-1)+m\nu}}{(1-v)(1-v^2)\dots(1-v^\nu)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_m^{(l)}(n)\cdot v^n$$

ist $h_m^{(l)}(n)$ gleich der Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in natürliche Zahlen $n_i \geq m$, wobei in jeder Zerlegung die Zahlen n_i einen Mindestabstand l besitzen (vgl. [4], S. 289). Dann ergibt der Satz 2 den

Satz 3. *Für $n \to \infty$ gilt*

$$h_m^{(l)}(n) \sim C(1,l,m)\, n^{-\frac{3}{4}}\, e^{2\cdot\sqrt{A_l\cdot n}}$$

mit den Abkürzungen von Satz 2.

Aus der Bedeutung von $C(1,l,m)$ erhält man noch den

Satz 4. *Es seien m_1 und m_2 natürliche Zahlen. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{m_1}^{(l)}(n)}{h_{m_2}^{(l)}(n)} = (\alpha_l)^{m_1 - m_2}.$$

Diese Grenzwerte sind für $l > 1$ algebraische Einheiten.

Bemerkung. Für $l = 2$, $m = 1$ bzw. $= 2$ ist nach einem Satz von ROGERS und RAMANUJAN ([4], S. 289)

$$h_1^{(2)}(n) = r_0(n;5)$$

und

$$h_2^{(2)}(n) = r_1(n;5),$$

wobei $r_\nu(n;5)$ die Anzahl aller Partitionen von n in positive quadratische Reste ($\nu=0$) bzw. in Nichtreste ($\nu=1$) modulo 5 ist. In diesem Falle sind die asymptotischen Aussagen in den Sätzen 3 und 4 von [2] bereits enthalten.

2. Wir setzen im Satz 2 die Zahl $l=1$. Dann ist $\alpha_1=\frac{1}{2}$ und $A_1=\frac{\pi^2}{12}$. In der Entwicklung

$$(35)\qquad \begin{cases} F(v)=1+\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{v^{\frac{k}{2}\nu(\nu-1)+m\nu}}{(1-v^k)(1-v^{2k})\dots(1-v^{\nu k})}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+v^{kn+m}) \\ \qquad =1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^*(n;k,m)\,v^n \end{cases}$$

bedeutet $q^*(n;k,m)$ die Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in verschiedene natürliche Zahlen $n_i\equiv m \pmod k$ mit $n_i\geqq m$ (vgl. [2], Satz 2). Dann liefert der Satz 2 den

Satz 5. *Für $n\to\infty$ gilt*

$$q^*(n;k,m)\sim 2^{-\left(1+\frac{m}{k}\right)}\cdot(3k)^{-\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{4}}e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3k}}}$$

Bemerkung. Es ist $q^*(n;1,1)=q(n;2,1)$, d.h. gleich der Anzahl aller Zerlegungen der Zahl n in ungerade natürliche Zahlen. Hier ist bekanntlich ([1], S. 1075)

$$q(n;2,1)\sim\frac{1}{4\cdot 3^{\frac{1}{4}}}n^{-\frac{3}{4}}e^{\pi\sqrt{\frac{n}{3}}}\quad\text{für}\quad n\to\infty.$$

3. Es sei d die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers,

$$(36)\qquad a_n^{(\nu)}=\frac{1}{2}\left\{\chi(n)+(-1)^\nu\left(\frac{d}{n}\right)\right\}\quad\text{für}\quad \nu=0,1,$$

$\chi(n)$ der Hauptcharakter modulo $|d|$ und $\left(\frac{d}{n}\right)$ das KRONECKER-Symbol. Es ist offenbar

$$a_n^{(\nu)}=\begin{cases}1 & \text{für } \left(\frac{d}{n}\right)=(-1)^\nu \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

In der Entwicklung

$$F_\nu(v)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+v^n)^{a_n^{(\nu)}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}r_\nu^*(n;d)\,v^n$$

ist dann $r_\nu^*(n;d)$ gleich der Anzahl aller Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen n_i mit $\left(\frac{d}{n_i}\right)=(-1)^\nu$. Diese Funktion kann nicht mit Hilfe von Satz 2 behandelt werden. Es gilt aber

$$F_\nu(v)=\prod_{m=1}^{|d|-1}\cdot\prod_{n=0}^{\infty}(1+v^{|d|n+m})^{a_m^{(\nu)}}.$$

Deshalb erfüllt die Funktion $F_\nu(e^{-z}) = f_\nu(z)$ die Voraussetzungen des Satzes 1. Aus (32) folgt insbesondere $(k = |d|,\ l = 1)$

$$f_\nu(z) \sim \prod_{m=1}^{|d|-1} 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{|d|}\right) a_m^{(\nu)}} e^{\frac{\pi^2}{12 \cdot |d| \cdot z} \cdot a_m^{(\nu)}}$$

für $x \to 0$, $|y| \leq x^{\frac{3}{4}}$ gleichmäßig in y. Ist $\varphi(k)$ die EULERsche Funktion, so gilt nach (36) sicher

$$\sum_{m=1}^{|d|-1} a_m^{(\nu)} = \frac{\varphi(|d|)}{2}$$

und

$$-\frac{1}{|d|} \sum_{m=1}^{|d|-1} m\, a_m^{(\nu)} = -\frac{\varphi(|d|)}{4} - \frac{(-1)^\nu}{2 \cdot |d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} m \cdot \left(\frac{d}{m}\right)$$

$$= -\frac{\varphi(|d|)}{4} + \begin{cases} 0 & \text{für } d > 0 \\ (-1)^\nu \cdot h/w & \text{für } d < 0, \end{cases}$$

wobei h die Klassenzahl und w die Anzahl der Einheitswurzeln des imaginärquadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ bedeutet. Es wird also

$$f_\nu(z) \sim \begin{cases} e^{\frac{\pi^2 \varphi(d)}{24 \cdot d \cdot z}} & \text{für } d > 0 \\ 2^{(-1)^\nu \frac{h}{w}} e^{\frac{\pi^2 \varphi(|d|)}{24 \cdot |d| \cdot z}} & \text{für } d < 0 \end{cases}$$

für $x \to 0$, $|y| \leq x^{\frac{3}{4}}$ gleichmäßig in y. Aus Satz 1 ergibt sich dann der

Satz 6. *Für $n \to \infty$ gilt*

$$r_\nu^*(n; d) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\varphi(d)}{6 \cdot d}\right)^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{3}{4}} e^{\pi \sqrt{\frac{\varphi(d)\, n}{6 \cdot d}}} & \text{für } d > 0 \\ \frac{2^{(-1)^\nu \frac{h}{w}}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\varphi(|d|)}{6 \cdot |d|}\right)^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{3}{4}} e^{\pi \sqrt{\frac{\varphi(|d|)\, n}{6 \cdot |d|}}} & \text{für } d < 0. \end{cases}$$

Im Vergleich zu den Sätzen 4 und 5 von [2] erhält man noch den

Satz 7.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_0^*(n; d)}{r_1^*(n; d)} = \begin{cases} 1 & \text{für } d > 0 \\ 2^{\frac{2h}{w}} & \text{für } d < 0. \end{cases}$$

Literatur.

[1] INGHAM, A. E.: A Tauberian Theorem for Partitions. Ann. of Math. **42**, 1075—1090 (1941). — [2] MEINARDUS, G.: Asymptotische Aussagen über Partitionen. Math. Z. **59**, 388—398 (1954). — [3] WEBER, H.: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891. — [4] HARDY, G. H., and E. M. WRIGHT: An Introduction to the Theorie of Numbers. Oxford 1938.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. August 1954.)

PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 303—323 (1954)

Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders.

Von
DIETER PUPPE.

Einleitung.

Das Homotopieproblem für die Abbildungen eines Polyeders K in einen topologischen Raum Y (der ohne wesentliche Einschränkung als bogenweise zusammenhängend angenommen werden kann) ist nur unter sehr speziellen Voraussetzungen über die Dimension von K und die Homotopiegruppen von Y vollständig gelöst. Insbesondere ist fast nichts über die Abbildungen von K in die m-Sphäre S^m bekannt, wenn die Dimension n von K erheblich größer als m ist[1]). Einen Beitrag zur Behandlung dieses Problems zu liefern, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Dabei leitet uns vor allem folgende Frage:

K sei eine n-dimensionale geschlossene orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, σ_0 ein n-Simplex einer Zerlegung von K und $f_\alpha: K \to S^m$ eine Abbildung, so daß $f_\alpha | K - \sigma_0$ konstant ist und $\alpha \in \pi_n(S^m)$ durch $f_\alpha | \sigma_0$ repräsentiert wird; in welchen Fällen ist f_α wesentlich? Aus $\alpha = 0$ folgt die Nullhomotopie von f_α. Wegen $\pi_n(S^m) = 0$ für $n < m$ kann man sich also auf $n \geq m$ beschränken. Klar ist ferner der Fall $n = m$; dann ist f_α für $\alpha \neq 0$ immer wesentlich, denn der Grad von f_α verschwindet nicht. Falls m gerade, $n = 2m - 1$ und K eine Mannigfaltigkeit ist, so ist f_α wesentlich, wenn die Hopfsche Invariante von α $\gamma(\alpha) \neq 0$ ist, denn dann ist auch die Hopfsche Invariante der Abbildung $f_\alpha: K \to S^m$ von 0 verschieden. Wir werden zeigen, daß diese Behauptung richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung, daß K eine Mannigfaltigkeit ist, fallen läßt, und ferner, daß damit alle Fälle erschöpft sind, in denen man allgemein auf die Wesentlichkeit von f_α schließen kann; d.h. ist weder $n = m$ noch m gerade und $n = 2m - 1$, so gibt es eine n-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K, für die f_α immer nullhomotop ist, und wenn $n = 2m - 1$ und m gerade ist, dann gibt es ein K, so daß f_α für alle α mit $\gamma(\alpha) = 0$ nullhomotop ist (vgl. Satz 7, wo auch nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeiten berücksichtigt sind).

Dieses Ergebnis stützt sich auf vorhergehende allgemeinere Betrachtungen. In den §§ 1—3 wird die Theorie der „gerüstweisen Fortsetzung" von Deformationen (begründet von EILENBERG [3], in sehr allgemeiner Form behandelt von OLUM [9]) unter dem besonderen Gesichtspunkt dargestellt, daß eine Deformation $K \times I \to Y$ als Abbildung von K in den Raum der Wege von Y gedeutet werden kann (Satz 1 und 2). Wir gelangen dabei in einer bestimmten Richtung über die bekannten Tatsachen hinaus und erhalten eine notwendige Bedingung für die Nullhomotopie einer Abbildung, die mit dem

[1]) Genauer: wenn $n > m + 2$ ist; für $n \leq m + 2$ vgl. [1].

Hurewiczschen Homomorphismus $h:\pi_{n-1}(\Omega)\to H_{n-1}(\Omega)$ für den Raum Ω der geschlossenen Wege in Y mit festem Anfangspunkt zusammenhängt (vgl. Satz 3 und die anschließende Bemerkung 1). In § 4 wird der Fall betrachtet, daß K eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Hier zeigt sich eine gewisse Umkehrbarkeit von Satz 3 (vgl. Satz 4), und Satz 5 gibt auf unsere Ausgangsfrage eine allgemeine Antwort (statt S^m kann ein beliebiger bogenweise zusammenhängender Raum Y stehen), in der wieder der Homomorphismus $h:\pi_{n-1}(\Omega)\to H_{n-1}(\Omega)$ eine Rolle spielt. Die Untersuchungen von SERRE in [11], [12] über die Homotopie- und Homologiegruppen der Wegeräume von Sphären (vgl. Satz 6) gestatten es, in § 5 hieraus die bereits oben genannten Ergebnisse für $Y=S^m$ zu folgern (Satz 7).

In [5], [6] hat HOPF bewiesen, daß für gerades m jede $(2m-1)$-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit wesentlich auf die m-Sphäre S^m abgebildet werden kann. Er hat die Frage gestellt, ob das auch für allgemeinere Polyeder an Stelle der Mannigfaltigkeiten gilt. Wir können diese Frage bejahen (Satz 8), und zwar unter anderem für alle $(2m-1)$-dimensionalen Polyeder mit nicht verschwindender Bettischer Zahl der Dimension $2m-1$. Dagegen gibt es für jedes n mit $m<n<2m-1$ oder $n=2m-1$ und $m=$ ungerade eine n-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf S^m abbilden läßt (Satz 9).

§ 1. Charakterisierung von Abbildungen durch Koketten.

Wir betrachten einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K — er darf unendlich sein und unendliche Dimension haben — sowie einen beliebigen bogenweise zusammenhängenden Raum Y, in dem wir einen Punkt y_0 auszeichnen. Unter der konstanten Abbildung eines Raumes in Y verstehen wir immer die Abbildung, die alles in y_0 überführt. K^r sei das r-dimensionale Gerüst von K. Eine Abbildung von K oder eines Teilraumes, die auf K^r konstant ist, heiße r-konstant. I sei das Einheitsintervall der reellen Zahlen.

Eine Deformation relativ K^0 der konstanten Abbildung $K\to y_0$ in sich ist eine Abbildung $F: K\times I\to Y$ mit $F(K\times\partial I\cup K^0\times I)=y_0$ [2]). Ist für ein gewisses $n>1$ eine solche Homotopie auf K^{n-1} gegeben, F also auf $K\times\partial I\cup K^{n-1}\times I$ definiert, so ist sie im allgemeinen nicht auf K^n fortsetzbar; sondern notwendig und hinreichend dafür ist das Verschwinden der n-dimensionalen Kokette $c(F)$ von K, die man erhält, indem jedem orientierten n-Simplex σ von K das durch $F\,|\,\partial(\sigma\times I)$ [2]) repräsentierte Element von $\pi_n(Y, y_0)$ zugeordnet wird. Dabei sei als Grundpunkt auf der Urbildsphäre $\partial(\sigma\times I)$ irgendeine Ecke $(e, 0)$ von $\sigma\times 0$ gewählt und die Orientierung so, daß die kanonische Abbildung $\sigma\to\sigma\times 0$ orientierungserhaltend ist. Für n-einfaches Y ordnet sich diese Definition dem von EILENBERG [3] eingeführten Begriff des Hinderniskozykels unter. Wir bezeichnen die Menge aller Koketten von K mit Koeffizienten aus

[2]) Üblicherweise ist ∂ der Randoperator in einer Kettengruppe. In dieser Arbeit soll jedoch auch der Rand einer (abgeschlossenen) Zelle z, aufgefaßt als Teilraum von z, mit ∂z bezeichnet werden. Ferner werden wir häufig für ein Simplex als topologischen Raum einerseits und als Kette andererseits dasselbe Zeichen verwenden.

$\pi_n(Y)$, die man in dieser Weise als Hindernisse für Deformationen erhält, mit $C^n_*(K, \pi_n(Y))$. Diese Menge wird in § 2 näher untersucht werden. Sie spielt für das Homotopieproblem eine entscheidende Rolle.

Einer $(n-1)$-konstanten Abbildung $f: K^n \to Y$ ordnen wir die n-dimensionale Kokette $d(f)$ von K mit Koeffizienten aus $\pi_n(Y, y_0)$ zu, deren Wert auf σ durch $f|\sigma: (\sigma, \partial\sigma) \to (Y, y_0)$ gegeben ist. Man kann so jede Kokette erhalten, und die Homotopieklasse von f relativ K^{n-1} ist durch $d(f)$ charakterisiert. $d(f)$ ist genau dann ein Kozykel, wenn f auf K^{n+1} fortsetzbar ist; denn für ein $(n+1)$-Simplex σ' wird $\delta\, d(f)\,(\sigma') = d(f)\,(\partial\sigma')$ durch $f|\partial\sigma'$ repräsentiert[3]), und die Nullhomotopie dieser Abbildung für jedes σ' ist gleichbedeutend mit der Fortsetzbarkeit von f auf K^{n+1}.

Seien f und g zwei $(n-1)$-konstante Abbildungen $K^n \to Y$. Nehmen wir an, daß die Homotopie $f \sim g$ rel. K^0 gilt und durch die Deformation $F: K^n \times I \to Y$ bewirkt wird. Dann ist insbesondere $F|\partial(\sigma \times I)$ für jedes n-Simplex σ auf ganz $\sigma \times I$ fortsetzbar, also nullhomotop. Andererseits repräsentiert $F|\partial(\sigma \times I)$ die Summe dreier Elemente von $\pi_n(Y, y_0)$, die durch folgende Abbildungen von $\partial(\sigma \times I)$ in Y gegeben sind (Grundpunkt und Orientierung wie oben):

1. $(x, t) \to \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad t = 0 \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$

2. $(x, t) \to \begin{cases} g(x) & \text{für} \quad t = 1 \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. $F'|\partial(\sigma \times I)$, wobei $F': K \times \partial I \cup K^{n-1} \times I \to Y$ durch

$$F'(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{für} \quad x \in K^{n-1} \\ y_0 & \text{für} \quad t = 0 \quad \text{oder} \quad 1 \end{cases}$$

definiert ist.

Die erste Abbildung repräsentiert dasselbe Element von $\pi_n(Y, y_0)$ wie $f|\sigma$, die zweite bis auf Vorzeichenumkehr (denn die kanonische Abbildung $\sigma \to \sigma \times 1 \subset \partial(\sigma \times I)$ kehrt die Orientierung um) dasselbe wie $g|\sigma$. Also folgt

$$d(f) - d(g) + c(F') = 0$$

d. h.

$$d(g) - d(f) \in C^n_*(K, \pi_n(Y)).$$

Setzen wir umgekehrt von f und g nur die letzte Beziehung voraus — die Deformation der konstanten Abbildung auf K^{n-1}, die das entsprechende Element von C^n_* liefert, möge wieder F' heißen —, so definieren wir F auf $K^{n-1} \times I \cup K^n \times \partial I$ durch

$$F(x, t) = \begin{cases} F'(x, t) & \text{für} \quad x \in K^{n-1} \\ f(x) & \text{für} \quad t = 0 \\ g(x) & \text{für} \quad t = 1. \end{cases}$$

[3]) Das ist ein spezieller Fall des „Homotopieadditionssatzes" und folgt (ebenso wie der allgemeine Satz selbst) unmittelbar aus der Lefschetzschen Definition der Addition in $\pi_n(Y, y^0)$ (vgl. [8], S. 170ff.).

$F|\partial(\sigma\times I)$ repräsentiert dann wieder die Summe der Klassen der obigen Abbildungen 1. bis 3., d.h. den Wert von $d(f)-d(g)+c(F')$ an der Stelle σ. Da dieser Wert nach Voraussetzung verschwindet, ist $F|\partial(\sigma\times I)$ nullhomotop, F läßt sich also auf ganz $K^n\times I$ erweitern und liefert $f\simeq g$ rel. K^0. Damit ist gezeigt:

Hilfssatz 1. *Zwei Abbildungen $f, g: K^n\to Y$ mit $f(K^{n-1})=g(K^{n-1})=y_0$ $(n>1)$ sind genau dann homotop relativ K^0, wenn $d(g)-d(f)\in C^n_\sharp\left(K, \pi_n(Y)\right)$ ist.*

In bekannter Weise definiert man Operationen der Elemente von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\pi_n(Y, y_0)$. Etwas Analoges soll hier für die Menge der Homotopieklassen relativ K^{n-1} von $(n-1)$-konstanten Abbildungen $f: K^n\to Y$ an Stelle von $\pi_n(Y, y_0)$ durchgeführt werden, um auf diesem Wege die freien Deformationen solcher Abbildungen zu untersuchen. Ist w ein in y_0 beginnender und endender Weg in Y, so erklären wir eine neue Abbildung $w\cdot f: K^n\to Y$ folgendermaßen:

Für jedes n-Simplex σ von K und jedes $t\in I$, sei σ_t das in σ konzentrisch und ähnlich gelegene Simplex, dessen Linearausdehnungen sich von denen von σ um den Faktor $1-\frac{t}{2}$ unterscheiden. m_σ sei der gemeinsame Mittelpunkt, und die Hilfsabbildungen $\lambda_t: \sigma_t\to\sigma$ und $\chi_t: (\sigma-\sigma_t)\to I$ seien so erklärt:

1. λ_t ist die affine Streckung von σ_t auf σ.

2. χ_t bildet den in $\sigma-\sigma_t$ liegenden Teil jedes von m_σ ausgehenden Strahls linear auf das Teilintervall $[1-t, 1]$ von I ab, und zwar so, daß $\partial\sigma$ in $1-t$ und $\partial\sigma_t$ in 1 übergeht.

Dann wird definiert

$$f_t(x)=\begin{cases} f\lambda_t(x) & \text{für} \quad x\in\sigma_t \\ w\chi_t(x) & \text{für} \quad x\in\sigma-\sigma_t \end{cases}$$

und

$$f_1=w\cdot f.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß f und $w\cdot f$ frei homotop sind, nämlich vermöge f_t. Offenbar ist $w\cdot f\simeq w'\cdot f'$ rel. K^{n-1}, wenn $w\simeq w'$ und $f\simeq f'$ rel. K^{n-1} gilt, also wird tatsächlich eine Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf die Abbildungsklassen induziert. Nach der Definition der Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\pi_n(Y, y_0)$ (LEFSCHETZ [8] S. 173f.) ist ferner klar, daß

$$d(w\cdot f)=w\cdot d(f)\ ^{4})$$

gilt.

Wir wenden uns nun dem Problem der freien Homotopie von zwei $(n-1)$-konstanten Abbildungen $f, g: K^n\to Y$ zu: Sei $f\simeq g$ und $F: K^n\times I\to Y$ die Deformation. Für einen festen Punkt $x_0\in K^0$ definiert die Abbildung $t\to F(x_0, t)$ einen gewissen Weg w in Y. Deformieren wir g weiter in $w\cdot g$ (wie oben angegeben), so beschreibt x_0 bei der ganzen Deformation von f in $w\cdot g$ den aus w und dem Inversen von w zusammengesetzten Weg, also einen nullhomotopen. Bezeichnen wir mit $G: K^n\times I\to Y$ die ebengenannte Homo-

---

4) Die Kokette $w\cdot d(f)$ ist definiert durch: $(w\cdot d(f))(\sigma)=$ Bildelement von $d(f)(\sigma)\in\pi_n(Y, y^0)$ bei der Anwendung von w.

topie von f in $w \cdot g$, so kann man G auf $K^0 \times I \cup K^n \times \partial I$ so deformieren, daß es über $K^n \times \partial I$ unverändert bleibt und die Endabbildung auf $K^0 \times I$ konstant ist. Diese Deformation läßt sich auf ganz $K^n \times I$ fortsetzen; denn $(K^0 \times I \cup K^n \times \partial I) \times I \cup K^n \times I \times 0$ ist Retrakt von $K^n \times I \times I$. Die Endabbildung ist eine Homotopie von f in $w \cdot g$ relativ K^0 [5]), nach Hilfssatz 1 gilt also $d(w \cdot g) - d(f) \in C^n_*$.

Ist umgekehrt diese Relation für f und g und einen geeigneten Weg w vorausgesetzt, so folgt nach Hilfssatz 1 $w \cdot g \simeq f$ rel. K^0, und wegen $w \cdot g \simeq g$ ist $g \sim f$. Wir haben also:

Hilfssatz 2. *Zwei Abbildungen $f, g: K^n \to Y$ mit $f(K^{n-1}) = g(K^{n-1}) = y_0$ $(n > 1)$ sind genau dann frei homotop, wenn es einen Weg w gibt, so daß $w \cdot d(g) - d(f) \in C^n_*(K, \pi_n(Y))$ ist.*

Ist Y n-einfach im Sinne von EILENBERG, so wirken die Wege in $\pi_n(Y, y_0)$ als Identität; dann fällt der Begriff der Homotopie relativ K^0 mit dem der freien Homotopie zusammen.

Interessiert man sich nur für die Nullhomotopie einer Abbildung f, so ist der Unterschied zwischen freien Deformationen und solchen relativ K^0 ebenfalls unwesentlich. Setzt man nämlich $g = y_0$ konstant, so ist $w \cdot d(g) = 0$ für jedes w, und es folgt:

Hilfssatz 3. *$f: K^n \to Y$ mit $f(K^{n-1}) = y_0$ $(n > 1)$ ist genau dann nullhomotop, wenn $d(f) \in C^n_*(K, \pi_n(Y))$ ist.*

§ 2. Untersuchung von C^n_*.

Die Hilfssätze 1 bis 3 des vorigen Paragraphen gewinnen dann Bedeutung, wenn man die Teilmengen $C^n_*(K, \pi_n(Y))$ der entsprechenden Kokettengruppe kennt. Um uns diesem Ziel zu nähern, gehen wir zu einer anderen Deutung von C^n_* über. Zunächst einige Vorbereitungen:

Sei Ω der Raum der in y_0 beginnenden und endenden nullhomotopen Wege von Y, d.h. die Menge der relativ ∂I nullhomotopen Abbildungen $w: I \to Y$ mit $w(\partial I) = y_0$, versehen mit der „kompakt-offenen" Topologie; das ist die gröbste Topologie, in der die Menge $\{w \mid w(C) \subset O\}$ für jedes kompakte $C \subset I$ und jedes offene $O \subset Y$ offen ist. Bei dieser Topologie ist eine Abbildung $\varphi: X \to \Omega$ genau dann stetig, wenn es die durch $F(x, t) = \varphi(x)(t)$ definierte Abbildung $F: X \times I \to Y$ ist. In Ω ist in natürlicher Weise eine „Multiplikation" $u \vee v$ mit

$$(u \vee v)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{für } t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t-1), & \text{für } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ein zu einem gegebenen Element u „inverses" u^- mit

$$u^-(t) = u(1-t)$$

[5]) Dieser Schluß zeigt allgemein: Für 1-konstante Abbildungen eines zusammenhängenden Komplexes K ist Homotopie relativ K^0 mit der Existenz einer Deformation gleichbedeutend, bei der mindestens eine (und infolgedessen jede) Ecke von K einen nullhomotopen Weg beschreibt.

und ein „neutrales Element" w_0 mit

$$w_0(t) = y_0 \quad \text{für alle} \quad t$$

definiert. Entsprechend setzen wir für zwei Abbildungen $\varphi, \psi: X \to \Omega$

$$(\varphi \vee \psi)(x) = \varphi(x) \vee \psi(x)$$

$$\varphi^-(x) = (\varphi(x))^-$$

und bezeichnen eine Abbildung, die alles in w_0 überführt, ebenfalls mit w_0.

Wie SERRE in [11] S. 477ff. zeigt, ist Ω in allen Dimensionen einfach, d.h. eine Abbildung einer r-Sphäre in Ω bestimmt eindeutig ein Element von $\pi_r(\Omega)$, ohne daß auf einen festen Grundpunkt Bezug genommen werden muß. Ferner gilt:

Hilfssatz 4. *Sind φ und ψ Repräsentanten von α bzw. $\beta \in \pi_r(\Omega)$, so wird $\alpha + \beta$ durch $\varphi \vee \psi$ und $(-\alpha)$ durch φ^- repräsentiert.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß φ und ψ Abbildungen von I^r in Ω sind, die ∂I^r in w_0 überführen. Die Addition in $\pi_r(\Omega)$ wird dann induziert durch folgende „Addition" der Abbildungen:

$$(\varphi + \psi)(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \begin{cases} \varphi(2x_1, x_2, \ldots, x_r) & \text{für } x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_r) & \text{für } x_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man bestätigt die folgenden Homotopien relativ ∂I^r:

$$\varphi \vee \psi \sim (\varphi + w_0) \vee (w_0 + \psi) = (\varphi \vee w_0) + (w_0 \vee \psi) \simeq \varphi + \psi,$$

d.h. $\varphi \vee \psi$ repräsentiert tatsächlich $\alpha + \beta$. Insbesondere gilt $\varphi + \varphi^- \simeq \varphi \vee \varphi^-$, und aus der Bedeutung von $\varphi \vee \varphi^-$ ergibt sich $\varphi \vee \varphi^- \sim w_0$, d.h. φ^- repräsentiert $(-\alpha)$.

Hilfssatz 5. *Für $r \geq 1$ ist $\pi_r(\Omega) \cong \pi_{r+1}(Y, y_0)$, und zwar kann ein Isomorphismus dadurch hergestellt werden, daß für ein $(r+1)$-Simplex σ, in dem eine Ecke e ausgezeichnet sei, jeder Abbildung $\gamma: \partial\sigma \to \Omega$ mit $\gamma(e) = w_0$ die Abbildung $G: \partial(\sigma \times I) \to Y$ zugeordnet wird, die durch*

$$G(x, t) = \begin{cases} \gamma(x)(t) & \text{für } x \in \partial\sigma \\ y_0 & \text{für } t = 0 \text{ oder } 1 \end{cases}$$

definiert ist. Grundpunkt auf $\partial(\sigma \times I)$ ist dabei $(e, 0)$ [6]).

Beweis. Es ist klar, daß man auf diese Weise jedenfalls eine eindeutige Abbildung der Homotopieklassen erhält. Daß sie auch linear ist, folgt sehr einfach unter Benutzung der LEFSCHETZschen Definition der Addition (vgl. [8] S. 170ff.). Sind nämlich zwei Abbildungen $\gamma, \gamma': \partial\sigma \to \Omega$ auf disjunkte „Inseln" (r-dimensionale Teilvollkugeln von $\partial\sigma$) konzentriert, so sind es auch die zu-

[6]) Man kann unter Verwendung von Würfeln als Urbilder einen Isomorphismus auf einfachere Weise konstruieren. Wir werden im folgenden aber gerade die angegebene Definition benutzen müssen.

gehörigen Abbildungen $G, G' : \partial(\sigma \times I) \to Y$ [auf $(r+1)$-dimensionale Teilvollkugeln von $\partial(\sigma \times I)$], und es ist offenbar gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Zusammensetzung einerseits und den Übergang von γ zu G andererseits vornimmt. Um die eindeutige Umkehrbarkeit zu zeigen, wählen wir eine Deformation Δ_t von $\partial(\sigma \times I)$ in sich, die den Teilraum $\sigma \times \partial I \cup e \times I$ in sich auf den Punkt $(e, 0)$ zusammenzieht. Aus $G \sim 0$ rel. $(e, 0)$ folgt dann $G\Delta_1 \sim 0$ rel. $\sigma \times \partial I \cup e \times I$ und vermöge $G\Delta_t$ schließlich $G \sim 0$ rel. $\sigma \times \partial I \cup e \times I$, was mit $\gamma \simeq 0$ rel. e gleichbedeutend ist.

Wir kommen nun zur Umdeutung von $C^n_*\big(K, \pi_n(Y)\big)$. Eine Deformation der konstanten Abbildung von K in Y relativ K^0 kann als Abbildung von K in Ω aufgefaßt werden. Das Problem der Fortsetzung einer solchen Deformation entspricht völlig dem der Fortsetzung der zugehörigen Abbildung in Ω. Ist eine Deformation F auf K^{n-1} gegeben, so gehört zu ihr die durch $\varphi(x)(t) = F(x, t)$ definierte Abbildung $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$. Der Fortsetzung von φ stellt sich der Hinderniskozykel $c(\varphi) \in C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$ (= Kozykelgruppe von K mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ als Koeffizientenbereich) entgegen, dessen Wert auf σ durch $\varphi \,|\, \partial\sigma$ repräsentiert wird. Als Grundpunkt auf $\partial\sigma$ kann dieselbe Ecke e von σ wie oben (§ 1) genommen werden, was wegen der Einfachheit von Ω jedoch unwesentlich ist. Daß $c(\varphi)$ tatsächlich ein Kozykel ist, kann man in diesem Falle aus [3] (10.1) entnehmen. Wird $\pi_n(Y, y_0)$ vermöge des in Hilfssatz 5 genannten Isomorphismus mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ identifiziert, so ist klar, daß $c(\varphi) = c(F)$ gilt. Ist umgekehrt $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$ gegeben, so ist ihm eine Deformation F der konstanten Abbildung auf K^{n-1} durch $F(x, t) = \varphi(x)(t)$ für $x \in K^{n-1}$ [und $F(x, 0) = F(x, 1) = y_0$ für alle x] zugeordnet. Im allgemeinen wird zwar F auf K^0 nicht konstant sein, aber zu jedem φ gibt es ein homotopes φ' mit $\varphi'(K^0) = w_0$, das zugehörige F' ist eine Deformation relativ K^0, und es gilt $c(F') = c(\varphi') = c(\varphi)$. Wir fassen dies zusammen:

Hilfssatz 6. *Wird $\pi_n(Y, y_0)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ vermöge Hilfssatz 5 identifiziert, so besteht C^n_* aus allen Elementen der Kozykelgruppe $C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$, die als Hindernisse von Abbildungen $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$ auftreten.*

Die hier genannte Identifikation von $\pi_n(Y, y_0)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ soll für alles Weitere festgehalten werden. Es läßt sich folgern:

Hilfssatz 7. *C^n_* ist Untergruppe der Kozykelgruppe $C^n\big(K, \pi_n(Y)\big) = C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$ und enthält alle Koränder.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 6 und der Beziehung $c(\varphi \vee \psi^-) = c(\varphi) - c(\psi)$, die ihrerseits eine unmittelbare Folge von Hilfssatz 4 ist. Zum Beweise des zweiten Teils nehmen wir an, $c = \delta c'$ sei irgendein Korand in $C^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$. Offenbar kann man eine Abbildung $\varphi : K^{n-1} \to \Omega$ mit folgenden Eigenschaften finden:

1. $\varphi(K^{n-2}) = w_0$.

2. $\varphi \,|\, \sigma'$ repräsentiert für jedes $(n-1)$-Simplex σ' das Element $c'(\sigma') \in \pi_{n-1}(\Omega)$.

Dann ist $c(\varphi)(\sigma) = c'(\partial\sigma)$ [3] und weiter $c'(\partial\sigma) = (\delta c')(\sigma) = c(\sigma)$ für jedes σ', folglich $c = c(\varphi) \in C^n_*$ nach Hilfssatz 6, und das war zu zeigen.

§ 3. Allgemeine Ergebnisse.

Hilfssatz 7 erlaubt es, von C^n_* zum kanonischen Bild H^n_* in der Kohomologiegruppe $H^n = H^n\big(K, \pi_n(Y)\big) = H^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big)$ überzugehen. In § 1 wurde für eine $(n-1)$-konstante Abbildung $f: K^n \to Y$ die Kokette $d(f)$ definiert; ihre Kohomologieklasse sei $\bar{d}(f)$ [7]). Zwei Abbildungen $K \to Y$ heißen n-homotop, wenn ihre Einschränkungen auf K^n homotop sind. Insbesondere heißt $f: K \to Y$ n-nullhomotop, wenn $f|K^n$ nullhomotop ist; das ist gleichbedeutend mit der Existenz einer n-konstanten zu f homotopen Abbildung $f': K \to Y$. Mit diesen Bezeichnungen geben wir den Ergebnissen von § 1 die Form, in der wir sie im folgenden benutzen werden [8]):

Satz 1. *Für $n > 1$ ist eine $(n-1)$-konstante Abbildung $f: K \to Y$ genau dann n-nullhomotop, wenn $\bar{d}(f|K^n) \in H^n_*$ ist.*

Satz 2. *Ist Y n-einfach $(n > 1)$, so induziert die Zuordnung $f \to \bar{d}(f|K^n)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der n-Homotopieklassen von $(n-1)$-konstanten Abbildungen $f: K \to Y$ in die Faktorgruppe H^n/H^n_*. Wenn K höchstens $(n+1)$-dimensional ist, handelt es sich um eine Abbildung auf ganz H^n/H^n_*.*

Beweis. Satz 1 ist eine Umformulierung von Hilfssatz 3. Der erste Teil von Satz 2 folgt aus Hilfssatz 2; für den zweiten Teil genügt es, daß jeder n-Kozykel von K in der Form $d(f|K^n)$ mit $f: K^{n+1} \to Y$, $f(K^{n-1}) = y_0$ darstellbar ist, und das wurde bereits bei der Definition von d (§ 1) gezeigt.

Für H^n_* gilt nun:

Satz 3. *H^n_* liegt im Kern der durch den Hurewiczschen Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ [9]) induzierten Abbildung*

$$\tilde{h}: H^n\big(K, \pi_{n-1}(\Omega)\big) \to H^n\big(K, H_{n-1}(\Omega)\big).$$

Beweis. Jedes Element aus H^n_* besitzt als Repräsentanten den Hinderniskozykel $c(\varphi)$ einer geeigneten Abbildung $\varphi: K^{n-1} \to \Omega$. Wir müssen zeigen: Der Kozykel, der einem n-Simplex σ den Wert $h\big(c(\varphi)(\sigma)\big)$ zuordnet, ist ein Korand. Sei $S_{n-1}(\Omega)$ die Gruppe der $(n-1)$-dimensionalen singulären Ketten von Ω und $C_{n-1}(\Omega)$ die Untergruppe der Zykel. $S_{n-1}(\Omega)/C_{n-1}(\Omega)$ ist isomorph mit $\partial S_{n-1}(\Omega)$, und diese Gruppe ist als Untergruppe einer freien Gruppe selbst frei. Daraus folgt, $C_{n-1}(\Omega)$ besitzt in $S_{n-1}(\Omega)$ ein Komplement, und es gibt eine Projektion $\omega: S_{n-1}(\Omega) \to C_{n-1}(\Omega)$. Jedem $(n-1)$-Simplex σ' von K können wir nun die Homologieklasse $\overline{\omega(\varphi|\sigma')}$ zuordnen, von der man einen Repräsentanten dadurch erhält, daß ω auf das singuläre Simplex $\varphi|\sigma'$ angewandt wird. Diese Zuordnung definiert eine $(n-1)$-dimensionale Kokette

[7]) Man beachte, daß $\bar{d}(f)$ nicht aus Kozykeln zu bestehen braucht; das ist jedoch der Fall, wenn f auf K^{n+1} fortsetzbar ist, und dann erhalten wir eine Kohomologieklasse im üblichen Sinn.

[8]) Der Inhalt der Sätze 1 und 2 ist für sich betrachtet nicht neu (vgl. z. B. OLUM [9]). Der entscheidende Fortschritt liegt in der Heranziehung des Wegeraums Ω. Dadurch erhält man genauere Aussagen über H^n_* (vgl. Satz 3 und 4) und damit Anwendungen der allgemeinen Theorie (vgl. § 5).

[9]) $H_{n-1}(\Omega)$ bezeichnet die singuläre Homologiegruppe von Ω.

c' von K. Für sie gilt

$$(\delta c')(\sigma) = c'(\partial\sigma) = \sum_i \overline{\omega(\varphi|\sigma_i)} = \overline{\omega(\varphi|\partial\sigma)} = \overline{(\varphi|\partial\sigma)} = h\big(c(\varphi)(\sigma)\big),$$

und das beweist die Behauptung.

Die Sätze 1 bis 3 bilden die Grundlage für die §§ 4 und 5. Die folgenden Bemerkungen dienen zur Erläuterung dieser Sätze und ihres Zusammenhangs mit bekannten Tatsachen:

1. Um festzustellen, ob eine gegebene Abbildung $f: K \to Y$ nullhomotop ist, kann man versuchen, sie gerüstweise in die konstante Abbildung $K \to y_0$ zu deformieren. Angenommen, man findet (für ein $n > 1$) eine zu f homotope $(n-1)$-konstante Abbildung $f': K \to Y$, d.h. f ist $(n-1)$-nullhomotop. Es ist nicht ohne Weiteres zu entscheiden, ob f dann auch n-nullhomotop ist. Die obigen Sätze liefern eine notwendige Bedingung dafür, nämlich $\bar{d}(f'|K^n) \in H^n_*$ nach Satz 1 und folglich $\tilde{h}\big(\bar{d}(f'|K^n)\big) = 0$ nach Satz 3. Ist also $\tilde{h}\big(\bar{d}(f'|K^n)\big) \neq 0$, so ist f sicher nicht nullhomotop. Anwendungen dieses Kriteriums enthält § 5.

2. Sei $K = K^n$ ein n-dimensionales Polyeder und $\pi_i(Y) = \pi_{i-1}(\Omega) = 0$ für alle $i < n$ $(n > 1)$. Dann ist $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ und folglich auch $\tilde{h}$ in Satz 3 ein Isomorphismus auf, H^n_* verschwindet also. Ferner ist jede Abbildung $K^{n-1} \to Y$ nullhomotop, und daher besitzt jede Homotopieklasse von Abbildungen $K \to Y$ einen $(n-1)$-konstanten Repräsentanten. Satz 2 liefert nun die HOPF-WHITNEYsche Klassifikation der Abbildungen von K in Y (vgl. [17]):

Die Homotopieklassen der Abbildungen eines n-dimensionalen Polyeders K in einen bogenweise zusammenhängenden Raum Y, dessen Homotopiegruppen von der ersten bis zur $(n-1)$-ten einschließlich verschwinden, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^n(K, \pi_n(Y))$.

Ist Y die 2-Sphäre S^2, so ist auch $h: \pi_2(\Omega) \to H_2(\Omega)$, wie sich in § 5 herausstellen wird (Satz 6), ein Isomorphismus auf, folglich verschwindet H^3_*, und aus Satz 2 folgt:

Die Homotopieklassen der Abbildungen eines dreidimensionalen Polyeders $K = K^3$ in S^2, die 2-konstante Repräsentanten besitzen, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^3\big(K, \pi_3(S^2)\big) \cong H^3(K)$.

Das ist ein Teil des Ergebnisses von PONTRJAGIN [10].

3. Ist Y 1-einfach, d.h. $\pi_1(Y)$ abelsch, so können wir auch für $n = 1$ einer $(n-1)$-konstanten Abbildung $f: K \to Y$ in analoger Weise, wie es oben für größere n geschah, einen Kozykel $d(f|K^n)$ zuordnen; es ist wieder $d(f|K^n)(\sigma)$ dasjenige Element von $\pi_n(Y, y_0)$, das durch $f|\sigma$ repräsentiert wird. Bekanntlich (vgl. z.B. [3] S. 240 Homotopy Theorem I) verschwindet die Kohomologieklasse $\bar{d}(f|K^1)$ genau dann, wenn $f|K^1$ nullhomotop ist. Definieren wir $H^1_* = 0$, so gilt also Satz 2 auch für den zunächst ausgeschlossenen Fall $n = 1$.

4. Sei $\mathfrak{D}$ die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen $K \to Y$ und $\mathfrak{D}_r$ die Teilmenge bestehend aus den Homotopieklassen mit r-konstanten Repräsentanten. Von Y setzen wir Einfachheit in allen Dimensionen voraus.

Wegen des bogenweisen Zusammenhangs von Y ist $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$. Für alle $r > 0$ liefert Satz 2 zusammen mit der obigen Bemerkung 3. eine Abbildung

$$\bar{d}_r : \mathfrak{D}_{r-1} \to H^r/H^r_*,$$

bei der alle Elemente von $\mathfrak{D}_r$ und nur diese in 0 übergehen. Folglich gilt:

Läßt sich $\mathfrak{D}$ so mit einer Gruppenstruktur versehen, daß alle $\mathfrak{D}_r$ Untergruppen und die Abbildungen $\bar{d}_r$ Homomorphismen sind, so ist in der Reihe

$$\cdots < \mathfrak{D}_r < \mathfrak{D}_{r-1} < \cdots < \mathfrak{D}_1 < \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$$

$\mathfrak{D}_{r-1}/\mathfrak{D}_r$ mit dem Bild bei $\bar{d}_r$, also mit einer gewissen Untergruppe von H^r/H^r_* isomorph.

Die Voraussetzung dieses Klassifikationssatzes ist offenbar erfüllt, wenn Y eine topologische Gruppe ist; ferner, wenn Y eine m-Sphäre und K höchstens $(2m-2)$-dimensional ist, was man mit Hilfe der BORSUK-SPANIERschen Kohomotopiegruppen (vgl. [13]) zeigen kann. Diese beiden Fälle behandelte HU [7], ergänzt von CHEN [2]. Es sei hier noch bemerkt, daß die Voraussetzung auch erfüllt ist, wenn Y der Raum der geschlossenen nullhomotopen Wege mit festem Anfangspunkt in irgendeinem topologischen Raum ist. Als Gruppenoperation in $\mathfrak{D}$ nehme man die durch $(\varphi, \psi) \to \varphi \vee \psi$ induzierte.

§ 4. Pseudomannigfaltigkeit als Urbildraum.

In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß K eine n-dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit ist. Soll der Orientierbarkeitscharakter festgelegt sein, so schreiben wir K_+ oder K_-, je nachdem ob die Pseudomannigfaltigkeit orientierbar ist oder nicht. Für eine beliebige abelsche Gruppe G ist $H^n(K_+, G)$ mit G und $H^n(K_-, G)$ mit $G/2 \cdot G$ in natürlicher Weise isomorph — man ordne einem Element $g \in G$ denjenigen Kozykel zu, der auf einem festen Simplex σ_0 den Wert g hat und sonst verschwindet —, und der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt, wenn man K_+ und damit $\sigma_0 < K_+$ als in bestimmtem Sinn orientiert voraussetzt. Wir identifizieren auf diese Weise $H^n(K_+, G)$ mit G und $H^n(K_-, G)$ mit $G/2 \cdot G$. $h : \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ sei wieder der Hurewiczsche Homomorphismus und h_2 der induzierte Homomorphismus der mod 2 reduzierten Gruppen; dann gilt $\tilde{h} = h$ für orientierbares, $\tilde{h} = h_2$ für nichtorientierbares K, und Satz 3 besagt: Jedes Element $\alpha \in H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)) < \pi_{n-1}(\Omega)$ liegt im Kern N von h, jedes $\bar{\alpha} \in H^n_*(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)) < \pi_{n-1}(\Omega)/2 \cdot \pi_{n-1}(\Omega)$ im Kern N_2 von h_2. Es erhebt sich die Frage, inwieweit diese Aussagen umkehrbar sind. Dazu beweisen wir folgendes Ergebnis, das nachher noch eine Verschärfung erfahren wird:

Satz 4. a) *Für jedes K_+ liegt $H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$ im Kern N von h, und für jedes $\alpha \in N$ gibt es eine orientierbare n-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit K_+ mit $\alpha \in H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$, d.h. es ist*

$$\bigcup_{K_+} H^n_*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)) = N.$$

b) *Das Analoge gilt für die nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeiten K_- in bezug auf den Kern N_2 von h_2, d.h.*

$$\bigcup_{K_-} H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right) = N_2.$$

Beweis. Jeweils der erste Teil der beiden Behauptungen a) und b) ist schon vorher als richtig nachgewiesen worden. Für die zweiten Teile wird ein Hilfssatz benötigt:

Hilfssatz 8. *Entsteht $\overline{X}$ dadurch aus dem endlichen Polyeder X mit der simplizialen Zerlegung L, daß gewisse Paare von Simplexen aus L durch nichtausgeartete affine Abbildungen identifiziert werden, dann geht die dritte Normalunterteilung L_3 von L bei der kanonischen Projektion $\pi: X \to \overline{X}$ in eine simpliziale Zerlegung $\overline{L}_3$ von $\overline{X}$ über.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest: Ist x mittlerer Punkt eines Simplexes σ_1 aus der ersten Normalunterteilung L_1 von L, so gibt es keinen zweiten Punkt $x' \in \bar{\sigma}_1$ mit $\pi(x) = \pi(x')$. Bedeutet nämlich σ das Simplex niedrigster Dimension aus L mit $\sigma_1 < \sigma$, so würde aus $\pi(x) = \pi(x')$ folgen: Es gibt eine nichtausgeartete affine Abbildung l von σ mit $x' = l(x)$. Eine solche Abbildung ist aber auf σ_1 entweder die Identität, oder sie ist keine Selbstabbildung, d.h. $l(x) = x$ oder $l(x) \notin \sigma_1$.

Daraus ergibt sich, daß π auf jedem Simplex σ_2 der zweiten Normalunterteilung L_2 topologisch ist, und zwar wie folgt: Sind x, x' zwei beliebige Punkte von σ_2 und sind σ_1, σ_1' die Simplexe kleinster Dimension aus L_1 mit $x \in \sigma_1$, $x' \in \sigma_1'$, so ist σ_1 mit σ_1' inzident; denn σ_2 enthält nur mittlere Punkte von den Simplexen aus L_1, deren Mittelpunkte die Ecken von σ_2 bilden, und diese sind alle paarweise inzident. Sei etwa σ_1' Seite von σ_1; dann ist x, $x' \in \sigma_1$ und x sogar mittlerer Punkt, folglich $\pi(x) \neq \pi(x')$. L_2 geht also bei π in eine Zerlegung von $\overline{X}$ in topologische Simplexe über. Für die dritte Normalunterteilung L_3 von L gilt darüber hinaus, daß der Durchschnitt zweier topologischer Simplexe $\pi(\sigma_3)$, $\pi(\sigma_3')$ entweder leer ist oder genau aus einer gemeinsamen Seite besteht. L_3 definiert demnach eine simpliziale Zerlegung $\overline{L}_3$ von $\overline{X}$.

Nachdem so der Hilfssatz bestätigt ist, wenden wir uns wieder dem Beweis von Satz 4 zu. Wird α durch $\psi_0: \partial\sigma_0 \to \Omega$ repräsentiert, so bedeutet $\alpha \in N$, daß der singuläre Zykel $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ in Ω nullhomolog ist; und daß die Klasse mod 2 $\bar{\alpha} \in N_2$ ist, besagt: $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ ist nullhomolog mod 2. Es gibt also eine singuläre n-Kette, die wir in der Form $-\sum_{i=1}^{r} (\psi_i, \sigma_i)$ mit $\psi_i: \sigma_i \to \Omega$ annehmen, so daß ihr Rand gleich $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ bzw. kongruent $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ mod 2 ist. Wir benutzen dabei geordnete singuläre Simplexe (vgl. [4]), d.h. die Ecken der euklidischen Urbilder sind geordnet und zwei singuläre Simplexe (χ, σ) und (χ', σ') sind genau dann gleich, wenn die ordnungserhaltende Affinität von σ auf σ' χ in χ' transformiert. Die σ_i (einschließlich σ_0) können als disjunkte euklidische Simplexe vorausgesetzt werden. Sei X der aus ihnen durch Vereinigung entstehende Raum und L seine natürliche simpliziale Zerlegung. $\psi: (X - \mathring{\sigma}_0) \to \Omega$ ($\mathring{\sigma}_0$ bezeichnet das Innere von σ_0) wird definiert durch $\psi|\sigma_i = \psi_i$, $\psi|\partial\sigma_0 = \psi_0$.

Ferner wählen wir ein n-Simplex σ_0' der dritten Normalunterteilung von σ_0 und setzen ψ noch auf $X - \mathring{\sigma}_0'$ fort. Dann ist auch $\psi|\partial\sigma_0'$ ein Repräsentant von α. Die singuläre Kette $\sum_{i=0}^{r} (\psi|\partial\sigma_i)$ ist gleich 0 bzw. kongruent 0 mod 2. In beiden Fällen läßt sich die Menge aller $(n-1)$-Simplexe von L so in disjunkte Paare (τ, τ') einteilen, daß $\psi|\tau$ und $\psi|\tau'$ als singuläre Simplexe gleich sind; d.h. die ordnungserhaltende affine Abbildung $l: \tau \to \tau'$ läßt ψ invariant: $\psi l = \psi$ auf τ. Im ersten Fall ($\alpha \in N$) kann man darüber hinaus erreichen, daß die Inzidenzzahlen von τ und τ' mit den zugehörigen n-Simplexen entgegengesetzt gleich sind. Wird für jedes Paar (τ, τ') τ mit τ' durch l identifiziert, so entsteht aus L nach Hilfssatz 8 ein rein n-dimensionaler simplizialer Komplex $\bar{L}_3$, in dem jedes $(n-1)$-Simplex mit genau zwei n-Simplexen inzident ist. Im Fall $\alpha \in N$ sind die n-Simplexe außerdem kohärent orientierbar. Nach Konstruktion induziert ψ eine eindeutige Abbildung $\bar{\psi}: (\bar{L}_3 - \mathring{\bar{\sigma}}_0') \to \Omega$. Die mit $\bar{\sigma}_0'$ verbindbaren n-Simplexe von $\bar{L}_3$ (zusammen mit ihren Seiten) bilden einen Teilkomplex K, der eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Für $\varphi = \bar{\psi}|K^{n-1}$ gilt

$$c(\varphi)(\sigma) = \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad \sigma = \bar{\sigma}_0' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ($\alpha \in N$) ist $K = K_+$ orientierbar, folglich $\alpha \in H_n^*(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$. Im zweiten Fall ($\bar{\alpha} \in N_2$) kann K orientierbar sein oder nicht. Ist es nichtorientierbar: $K = K_-$, so gilt $\bar{\alpha} \in H_n^*(K_-, \pi_{n-1}(\Omega))$; anderenfalls gelangen wir durch eine geringe Abänderung von K und φ zum Ziel: Wir wählen zwei von $\bar{\sigma}_0'$ verschiedene n-Simplexe σ, σ' von K mit der Eigenschaft, daß kein Simplex von K zugleich mit σ und mit σ' Punkte gemeinsam hat — nötigenfalls wird vorher eine Unterteilung der simplizialen Zerlegung von K vorgenommen — und deformieren $\bar{\psi}$ in $\bar{\psi}'$ so, daß $\bar{\psi}'(\sigma) = \bar{\psi}'(\sigma') = w_0$ ist. Entfernt man nun $\mathring{\sigma}$ und $\mathring{\sigma}'$ aus K und identifiziert $\partial\sigma$ mit $\partial\sigma'$ vermöge einer topologischen und simplizialen Abbildung $\partial\sigma \to \partial\sigma'$, die die durch $K - (\mathring{\sigma} \cup \mathring{\sigma}')$ induzierte Orientierung erhält, so entsteht eine nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit K_-'. $\bar{\psi}'$ induziert eine Abbildung von $K_-' - \mathring{\bar{\sigma}}_0'$ in Ω, und wenn φ' die Einschränkung auf $K_-'^{n-1}$ bezeichnet, so gilt für $c(\varphi')$ Entsprechendes wie oben für $c(\varphi)$, also $\bar{\alpha} \in H_n^*(K_-', \pi_{n-1}(\Omega))$. Damit ist der Beweis vollständig.

Um Satz 4 noch zu verschärfen, definieren wir eine „Addition" von Pseudomannigfaltigkeiten: Sind zwei n-dimensionale Pseudomannigfaltigkeiten K_1, K_2 gegeben, die, falls sie orientierbar sind, eine bestimmte Orientierung tragen, so entfernen wir aus K_i ($i = 1, 2$) das Innere $\mathring{\sigma}_i$ eines n-Simplexes und identifizieren $\partial\sigma_1$ topologisch, simplizial und für orientiertes K_1 und K_2 unter Umkehrung der induzierten Orientierung mit $\partial\sigma_2$. Es entsteht eine Pseudomannigfaltigkeit, die mit $K_1 + K_2$ bezeichnet wird. Setzt man voraus, daß σ_i in K_i eine Vollkugelumgebung besitzt, so ist $K_1 + K_2$ bis auf Homöomorphie durch K_1 und K_2 eindeutig bestimmt. Für unsere Zwecke kommt es jedoch

darauf nicht an; es genügt, wenn wir unter K_1+K_2 irgendeine der Pseudomannigfaltigkeiten verstehen, die man in der beschriebenen Weise erhalten kann. Ist K_1 und K_2 orientierbar und folglich nach unserer Vereinbarung orientiert, so wird K_1+K_2 orientiert, indem man die Orientierung der einzelnen n-Simplexe beibehält; anderenfalls ist K_1+K_2 nichtorientierbar.

Hilfssatz 9. *Sind die n-dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten K_1 und K_2 entweder beide orientiert oder beide nichtorientierbar, so ist*

$$H_*^n\left(K_1+K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right) > H_*^n\left(K_1, \pi_{n-1}(\Omega)\right) + H_*^n\left(K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right).$$

[Man beachte $H^n(K_+, G)=G$ und $H^n(K_-, G)=G/2\cdot G$.]

Beweis. Sei $\bar{c}_i$ ein beliebiges Element von $H_*^n\left(K_i, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$, c_i ein Kozykel, der $\bar{c}_i$ repräsentiert, mit $c_i(\sigma_i)=0$, wobei σ_i das bei der Konstruktion von K_1+K_2 aus K_i entfernte Simplex ist. Es ist $c_i \in C_*^n\left(K_i, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$, und nach Hilfssatz 6 gibt es eine Abbildung $\varphi_i: K_i^{n-1} \to \Omega$ mit $c(\varphi_i)=c_i$. $\varphi_i|\partial\sigma_i$ ist nullhomotop, man kann also annehmen, daß $\varphi_i(\partial\sigma_i)=w_0$ ist, denn erfüllt φ_i diese Bedingung zunächst nicht, so kann man durch Deformation eine Abbildung der gewünschten Art erhalten. Wird $\psi: (K_1+K_2)^{n-1} \to \Omega$ durch $\psi|K_i^{n-1}=\varphi_i$ definiert, so repräsentiert $c(\psi)$ das Element $\bar{c}_1+\bar{c}_2$ von $H^n\left(K_1+K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right)=\pi_{n-1}(\Omega)$, folglich ist $\bar{c}_1+\bar{c}_2 \in H_*^n\left(K_1+K_2, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$.

Sei E eine endlich erzeugte Untergruppe des Kerns N von $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ein Erzeugendensystem von E. Nach Satz 4 gibt es zu jedem α_j eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K_j mit $\alpha_j \in H_*^n\left(K_j, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$. Setzt man $K=K_1+K_2+\cdots+K_k$, so enthält $H_*^n\left(K, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$ nach Hilfssatz 9 die von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ erzeugte Gruppe, also E. Analog schließt man für die nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeiten, und es ergibt sich:

Ergänzung zu Satz 4. *Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe E von N [bzw. E_2 von N_2] gibt es eine n-dimensionale orientierbare [nichtorientierbare] Pseudomannigfaltigkeit K_+ [bzw. K_-], so daß $E < H_*^n\left(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$ [$E_2 < H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$] ist. Wenn insbesondere $\pi_{n-1}(\Omega)$ endlich erzeugt ist, so gibt es ein K_+ und ein K_- mit $N=H_*^n\left(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$ und $N_2=H_*^n\left(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)\right)$.*

Satz 4 und die vorstehende Ergänzung gehen mittels Satz 1 in Aussagen über die Nullhomotopie von Abbildungen $f: K \to Y$ mit $f(K^{n-1})=y_0$ über. Darunter fallen insbesondere die Abbildungen f_α, für die $f_\alpha(K-\sigma_0)=y_0$[10]) ist (σ_0 ist ein n-Simplex einer Zerlegung von K) und $f_\alpha|\sigma_0$ das Element $\alpha \in \pi_n(Y)$ repräsentiert. Da für orientierbares K $\bar{d}(f_\alpha)=\alpha$ und für nichtorientierbares $\bar{d}(f_\alpha)=\bar{\alpha} \in \pi_n(Y)/2\cdot\pi_n(Y)$ ist, gilt:

Satz 5. a) *Für jedes orientierbare $K=K_+$ ist f_α höchstens dann nullhomotop, wenn $h(\alpha)=0$ ist. Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe $E < \pi_n(Y)$ mit $h(E)=0$ gibt es ein K_+, so daß f_α für jedes $\alpha \in E$ nullhomotop ist.*

[10]) Die Forderungen $f(K^{n-1})=y_0$ und $f(K-\sigma_0)=y_0$ sind übrigens im wesentlichen äquivalent, denn jede $(n-1)$-konstante Abbildung ist einer Abbildung, die höchstens auf σ_0 nicht konstant ist, homotop. Die zweite Forderung hat den Vorteil der größeren Anschaulichkeit.

b) *Für jedes nichtorientierbare $K = K_-$ ist f_α höchstens dann nullhomotop, wenn $h(\alpha)$ in $H_{n-1}(\Omega)$ durch 2 teilbar ist. Ist α in $\pi_n(Y)$ durch 2 teilbar, so ist $f_\alpha \simeq 0$. Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe $E \subset \pi_n(Y)$ mit $h(E) \subset 2 \cdot H_{n-1}(\Omega)$ gibt es ein K_-, so daß f_α für jedes $\alpha \in E$ nullhomotop ist.*

Ist insbesondere $\pi_n(Y)$ endlich erzeugt, so gibt es ein festes (nur von Y und n abhängendes) K_+ mit $f_\alpha \simeq 0$ für alle α mit verschwindendem $h(\alpha)$ und ein K_- mit $f_\alpha \simeq 0$ für alle α mit durch 2 teilbarem $h(\alpha)$.

§ 5. Die Sphäre als Bildraum.

Wir nehmen jetzt $Y = S^m$ an ($m \geq 2$). In diesem Fall ist der Hurewiczsche Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ unter Benutzung der Ergebnisse von SERRE [*11*], [*12*] leicht zu bestimmen:

Nach [*11*] S. 487 hat der Wegeraum Ω von S^m die singulären Homologiegruppen

$$H_i(\Omega) \cong \begin{cases} Z & \text{für} \quad i \equiv 0 \bmod (m-1) \\ 0 & \text{für} \quad i \not\equiv 0 \bmod (m-1), \end{cases}$$

wobei Z die Gruppe der ganzen Zahlen bedeutet. Andererseits ist in derselben Arbeit [*11*] S. 498 Prop. 5 gezeigt: Für $n > m$ ist $\pi_n(S^m)$ endlich, außer wenn m gerade und $n = 2m-1$ ist; in diesem Fall ist $\pi_n(S^m)$ direkte Summe von Z und einer endlichen Gruppe E_m. Bereits daraus folgt $h = 0$ außer für $n = m$ oder $m =$ gerade, $n = 2m-1$. Für $n = m$ ist h bekanntlich ein Isomorphismus auf (Isomorphiesatz von HUREWICZ). Einem Element $\alpha \in \pi_{2m-1}(S^m)$ ist nach [*5*], [*6*] die Hopfsche Invariante $\gamma(\alpha) \in Z$ zugeordnet. Die Abbildung $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \to Z$ ist linear. Identifiziert man $\pi_{2m-1}(S^m)$ nach Hilfssatz 5 mit $\pi_{2m-2}(\Omega)$ und $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z, so sind h und γ Homomorphismen zwischen denselben Gruppen.

Hilfssatz 10. *Bei geeigneter Identifikation von $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z ($m =$ gerade) stimmen die beiden Homomorphismen*

$$h, \gamma: \pi_{2m-1}(S^m) = \pi_{2m-2}(\Omega) \to H_{2m-2}(\Omega) = Z$$

überein.

Dieser Hilfssatz wird von SERRE in [*12*] Chap. IV als Lemme 2 (S. 280 und 286f.) bewiesen. Wir geben im Anhang einen anderen Beweis. Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 6. *Der Hurewiczsche Homomorphismus für den Wegeraum der m-Sphäre $h: \pi_n(S^m) = \pi_{n-1}(\Omega) \to H_{n-1}(\Omega)$ ist für $n = m$ ein Isomorphismus auf, für $m =$ gerade und $n = 2m-1$ stimmt er bei geeigneter Identifikation $H_{2m-2}(\Omega) = Z$ mit der Hopfschen Abbildung $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \to Z$ überein, und in allen anderen Fällen ist er die Nullabbildung.*

Dieses Ergebnis erlaubt es, aus den allgemeinen Sätzen der früheren Paragraphen explizite Resultate für den Fall $Y = S^m$ herzuleiten. Zum Beispiel besagt Satz 5:

Satz 7. *Sei K eine n-dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit, σ_0 ein n-Simplex einer Zerlegung von K und $f_\alpha: K \to S^m$ die bis auf Homotopie*

bestimmte Abbildung, die auf $K-\sigma_0$ konstant ist und deren Einschränkung auf σ_0 das Element $\alpha \in \pi_n(S^m)$ repräsentiert. Dann gilt:

a) *Ist $n=m$ und $\alpha \neq 0$ oder $n=2m-1$, m gerade und $\gamma(\alpha) \neq 0$, so ist f_α für alle orientierbaren K wesentlich. Für jedes Paar (n, m) mit $n \neq m$ gibt es ein orientierbares K, so daß $f_\alpha \simeq 0$ ist für jedes $\alpha \in \pi_n(S^m)$ mit $\gamma(\alpha)=0$, falls $n=2m-1$ und m gerade ist, und anderenfalls für alle α.*

b) *Ist $n=m$ und α nicht durch 2 teilbar oder $n=2m-1$, m gerade und $\gamma(\alpha)$ ungerade, so ist f_α für alle nichtorientierbaren K wesentlich. Ist α durch 2 teilbar, so ist f_α immer unwesentlich. Für jedes Paar (n, m) mit $n \neq m$ gibt es ein nichtorientierbares K, so daß $f_\alpha \simeq 0$ ist für jedes α mit geradem $\gamma(\alpha)$, falls $n=2m-1$ und m gerade ist, und anderenfalls für alle α.*

HOPF hat in [6] gezeigt, daß es für jedes gerade m ein Element $\alpha \in \pi_{2m-1}(S^m)$ mit $\gamma(\alpha)=2$ gibt. Wegen $\pi_{2m-1}(S^m) \cong Z+E_m$ folgt daraus, daß $\gamma(\alpha)$ für jedes α mit unendlicher Ordnung (und offenbar nur für diese) von 0 verschieden ist. In Satz 7a) ist demnach enthalten: f_α ist genau dann für jedes orientierbare K wesentlich, wenn α in $\pi_n(S^m)$ unendliche Ordnung besitzt. Bemerkenswert ist, daß wir damit unabhängig von der algebraischen Struktur eine topologische Charakterisierung der Elemente unendlicher Ordnung von $\pi_n(S^m)$ gewonnen haben.

Für den Teil b) von Satz 7 wäre es interessant zu wissen, für welche m ungerade Hopfsche Invarianten vorkommen. Das ist der Fall für $m=2, 4, 8$, wie schon HOPF in [6] zeigte. G. W. WHITEHEAD [15] bewies, daß es nicht richtig ist für $m \equiv 2 \bmod 4$ und $m \neq 2$, und nach einem Ergebnis von ADEM [1] ist sogar $m=2^k$ für die Existenz von ungeraden Hopfschen Invarianten notwendig.

Bereits aus Satz 7a) und der nachfolgenden Bemerkung kann man entnehmen, daß für gerades m nicht nur jede $(2m-1)$-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit (HOPF [5], [6]) sondern auch jede orientierbare Pseudomannigfaltigkeit dieser Dimension wesentliche Abbildungen auf die m-Sphäre gestattet. Wir wollen nun die Voraussetzungen noch weiter abschwächen und zeigen:

Satz 8. *Ist m gerade, $n=2m-1$ und enthält die ganzzahlige Kohomologiegruppe $H^n(K)$ des höchstens $(n+1)$-dimensionalen Polyeders K Elemente größerer Ordnung als 2, so gibt es wesentliche Abbildungen $f: K \to S^m$. Für diejenigen Dimensionen m, in denen ungerade Hopfsche Invarianten vorkommen (z. B. 2, 4, 8) genügt es sogar, daß $H^n(K) \neq 0$ ist*[11]*. Ist die Bettische Zahl der Dimension n von K von 0 verschieden, so gibt es unendlich viele Homotopieklassen von Abbildungen $K \to S^m$.*

[11]) Mir ist nicht bekannt, ob die Behauptung allgemein richtig bleibt, wenn man nur $H^n(K) \neq 0$ voraussetzt. Jedenfalls braucht es dann aber keine $(n-1)$-konstanten wesentlichen Abbildungen zu geben, um die es sich bei unserem Beweis von Satz 8 immer handelt. Für diejenigen Dimensionen m, in denen keine ungeraden Hopfschen Invarianten vorkommen (z. B. $m=6$ nach [15]), gibt es nämlich $(2m-1)$-dimensionale nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeiten, die keine $(2m-2)$-konstanten wesentlichen Abbildungen auf S^m gestatten [s. Satz 7b) und Fußnote [10])].

Beweis. Wir gehen aus von $\pi_n(S^m) = Z + E_m$ und zerlegen $H^n(K, \pi_n(S^m))$ entsprechend in $H^n(K) + H^n(K, E_m)$. Nach Satz 6 und dem, was wir über die Hopfsche Invariante wissen, bildet h die Untergruppe $Z \subset \pi_n(S^m)$ isomorph ab, und zwar auf $H_{n-1}(\Omega)$, wenn es Elemente mit ungerader Hopfscher Invariante gibt, d. h. wenn $\gamma(1) = \pm 1$ ist, und andernfalls auf die Untergruppe vom Index 2. Folglich ist $\tilde{h} \mid H^n(K)$ (zur Definition vgl. Satz 3) im ersten Fall ein Isomorphismus und im zweiten bildet es genau die Elemente der Ordnung 2 in 0 ab. Nach Satz 3 enthält also $H^n_*(K, \pi_n(S^m)) \cap H^n(K)$ höchstens Elemente der Ordnung 2 und im Falle $\gamma(1) = \pm 1$ sogar nur die 0. Aus Satz 2 folgt nun die Behauptung.

Wir zeigen zum Schluß, daß die Voraussetzung: m gerade und $n = 2m - 1$, in Satz 8 tatsächlich in der Natur der Sache liegt, indem wir folgendes beweisen:

Satz 9. *Ist die Freudenthalsche Einhängung eine Abbildung von $\pi_{n-1}(S^{m-1})$ auf $\pi_n(S^m)$ und ist $n > m$, so gibt es eine n-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf die m-Sphäre abbilden läßt.*

Da nach den bekannten Freudenthalschen Sätzen (vgl. z. B. [*16*]) die Voraussetzung dieses Satzes für $n < 2m - 1$ und bei ungeradem m auch für $n = 2m - 1$ erfüllt ist, ergibt sich, daß in allen diesen Dimensionen ein Analogon zu Satz 8 nicht richtig sein kann.

Beweis von Satz 9. In den betrachteten Fällen hat $\pi_n(S^m)$ endliche Ordnung, etwa die Ordnung s. Wir entfernen aus einer n-Sphäre s disjunkte n-dimensionale Vollkugeln V_i^n, so daß ein Raum X mit s $(n-1)$-Sphären $S_1^{n-1}, \ldots, S_s^{n-1}$ als Rändern entsteht. Ferner betrachten wir zu jedem Element von $\pi_n(S^m)$ ein Urbild bei der Einhängung $\alpha_i \in \pi_{n-1}(S^{m-1})$, dazu eine repräsentierende Abbildung f_i von S_i^{n-1} auf S^{m-1} und identifizieren in S_i^{n-1} alle Punkte, die bei f_i denselben Bildpunkt haben. Man bestätigt leicht, daß der entstehende Raum P ein Polyeder ist, wenn man die Vollkugeln V_i^n in geeigneter Weise als Teilkomplexe einer simplizialen Zerlegung der ursprünglichen n-Sphäre und die Abbildungen f_i simplizial wählt. Da die $(n-1)$-dimensionalen Ränder von X in $(m-1)$-Sphären $S_1^{m-1}, \ldots, S_s^{m-1}$, also in Polyeder niedrigerer Dimension übergehen, ist P eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit. X_i entstehe aus X und P_i aus P dadurch, daß alle Punkte von $S_j^{n-1} \subset X$ bzw. $S_j^{m-1} \subset P$ für jedes $j \neq i$ miteinander identifiziert werden. X_i ist eine n-dimensionale Vollkugel mit dem Rand S_i^{n-1}, und die durch f_i gegebene Identifikation $S_i^{n-1} \to S_i^{m-1}$ läßt X_i in P_i übergehen. Nimmt man diese Identifikation nicht nur auf dem Rand S_i^{n-1} vor, sondern setzt man sie „radienweise" ins Innere von X_i fort, so erhält man eine m-dimensionale Vollkugel $\overline{X}_i$. Wird in P jedes S_j^{n-1} zu einem Punkt identifiziert, so entsteht wieder eine n-Sphäre S^n. Insgesamt ergibt sich folgendes Diagramm von kanonischen Projektionen

$$X \swarrow \begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix} \begin{matrix} P \\ X_i \end{matrix} \searrow P_i \swarrow \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} S^n \\ \overline{X}_i. \end{matrix}$$

Da jede Abbildung $S_i^{m-1} \to S^m$ nullhomotop ist, läßt sich jede Abbildung $f: P \to S^m$ so deformieren, daß das Ergebnis der Deformation in der Form $\tilde{f}\,\pi$ darstellbar ist, wobei π die Projektion $P \to S^n$ und $\tilde{f}$ eine Abbildung von S^n in S^m ist. Es ist also nur noch zu zeigen: Für ein vollständiges Repräsentantensystem $\tilde{f}_i: S^n \to S^m$ der Elemente von $\pi_n(S^m)$ ist $\tilde{f}_i \pi$ nullhomotop. Hat $g_i: \overline{X}_i \to S^m$ mit $g_i(S_i^{m-1}) = y_0 \in S^m$ den Grad 1, und ist $\pi_i: P \to \overline{X}_i$ die kanonische Projektion, so ist $g_i \pi_i = \tilde{f}_i \pi$ mit einer Abbildung $\tilde{f}_i: S^n \to S^m$, die die Freudenthalsche Einhängung von α_i repräsentiert. Da g_i trivialerweise nullhomotop ist, folgt $\tilde{f}_i \pi \simeq 0$, und nach Wahl der α_i erschöpfen die Klassen der $\tilde{f}_i$ ganz $\pi_n(S^m)$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Die in diesem Beweis durchgeführten Konstruktionen sind auch im Zusammenhang mit Satz 7 von Interesse. Während dort nur die Existenz von Pseudomannigfaltigkeiten mit $f_\alpha \simeq 0$ (unter den dort genannten Bedingungen) gezeigt wurde, sind hier für gewisse Dimensionen Pseudomannigfaltigkeiten P direkt angegeben, für die jede Abbildung $f: P \to S^m$, also auch f_α nullhomotop ist.

Anhang.

Beweis von Hilfssatz 10[12]). Die Bestimmung von $h: \pi_{2m-2}(\Omega) \to H_{2m-2}(\Omega)$ und seines Zusammenhangs mit $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \to Z$ geschieht dadurch, daß wir h durch übersehbare Zwischenglieder mit dem entsprechenden Homomorphismus für einen einfacheren Raum, als es Ω ist, in Beziehung bringen. Wir führen dazu den Raum V der tangentialen Vektoren an S^m ein. V hat eine natürliche Faserraumstruktur über S^m; die Projektion heiße $\mathfrak{p}$, und die Faser über $y_0 \in S^m$ sei F. v_0 sei ein fester Punkt aus F, W der Raum aller in v_0 beginnenden Wege von V, $q: W \to V$ die Abbildung, die jedem Weg seinem Endpunkt zuordnet und $\overline{\Omega}$ der Teilraum $q^{-1}(F)$ von W. $\mathfrak{p}$ induziert eine Abbildung $\mathfrak{p}: \overline{\Omega} \to \Omega$. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$(1) \quad \begin{cases} \pi_{2m-2}(\Omega) \xleftarrow{\mathfrak{p}_*} \pi_{2m-2}(\overline{\Omega}) \xleftarrow{\partial_*} \pi_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \xrightarrow{q_*} \pi_{2m-1}(V, F) \\ \quad\quad \downarrow h \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow h' \\ H_{2m-2}(\Omega) \xleftarrow{\mathfrak{p}^*} H_{2m-2}(\overline{\Omega}) \xleftarrow{\partial^*} H_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \xrightarrow{q^*} H_{2m-1}(V, F). \end{cases}$$

Da W auf einen Punkt, nämlich den konstanten Weg v_0, zusammenziehbar ist, sind ∂_* und ∂^* wegen der Exaktheit der relativen Homotopie- und Homologiefolge Isomorphismen auf. Auch q_* ist ein Isomorphismus auf, denn wie Serre ([11] S. 479 Prop. 4) zeigt, gilt für $q: W \to V$ ebenso wie für eine Faserraumprojektion der „zweite Homotopiesatz" (Steenrod [14] S. 54), und nur der wird gebraucht, um das entsprechende Ergebnis bei Faserräumen zu beweisen (vgl. [14] S. 90). Schließlich sind auch $\mathfrak{p}_*$ und $\mathfrak{p}^*$ Isomorphismen auf, was man z. B. folgendermaßen einsehen kann.

[12]) Dieser ursprüngliche Beweis des Verfassers ist länger, beruht aber auf elementareren Hilfsmitteln als der in § 5 zitierte von Serre [12], der mir erst nachträglich bekannt wurde.

Seien $C \subset \Omega$ und $\overline{C} \subset \overline{\Omega}$ irgend zwei kompakte Teilräume mit $\mathfrak{p}(\overline{C}) \subset C$. Der Injektion $i: C \to \Omega$ entspricht die durch $(w, t) \to w(t)$ definierte Abbildung $C \times I \to S^m$. Sie kann als eine Deformation der konstanten Abbildung $C \to y_0$ aufgefaßt werden. Nach dem „zweiten Homotopiesatz" für Faserräume ([14] S. 54) gibt es eine „darüberliegende" Deformation der Abbildung $C \to v_0$, d.h. eine Abbildung $r: C \to \overline{\Omega}$ mit $\mathfrak{p} \circ r = i$. Außerdem ist $r \circ (\mathfrak{p} | \overline{C})$ der Injektion $\bar{i}: \overline{C} \to \overline{\Omega}$ homotop. Ist nämlich $T: \overline{C} \times I^2 \to S^m$ durch $T(\overline{w}, t, t') = (\mathfrak{p}\,\overline{w})(t)$ definiert, so gibt es ein $\overline{T}: \overline{C} \times I^2 \to V$ mit

$$\overline{T}(\overline{w}, 0, t') = v_0$$
$$\overline{T}(\overline{w}, t, 0) = \big(r\,\mathfrak{p}(\overline{w})\big)(t)$$
$$\overline{T}(\overline{w}, t, 1) = \overline{w}(t)$$
$$\mathfrak{p} \circ \overline{T} = T,$$

denn das Paar $\big(\overline{C} \times I^2, \overline{C} \times (I \times \partial I \cup 0 \times I)\big)$ ist mit $(\overline{C} \times I^2, \overline{C} \times 0 \times I)$ topologisch äquivalent und der „zweite Homotopiesatz" wieder anwendbar. Das Diagramm der Homologiegruppen

$$\begin{cases} H_n(\overline{C}) \xrightarrow{\bar{i}^*} H_n(\overline{\Omega}) \\ {\scriptstyle (\mathfrak{p}|\overline{C})^*}\downarrow \quad \nearrow {\scriptstyle r^*} \quad \downarrow {\scriptstyle \mathfrak{p}^*} \\ H_n(C) \xrightarrow{i^*} H_n(\Omega) \end{cases}$$

ist infolgedessen kommutativ. $\mathfrak{p}^*$ ist eine Abbildung auf, denn zu jedem $a \in H_n(\Omega)$ gibt es ein $C \subset \Omega$ und ein $a' \in H_n(C)$ mit $i^*(a') = a$, woraus $a = \mathfrak{p}^* r^*(a')$ folgt. Ferner ist $\mathfrak{p}^*$ ein Isomorphismus, denn wäre $\bar{a} \neq 0$ und $\mathfrak{p}^*(\bar{a}) = 0$, so gäbe es ein $\overline{C} \subset \overline{\Omega}$ und ein $\bar{a}' \in H_n(\overline{C})$ mit $\bar{i}^*(\bar{a}') = \bar{a}$, sowie ein $C \subset \Omega$ mit $\mathfrak{p}(\overline{C}) \subset C$ und $(\mathfrak{p}|\overline{C})^*(\bar{a}') = 0$, woraus sich der Widerspruch $r^*(\mathfrak{p}|\overline{C})^*(\bar{a}') = \bar{a} = 0$ ergäbe. Der gleiche Schluß gilt für die Homotopiegruppen.

Um q^* in (1) zu untersuchen, wählen wir eine Folge von niederdimensionalen „Großsphären" in S^m:

$$y_0 \in S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^{m-1} \subset S^m.$$

U^r und O^r seien die beiden abgeschlossenen Halbsphären, in die S^r durch S^{r-1} zerlegt wird. Ist M irgendeine Teilmenge von S^m, so schreiben wir für $p^{-1}(M)$ auch V_M und für $q^{-1}p^{-1}(M)$ auch W_M; z.B. ist $F = V_{y_0}$, $\overline{\Omega} = W_{y_0}$. Das Diagramm

$$(3)\quad \begin{cases} H_{m+r-1}(W_{S^r}, W_{y_0}) \xrightarrow{i^*} H_{m+r-1}(W_{S^r}, W_{O^r}) \xleftarrow{j^*} H_{m+r-1}(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}) \xrightarrow{\partial^*} H_{m+r-2}(W_{S^{r-1}}, W_{y_0}) \\ \quad\downarrow{\scriptstyle q^*} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle q^*} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle q^*} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle q^*} \\ H_{m+r-1}(V_{S^r}, V_{y_0}) \xrightarrow{i^*} H_{m+r-1}(V_{S^r}, V_{O^r}) \xleftarrow{j^*} H_{m+r-1}(V_{U^r}, V_{S^{r-1}}) \xrightarrow{\partial^*} H_{m+r-2}(V_{S^{r-1}}, V_{y_0}), \end{cases}$$

in dem i^*, j^* durch die Injektionen und ∂^* durch den Randoperator induziert sind, ist bekanntlich kommutativ.

Ist $y_0 \in N \subset M \subset S^m$ und gibt es eine Deformation der Identität von S^m, die y_0 festläßt und zum Schluß M in N abbildet, so gibt es nach dem „ersten Homotopiesatz" für Faserräume (vgl. [14] S. 50) eine Deformation f_t von V mit $f_t(v_0) = v_0$ für alle t und $f_1(V_M) \subset V_N$. Die durch $\varphi_t(w)(t') = f_t(w(t'))$, $w \in W$, $t' \in I$ definierte Deformation φ_t von W zieht dann W_M in W_N zusammen. Wird irgendein Teilraum $L \subset S^m$ bei der Ausgangsdeformation immer in sich abgebildet, so gilt auch $f_t(V_L) \subset V_L$ und $\varphi_t(W_L) \subset W_L$ für alle t. Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir zeigen, daß die Abbildungen i^*, j^*, ∂^* in (3) in beiden Zeilen Isomorphismen auf sind. Wir beschränken uns auf die obere Zeile; für die untere schließt man analog:

1. Da es eine Deformation von S^m gibt, die O^r in sich unter Festhaltung von y_0 auf y_0 zusammenzieht, ist auch W_{O^r} in sich auf W_{y_0} zusammenziehbar, folglich $H_n(W_{O^r}, W_{y_0}) = 0$ für alle n, und wegen der Exaktheit der Homologiefolge von $(W_{S^r}, W_{O^r}, W_{y_0})$ ist i^* ein Isomorphismus auf.

2. Ist U''^r eine Umgebung von U^r in S^r, so ist $W_{U''^r}$ Umgebung von W_{U^r} in W_{S^r}, und wegen einer bekannten Eigenschaft der Homologiegruppen („excision property") induziert die Injektion $(W_{U''^r}, W_{U''^r \cap O^r}) \to (W_{S^r}, W_{O^r})$ einen Isomorphismus auf. U''^r kann man so wählen, daß es eine Deformation von S^m gibt, die y_0 festläßt, U''^r auf U^r zusammenzieht und U^r sowie $U''^r \cap O^r$ als Ganzes invariant läßt. Eine „darüberliegende" Deformation der oben angegebenen Art zeigt: Die Injektion $(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}) \to (W_{U''^r}, W_{U''^r \cap O^r})$ induziert einen Isomorphismus auf. Folglich ist auch die zusammengesetzte Abbildung j^* ein Isomorphismus auf.

3. Wie unter 1. zeigt man $H_n(W_{U^r}, W_{y_0}) = 0$ und folgert aus der exakten Homologiefolge von $(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}, W_{y_0})$, daß ∂^* ein Isomorphismus auf ist.

Wendet man das Diagramm (3) der Reihe nach für $r = m, m-1, \ldots, 1$ an, so ergibt sich

$$(4) \qquad \begin{cases} H_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \cong H_{m-1}(W_{S^0}, W_{y_0}) \cong H_{m-1}(W_{y_1}) \\ \quad \downarrow q^* \qquad\qquad \downarrow q^* \qquad\qquad \downarrow q^* \\ H_{2m-1}(V, F) \cong H_{m-1}(V_{S^0}, V_{y_0}) \cong H_{m-1}(V_{y_1}), \end{cases}$$

wobei y_1 den zweiten Punkt (neben y_0) von S^0 bezeichnet. Der letzte dieser Homomorphismen q^* ist nun leicht zu übersehen. Aus der Bedeutung von W_{y_1} und q entnimmt man: Jeder sphärische Zykel in V_{y_1}, der in V nullhomotop ist, repräsentiert ein Bildelement bei der Abbildung q^*; und jedes Bild bei q^* ist in V nullhomolog. Da V_{y_1} als Faser von V eine $(m-1)$-Sphäre ist und auch für V alle Homotopiegruppen $\pi_i(V)$ mit $i < m-1$ verschwinden, ist in der Dimension $m-1$ jede Homologieklasse von V_{y_1} sphärisch, und Nullhomotopie und Nullhomologie in V ist gleichbedeutend. Folglich stimmt $q^*(H_{m-1}(W_{y_1}))$ mit dem Kern von $H_{m-1}(V_{y_1}) \to H_{m-1}(V)$ überein, und dieser ist bekanntlich $2 \cdot H_{m-1}(V_{y_1})$. Indem wir die vorgenommenen isomorphen Abbildungen zurückverfolgen, erhalten wir:

$$q^* : H_{2m-1}(W, \overline{\Omega}) \to H_{2m-1}(V, F)$$

hat die Untergruppe vom Index 2 als Bild. (Beide Gruppen sind mit Z isomorph.)

Damit ist in Diagramm (1) h auf h' zurückgeführt, denn alle „horizontalen" Homomorphismen sind nun bekannt. h' läßt sich leicht mit der Hopfschen Invariante in Beziehung setzen:

Wir wählen eine Abbildung $f_0: S^{2m-1} \to V$, so daß $p \circ f_0$ die Hopfsche Invariante $\gamma_0 \neq 0$ besitzt. Das ist möglich, denn in der exakten Homotopiefolge von V

$$\cdots \to \pi_{2m-1}(V) \to \pi_{2m-1}(S^m) \to \pi_{2m-2}(S^{m-1}) \to \cdots$$

ist $\pi_{2m-2}(S^{m-1})$ endlich, daher treten in $\pi_{2m-1}(S^m)$ gewisse Elemente mit beliebig hoher Hopfscher Invariante — es gibt solche nach [6] — als Bilder von Elementen aus $\pi_{2m-1}(V)$ auf. Man kann V und S^m so simplizial zerlegen, daß p simplizial wird, und indem man notfalls f_0 homotop abändert, voraussetzen, daß auch f_0 simplizial ist. Sei y_0 mittlerer Punkt eines m-Simplexes von S^m. Dann bestehen $p^{-1}(y_0)$ und $f_0^{-1} p^{-1}(y_0)$ aus affinen $(m-1)$-Simplexen, die in gewissen $(2m-1)$-Simplexen von V bzw. S^{2m-1} liegen, und lassen sich bei geeigneter Festsetzung der Orientierung als (singuläre) $(m-1)$-Zykel auffassen (vgl. [5], [6]). Wird in $f_0^{-1} p^{-1}(y_0)$ eine m-Kette c^m von S^{2m-1} eingespannt, so ist $p f_0(c^m)$ ein Zykel in S^m, und seine Homologieklasse ist nach Definition von γ das γ_0-fache eines erzeugenden Elements von $H_m(S^m)$. Ist a der Grad von f_0, so ist $f_0(f_0^{-1} p^{-1}(y_0)) = a \cdot p^{-1}(y_0)$. Bekanntlich läßt sich in $2 \cdot p^{-1}(y_0)$ eine m-Kette v^m von V einspannen, so daß $p(v^m)$ $H_m(S^m)$ erzeugt. $f_0(2c^m) - a \cdot v^m$ ist dann ein m-Zykel in V; wegen $H_m(V) = 0$ ist er und sein Bild bei p nullhomolog. Folglich gilt $p f_0(2c^m) \sim a \cdot p(v^m)$ und nach der genannten Definition der Hopfschen Invariante $a = \pm 2\gamma_0$.

Sei nun α_0' das Element, das durch f_0 in $\pi_{2m-1}(V, F)$ bestimmt wird. Wie wir eben sahen, ist dann $h'(\alpha_0')$ das $2\gamma_0$-fache eines erzeugenden Elements von $H_{2m-1}(V, F) \cong H_{2m-1}(V)$; also ist im Diagramm (1) $\mathfrak{p}^* \partial^* q^{*-1} h'(\alpha_0')$ das γ_0-fache einer Erzeugenden von $H_{2m-2}(\Omega)$. Da die Abbildungen $\mathfrak{p}_* \circ \partial_* \circ q_*^{-1}$ und $p_*: \pi_{2m-1}(V, F) \to \pi_{2m-1}(S^m) = \pi_{2m-2}(\Omega)$ beide Isomorphismen auf sind, unterscheidet sich die Hopfsche Invariante von $\alpha_0 = \mathfrak{p}_* \partial_* q_*^{-1}(\alpha_0')$ von der von $p \circ f_0$ höchstens durch das Vorzeichen. Folglich gilt für dieses spezielle α_0 die Behauptung des Hilfssatzes: $h(\alpha_0) = \gamma_0 = \gamma(\alpha_0)$ bei geeigneter Identifikation von $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z. Da die Abbildungen h und γ linear sind, $\pi_{2m-2}(\Omega) \cong Z + E_m$ und $\gamma(\alpha_0) \neq 0$ ist, folgt das gleiche für alle Elemente von $\pi_{2m-2}(\Omega)$.

Literatur.

[1] ADEM, J.: The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 720 (1952). — [2] CHEN, C.: A note on the classification of mappings of a $(2n-2)$-dimensional complex into an n-sphere. Ann. of Math. (2) **51**, 238 (1950). — [3] EILENBERG, S.: Cohomology and continuous mappings. Ann. of Math. (2) **41**, 231 (1940). — [4] EILENBERG, S.: Singular homology theory. Ann. of Math. (2) **45**, 407 (1944). — [5] HOPF, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637 (1931). — [6] HOPF, H.: Über die Abbildungen von

Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fund. Math. **25**, 427 (1935). — [7] HU, S. T.: Extension and classification of the mappings of a finite complex into a topological group or on n-sphere. Ann. of Math. (2) **50**, 158 (1949). — [8] LEFSCHETZ, S.: Introduction to topology. Princeton Univ. Press 1949. — [9] OLUM, P.: Obstructions to extensions and homotopies. Ann. of Math. (2) **52**, 1 (1950). — [10] PONTRJAGIN, L.: A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. **9** (51), 331 (1941). — [11] SERRE, J. P.: Homologie singulière des espaces fibrés. Ann. of Math. **54**, 425 (1951). — [12] SERRE, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. (2) **58**, 258 (1953). — [13] SPANIER, E.: Borsuk's cohomotopy groups. Ann. of Math. (2) **50**, 203 (1949). — [14] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [15] WHITEHEAD, G. W.: A generalization of the Hopf invariant. Ann. of Math. (2) **51**, 192 (1950). — [16] WHITEHEAD, G. W.: On the Freudenthal theorems. Ann. of Math. (2) **57**, 209 (1953). — [17] WHITNEY, H.: The maps of an n-complex into an n-sphere. Duke Math. J. **3**, 51 (1937).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. August 1954.)

VERBLUNSKY, S.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 324—335 (1954)

On the roots of a transcendental equation, occurring in the theory of trigonometric series.

By
S. VERBLUNSKY.

1. The transcendental equation is

$$A \sin \pi z - B \cos \pi z = 0 \tag{1}$$

where A, B are relatively prime polynomials in z, with real coefficients which are so restricted that all the roots of (1) are real and simple. In cases where the coefficients of A, B depend effectively on two parameters a, b, we can interpret them as rectangular Cartesian coordinates of a point in a plane, and we may expect that the problem of characterising those points of the plane for which (1) has all its roots real and simple, will admit of a straightforward solution. In this note, the problem is solved in two such cases: (i) when A, B are both of degree ≤ 1 (Theorem 2); (ii) when A, B are of degree ≤ 2, and one is even, and the other is odd (Theorems 3, 4).

The significance of equation (1) for the theory of trigonometric series, arises from the fact that if $f(x) \in L(0, 2\pi)$, then $f(x)$ has a "Fourier" expansion

$$\Sigma \alpha_k \cos \mu_k x + \beta_k \sin \mu_k x \tag{2}$$

where the μ_k are the roots (all real and simple), of (1), and this expansion is uniformly equiconvergent with a Fourier series (or a simple combination of such series) in the closed interval $(0, 2\pi)$ (Theorem 1). The detailed investigation of series of the form (2) is simplified, if the numbers μ_k are symmetrically placed with respect to the origin. This happens if one of A, B is odd, and the other is even; and an easy argument (§ 5) shows that this condition is necessary.

When A, B are of degree ≤ 1, and one is odd and the other even, there are two cases of equation (1), viz.

$$(\alpha) \qquad h \sin \pi z + z \cos \pi z = 0, \qquad (\beta) \quad z \sin \pi z + h \cos \pi z = 0.$$

The "Fourier" expansion in case (α) has been the subject of recent investigations. (See the list of references.) FEJÉS [1] and the author [2], [4] restrict h to be positive. But all that is used in their papers is that the roots of (α) are real and simple. According to Theorem 2, this happens if and only if $\pi h > -1$. HAMMERSLEY [3] allows (α) to have complex roots provided they are all simple, so that his expansion is not a trigonometric series in the usual sense. But when (α) has all its roots real and simple, the expansion

investigated by Hammersley reduces to the one investigated by Fejés and the author, though the identity is by no means obvious.

When one of A, B is even and of degree two, and the other is odd and of degree one, there are two cases of equation (1), viz.

$$(\gamma) \quad (z^2+a)\sin\pi z - bz\cos\pi z = 0, \qquad (\delta) \quad az\sin\pi z - (z^2+b)\cos\pi z = 0.$$

The "Fourier" expansions corresponding to these cases, will be the subject of a forthcoming paper.

2. Let $Q(z)$ be a non-rational meromorphic function, all of whose poles are real and simple. Let the positive poles (if any) be denoted by $\mu_1 < \mu_2 < \cdots$, the negative poles by $\mu_{-1} > \mu_{-2} > \cdots$, and, if 0 is a pole, write $\mu_0 = 0$. Let C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ be a sequence of circles $|z| = n + \delta$, where δ is a positive constant, < 1, chosen so that for all large n, no pole of Q is on C_n. Let α be an assigned number, and let

$$\xi = x - t,$$

where x, t vary in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, so that $|\xi| \leq 2\pi$. Write, for large n,

$$H_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} Q(z)\cos z\xi\, dz$$
$$= \Sigma_n r_k \cos\mu_k \xi$$

where Σ_n denotes a sum taken over those values of k for which $|\mu_k| < n + \delta$, and r_k is the residue of Q at μ_k.

Let $f(t) \in L(\alpha, \alpha + 2\pi)$. Consider the expression

$$s_n(x) = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\, H_n(\xi)\, dt = \Sigma_n \alpha_k \cos\mu_k x + \beta_k \sin\mu_k x$$

where

$$\alpha_k - i\beta_k = r_k \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\, e^{-i\mu_k t}\, dt.$$

Then $s_n(x)$ is a partial sum of (2), and we may describe (2) as a "Fourier" expansion of the function $f(x)$.

We shall say that a sequence of functions $\{g_n(x)\}$ and a sequence of functions $\{h_n(x)\}$ are uniformly equiconvergent in a closed interval, if $g_n(x) - h_n(x) \to 0$ uniformly in the closed interval.

Theorem 1. *Let A, B be relatively prime polynomials in z with real coefficients, and such that the zeros of (1) are all real and simple. Let*

$$Q(z) = \frac{1}{2}\,\frac{A\cos\pi z + B\sin\pi z}{A\sin\pi z - B\cos\pi z}.$$

(i) *If degree of $A >$ degree of B, then $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ with $\sigma_n(x)$, the n^{th} partial sum of the Fourier series of $f(x)$. In particular, $s_n(\alpha) - s_n(\alpha + 2\pi) \to 0$ as $n \to \infty$.*

(ii) *If degree of $A <$ degree of B, then $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha+2\pi)$ with $\tau_{2n}(x)$, the $2n^{\text{th}}$ partial sum of the Fourier series of the function $\varphi(x)$, of period 4π, defined by*

$$\varphi(x) = f(x) \qquad (\alpha \leq x \leq \alpha + 2\pi)$$
$$= -f(x - 2\pi) \qquad (\alpha + 2\pi < x < \alpha + 4\pi).$$

In particular, $s_n(\alpha) + s_n(\alpha+2\pi) \to 0$ as $n \to \infty$.

(iii) *If degree of $A =$ degree of B, then there is a number λ satisfying $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, such that $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha+2\pi)$ with*

$$t_n(x; \lambda) = \cos \lambda x \, s_n^{(1)}(x) + \sin \lambda x \, s_n^{(2)}(x),$$

where $s_n^{(1)}(x)$ is the n^{th} partial sum of the Fourier series of $f(x) \cos \lambda x$, and $s_n^{(2)}(x)$ is the n^{th} partial sum of the Fourier series of $f(x) \sin \lambda x$.

Another way of expressing the conclusion in (ii), is to say that $s_n(x)$ is uniformly equiconvergent in the closed interval $(\alpha, \alpha+2\pi)$ with $t_n(x; \frac{1}{2})$. This is a consequence of the fact (see [2], 87—88) that

$$\tau_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \frac{\sin n\xi}{\sin \frac{1}{2}\xi} \, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \frac{\cos \frac{1}{2}\xi \sin (n+\frac{1}{2})\xi}{\sin \frac{1}{2}\xi} \, dt + \varepsilon_n(x)$$

where $\varepsilon_n(x) \to 0$ uniformly in the closed interval $(\alpha, \alpha+2\pi)$; and the first term is $t_n(x; \frac{1}{2})$.

3. Proof of (i). Choose for C_n the circle $|z| = n + \frac{1}{4}$. Then

$$Q(z) - \frac{1}{2}\cot \pi z = \frac{1}{2} \frac{B}{(A \tan \pi z - B) \sin \pi z \cos \pi z}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{1}{2} \cot \pi z \cos z\xi \, dz = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi \right]$$

$$H_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi \right] + R_n(\xi)$$

where

$$R_n(\xi) = \frac{1}{4\pi i} \int_{C_n} \frac{B \cot \pi z}{(A \tan \pi z - B)} \frac{\cos \xi z}{\cos^2 \pi z} \, dz.$$

On C_n, $|\tan \pi z|$ is between two positive constants, independent of n, and $B/A = O(n^{-1})$. Hence

$$\frac{B \cot \pi z}{(A \tan \pi z - B)} = O(n^{-1}).$$

Further, writing $\operatorname{Im} z = t$, we have

$$\cos \xi z = O(e^{|\xi t|}),$$

while, by our choice of C_n, there is a constant $K>0$, such that, for all n,

$$|\cos^2 \pi z| > K e^{2\pi|t|}.$$

Since $|\xi| \leq 2\pi$, it follows that $R_n(\xi)$ is uniformly bounded. Moreover, for a fixed value of ξ satisfying $|\xi|<2\pi$,

$$R_n(\xi) = O\left(\int_0^{2\pi} e^{-\delta|t|}\, d\vartheta\right),$$

where $\delta = 2\pi - |\xi|$ and $t = (n+\frac{1}{4})\sin\vartheta$. Hence $\lim_{n\to\infty} R_n(\xi) = 0$. Thus

$$\varepsilon_n(x) = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\, R_n(\xi)\, dt \to 0$$

as $n\to\infty$ uniformly in $(\alpha, \alpha+2\pi)$, and

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right] dt + \varepsilon_n(x),$$

as required.

Proof of (ii). We make the same choice for C_n as in Case (i). Then

$$Q(z) + \frac{1}{2}\tan\pi z = \frac{1}{2}\frac{A}{(A\tan\pi z - B)\cos^2\pi z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} -\frac{1}{2}\tan\pi z \cos z\xi\, dz = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi$$

$$H_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\sum_1^n \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi + R_n(\xi)$$

where

$$R_n(\xi) = \frac{1}{4\pi i}\int_{C_n} \frac{A}{(A\tan\pi z - B)}\,\frac{\cos\xi z}{\cos^2\pi z}\, dz.$$

In this case, $\frac{A}{B} = O(n^{-1})$ on C_n, and by the same argument as in Case (i), we see that

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\left[\sum_1^n \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\xi\right] dt + \varepsilon_n(x)$$

$$= \tau_{2n}(x) + \varepsilon_n(x),$$

where $\varepsilon_n(x)\to 0$ uniformly in $(\alpha, \alpha+2\pi)$.

Proof of (iii). Let the leading terms in A, B have coefficients a, b respectively. It is no loss of generality to suppose that $a>0$. There is a number λ such that

$$a = c\cos\varepsilon\pi\lambda, \qquad b = c\sin\varepsilon\pi\lambda, \qquad c = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad 0<\lambda<\tfrac{1}{2}.$$

Then

$$\frac{a\cos\pi z + b\sin\pi z}{a\sin\pi z - b\cos\pi z} = \cot\pi(z - \varepsilon\lambda).$$

We choose C_n to be the circle $|z| = n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda$. Then any point on C_n for large n, is at a distance greater than an absolute positive constant from the poles of $\cot\pi(z-\varepsilon\lambda)$, and from the poles of $\sec\pi z$. Then

$$Q(z) - \frac{1}{2}\cot\pi(z-\varepsilon\lambda) = \frac{1}{2}\,\frac{aB - bA}{(A\tan\pi z - B)(a\tan\pi z - b)\cos^2\pi z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{1}{2}\cot\pi(z-\varepsilon\lambda)\cos z\xi\,dz = \frac{1}{\pi}\cos\lambda\xi\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right].$$

If m is the common degree of A and B, then, on C_n,

$$|a\tan\pi z - b| > K, \quad |A\tan\pi z - B| > K|z|^m > K n^m,$$

where K is a positive constant, independent of n. Further

$$aB - bA = O(|z|)^{m-1} = O(n^{m-1}).$$

Hence

$$H_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\cos\lambda\xi + \left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right] + R_n(\xi),$$

where $R_n(\xi)$ has the same properties as in Cases (i) and (ii). Thus

$$s_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\cos\lambda\xi\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos k\xi\right]dt + \varepsilon_n(x)$$

$$= t_n(x;\lambda) + \varepsilon_n(x),$$

where $\varepsilon_n(x) \to 0$ uniformly in $(\alpha, \alpha + 2\pi)$.

4. In this section we solve the problem of deciding when the roots of (1) are all real and simple, in the case when A and B are of degree $\leqq 1$.

If degree of $A = 1$, degree of $B = 0$, then we may suppose that

$$A = \pi z + a, \quad B = b.$$

The equation (1) becomes, on changing the variable to $\zeta = \pi z$,

$$(\zeta + a)\sin\zeta - b\cos\zeta = 0. \tag{3}$$

If degree of $A =$ degree of $B = 1$, then we may suppose that

$$A = \pi z + a, \quad B = \mu\pi z + b.$$

Write

$$\mu = \tan\alpha, \quad a_1 = a + \mu b, \quad b_1 = b - \mu a, \quad \zeta_1 = \zeta - \alpha.$$

Then the equation (1) becomes

$$(\zeta_1 + a_2)\sin\zeta_1 - b_2\cos\zeta_1 = 0$$

where

$$a_2 = a_1\cos^2\alpha + \alpha, \qquad b_2 = b_1\cos^2\alpha,$$

and is of the form (3).

If degree of $A = 0$, degree of $B = 1$, then we may suppose that

$$A = a, \quad B = \pi z + b.$$

Write $\zeta_1 = \frac{1}{2}\pi - \zeta$. Then (1) becomes

$$[\zeta_1 - (b + \tfrac{1}{2}\pi)]\sin\zeta_1 + a\cos\zeta_1 = 0,$$

and is again of the form (3).

We may therefore confine our attention to equation (3). The solution of the problem is given by

Theorem 2. *If (a, b) is above the cycloid C:*

$$2x = \varphi + \sin\varphi, \quad 2y = \cos\varphi - 1,$$

then (3) has all its roots real and simple. If (a, b) is below the cycloid, then (3) has a pair of imaginary roots. If (a, b) is on the cycloid, then (3) has all its roots real, but not all simple.

Proof. Equation (3) has at most two imaginary roots. For, if n is a positive integer, and Γ_n is the circle $|\zeta| = (n + \frac{1}{2})\pi$, then, on Γ_n, for $n > N(a, b)$,

$$|(\zeta + a)\sin\zeta| > |b\cos\zeta|.$$

Hence, (3) has the same number of roots inside Γ_n as $(\zeta + a)\sin\zeta$, viz. $2n + 2$. But (3) has one real root at least in each open interval $\left((r - \frac{1}{2})\pi, (r + \frac{1}{2})\pi\right)$, where $r = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, except possibly the one containing $-a$, if a is not an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$, or the two which have $-a$ as a common end point, if a is an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$. But, in the latter case, $-a$ is a root of (3). Thus, (3) has at least $2n$ real roots inside Γ_n.

The preceding argument shows that if $\varrho > 0$ and $|a| \leq \varrho$, $|b| \leq \varrho$, then the imaginary roots of (3) are contained in the circle $|\zeta| < (N + \frac{1}{2})\pi$ where $N = N(\varrho)$.

Let E denote the set of points (a, b) such that (3) has imaginary roots. The imaginary roots are continuous functions of (a, b). Since there are two of them, E is an open set. Let F denote the frontier of E. Let $(a_0, b_0) \in F$. Let ϱ be chosen so that $|a_0| < \varrho$, $|b_0| < \varrho$. There is a sequence $(a_\nu, b_\nu) \in E$ such that $(a_\nu, b_\nu) \to (a_0, b_0)$ and $|a_\nu| < \varrho$, $|b_\nu| < \varrho$.

Denote the first member of (3) by $f(\zeta)$, and let $f_t(\zeta)$ be the expression obtained on giving a, b the suffix t. Let $x_\nu + iy_\nu$ denote the imaginary zero of $f_\nu(\zeta)$ for which $y_\nu > 0$. Since $|x_\nu + iy_\nu| < (N + \frac{1}{2})\pi$, we may suppose, by

selecting a sub-sequence if necessary, that the sequence $\{x_\nu + iy_\nu\}$ is convergent. Since it must converge to a zero of $f_0(\zeta)$, and every such zero is real, we can write $x_\nu \pm iy_\nu \to x_0$.

Let $\varepsilon > 0$. Then $f_\nu(\zeta) \to f_0(\zeta)$ uniformly in the circle $|\zeta - x_0| \leq \varepsilon$. Since $f_\nu(\zeta)$ has two zeros (at least) in this circle for $\nu > \nu_\varepsilon$, the same is true of $f_0(\zeta)$. Since ε is arbitrary, it follows that $f_0(\zeta)$ has a multiple zero at x_0. Dropping the suffix, we can say that if $(a, b) \in F$, then there is a real ζ such that $f(\zeta) = f'(\zeta) = 0$, or, what is the same, such that

$$a = -\zeta - \sin\zeta\cos\zeta, \quad b = -\sin^2\zeta. \tag{4}$$

Write $\varphi = -2\zeta$. Then, by definition of C in the enunciation of Theorem 2, any point (a, b) of F is a point of C. It follows that if two points are on the same side of the cycloid, then both or neither belong to E.

The point $(0, -1)$ is below the cycloid, and the corresponding equation (3) is

$$\zeta \tan\zeta + 1 = 0.$$

This has a purely imaginary root $\zeta = it$ with $t > 0$. For there is a positive t such that

$$\operatorname{th} t = \frac{1}{t}.$$

Thus $(0, -1) \in E$. Hence every point below C belongs to E.

The point $(\frac{1}{2}, 0)$ is above C, and the corresponding equation (3) is

$$(\zeta + \tfrac{1}{2}) \sin\pi\zeta = 0,$$

and has all its roots real. Hence $(\frac{1}{2}, 0)$ does not belong to E, and therefore no point above C belongs to E.

Thus E consists of the points (a, b) below C, and consequently $F = C$. Hence, if $(a, b) \in C$ then (3) has all its roots real, but not all simple. Finally, if (a, b) is above C, then all the roots of (3) are real. There cannot be a multiple root ζ, for we would then have $f(\zeta) = f'(\zeta) = 0$, i.e. equations (4), i.e. $(a, b) \in C$. This completes the proof.

5. We now show that if A, B are relatively prime polynomials with real coefficients, then the roots of (1) are symmetrical with respect to $z = 0$ only if one of A, B is odd and the other is even. The equation (1) has an infinite number of roots z_k. Hence we require that

$$A(z)\sin\pi z - B(z)\cos\pi z = 0$$

$$A(-z)\sin\pi z + B(-z)\cos\pi z = 0,$$

shall both be satisfied for $z = z_k$. Hence

$$A(z)\,B(-z) + A(-z)\,B(z) = 0 \tag{5}$$

for $z=z_k$, and so for all z. We can write

$$A(z)=z\,p(u)+q(u),\quad B(z)=z\,r(u)+s(u),$$

where p, q, r, s are polynomials with real coefficients, and $u=z^2$. By (5),

$$u\,p\,r=q\,s$$

identically in z and so, identically in u. If p and s are identically zero, there is nothing to prove. In the contrary case, let $\tilde{\omega}$ denote the h.c.f. of p and s. Then

$$p=\tilde{\omega}\,p_1,\quad s=\tilde{\omega}\,s_1,\quad (p_1, s_1)=1.$$

Hence $p_1\,r\,u=q\,s_1$, and p_1 divides q. We can write

$$q=p_1 q_1,\quad r\,u=q_1 s_1.$$

Then u divides q_1 or s_1. If u divides q_1, then $q_1=u\,q_2$, $r=q_2\,s_1$

$$A=z\,p_1[\tilde{\omega}+z\,q_2],\quad B=s_1[\tilde{\omega}+z\,q_2].$$

But A, B are relatively prime. Hence $\tilde{\omega}+z\,q_2=\text{const}$. Hence $q_2\equiv 0$ and $q\equiv 0$, $r\equiv 0$, as required. If u divides s_1, then

$$s_1=u\,s_2,\qquad r=q_1 s_2,$$

$$A=p_1[z\,\tilde{\omega}+q_1],\quad B=z\,s_2[z\,\tilde{\omega}+q_1].$$

Hence $\tilde{\omega}\equiv 0$. But then $p\equiv 0$, $s\equiv 0$, which is a contradiction.

6. We now consider the case of equation (1) when A, B are of degree ≤ 2 and one is even and the other is odd. If A is even, then writing $\zeta=\pi z$, we may suppose that (1) is

$$(\zeta^2+a)\sin\zeta+b\zeta\cos\zeta=0. \tag{6}$$

If B is even, we may suppose that (1) is

$$(\zeta^2+a)\cos\zeta+b\zeta\sin\zeta=0. \tag{7}$$

The solution of the problem of finding the points (a, b) for which (6) or (7) has all its roots real and simple, is given by the following theorems.

Theorem 3. *Let Γ denote the curve*

$$x=-\frac{t^2}{4}\left(\frac{t+\sin t}{t-\sin t}\right),\quad y=t\left(\frac{1-\cos t}{t-\sin t}\right)\qquad (t>0),$$

and let Λ denote the ray

$$x+y=0,\quad x\geq -3.$$

Then $\Gamma+\Lambda$ divides the (x, y) plane into two domains D_1, D_2. If D_1 is the domain which contains the point $(-\pi, 0)$, then, if $(a, b)\in D_1$, the roots of (6) are real and simple. If $(a, b)\in D_2$, then (6) has a pair of imaginary roots. If $(a, b)\in\Gamma+\Lambda$, then the roots of (6) are all real, but not all simple.

Theorem 4. *Let G denote the curve*

$$x = -\frac{t^2}{4}\left(\frac{t-\sin t}{t+\sin t}\right), \quad y = -t\left(\frac{1+\cos t}{t+\sin t}\right) \qquad (t>0),$$

and let L denote the ray

$$x = 0, \quad y \geq -1.$$

Then $G+L$ divides the (x, y) plane into two domains D_1, D_2. If D_1 is the domain which contains the point $(-\pi, 0)$, then, if $(a, b) \in D_1$, the roots of (7) are real and simple. If $(a, b) \in D_2$, then (7) has a pair of imaginary roots. If $(a, b) \in G+L$ then the roots of (7) are real, but not all simple.

7. Proof of Theorem 3. If ϱ is an assigned positive number and $|a| \leq \varrho$, $|b| \leq \varrho$, then

$$|(\zeta^2 + a)\sin\zeta| > |b\zeta\cos\zeta|$$

on the circle Γ_n, i.e. the circle $|\zeta| = (n+\frac{1}{2})\pi$ where n is an integer such that $n \geq N(\varrho)$. Hence, the number of roots of (6) inside Γ_n equals the number of zeros of $(\zeta^2+a)\sin\zeta$ inside this circle, viz. $2n+3$. If $-a$ is not the square of an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$, then, in every closed interval of the form $\left((r-\frac{1}{2})\pi, (r+\frac{1}{2})\pi\right)$, except possibly two, $\zeta^2+a \neq 0$. Hence, every open interval of this form, except possibly two, contains a zero of (6). Hence (6) has at least $2n-1$ real zeros inside Γ_n and at most four imaginary zeros. The same conclusion holds by continuity when $-a$ is the square of an odd multiple of $\frac{1}{2}\pi$. Further, the imaginary roots are inside the circle $|\zeta| < (N+\frac{1}{2})\pi$.

Let E denote the set of points (a, b) for which (6) has an imaginary root. Let F denote the frontier of E. By the argument used in § 4, it follows that E is open, and that if $(a, b) \in F$, then there is a real number ζ such that

$$f(\zeta) = (\zeta^2 + a)\sin\zeta + b\zeta\cos\zeta = 0, \tag{8'}$$

$$f'(\zeta) = (\zeta^2 + a)\cos\zeta + 2\zeta\sin\zeta + b(\cos\zeta - \zeta\sin\zeta) = 0. \tag{8''}$$

There are two possibilities. (i) Equations (8) are satisfied with $\zeta = 0$. (ii) Equations (8) are satisfied with $\zeta \neq 0$. In case (i), (8'') implies that $a+b=0$. But we cannot have $a < -3$, since then (6) has a root $\zeta = iy$ with $y > 0$ and $(a, b) \in E$. For

$$if(iy) = (y^2 - a)\operatorname{sh} y + a\, y \operatorname{ch} y, \tag{9}$$

which is positive for large y, while for small positive y, the principal term in the Maclaurin expansion of (9) is $y^3(1 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{2}a)$, and is negative. Thus, in case (i), $(a, b) \in \Lambda$.

In case (ii), equations (8) are the same as

$$a = -\zeta^2\left(\frac{\zeta + \sin\zeta\cos\zeta}{\zeta - \sin\zeta\cos\zeta}\right), \qquad b = \frac{2\zeta\sin^2\zeta}{\zeta - \sin\zeta\cos\zeta}.$$

We may here suppose that $\zeta > 0$. Write $t = 2\zeta$. Then $(a, b) \in \Gamma$. Thus $F \subset \Gamma + \Lambda$.

To complete the proof, it remains to verify that $\Gamma+\Lambda$ divides the plane into two domains D_1, D_2, one of which, D_1 say, contains $(-\pi, 0)$, and the other contains the points $(a, -a)$ with $a<-3$. The theorem will then follow easily. For if two points belong to the same domain, then both or neither belong to E. Now $(a, -a) \in E$ if $a<-3$, and $(-\pi, 0)$ does not belong to E. Hence $D_1 E=0$, $D_2=E$. If $(a, b) \in CE$, then (6) has all its roots real. If $(a, b) \in D_1$, then the roots are all simple. For the values of (a, b) for which there is a multiple real root, form the curve Γ and the line $a+b=0$. Hence finally, if $(a, b) \in \Gamma+\Lambda$, there is a multiple real root.

8. Write

$$s=\sin t, \quad c=\cos t. \tag{10}$$

We consider the function

$$g(t)=\frac{t^2}{t+s}-\frac{s}{1+c}$$

in the open interval $(r\pi, (r+1)\pi)$, which we denote by δ_r, for $r=0, 1, \ldots$. We have

$$g'(t)=-\frac{(c\,t-s)^2}{(t+s)^2(1+c)}.$$

Thus $g(t)$ is a decreasing function in each δ_r. Now

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t(t+s)(1+c)}{2(t-s)^2}g(t), \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{s(t+s)}{(t-s)^2}g(t).$$

If $g(t) \neq 0$, then

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{t}\tan\frac{t}{2},$$

and

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{\sin t-t}{(t\cos\frac{1}{2}t)^2}<0.$$

Consider first δ_0. Since $g \to 0$ as $t \downarrow 0$, we have $g(t)<0$ in δ_0. Then $\frac{dx}{dt}>0$, $\frac{dy}{dt}<0$, $\frac{d^2y}{dx^2}<0$. Since $x \to -3$, $y \to 3$ as $t \downarrow 0$, the arc of Γ which corresponds to δ_0 is a concave arc joining $P_0(3, -3)$ to $A_1(-\frac{1}{4}\pi^2, 2)$. At P_0 the gradient is -1, so that Γ forms a cusp with Λ. At A_1 the tangent is parallel to the y-axis.

In δ_1, we have $g(t)>0$. The corresponding arc of Γ is a convex arc joining A_1 to $B_1(-\pi^2, 0)$. At B_1, the arc touches the x-axis.

In δ_2 (and in $\delta_4, \delta_6, \ldots$) the behaviour of x, y is not so simple. Since g is positive near $t=2\pi$ and negative near $t=3\pi$, there is a number ξ_1 between 2π and 3π such that $g(t)>0$ if $2\pi<t<\xi_1$, and $g(t)<0$ if $\xi_1<t<3\pi$. Hence the part of Γ corresponding to $(2\pi, \xi_1)$ is a convex arc joining B_1 to P_1, where P_1 is the point for which $t=\xi_1$; and the part of Γ corresponding to $(\xi_1, 3\pi)$ is a concave arc joining P_1 to A_2 $(-\frac{9}{4}\pi^2, 2)$. At P_1 there is a cusp; at A_2 the tangent is parallel to the y-axis.

The arc corresponding to δ_3 is a convex arc joining A_2 to $B_2(-4\pi^2, 0)$, at which point it touches the x-axis; and so on.

9. Proof of Theorem 4. Let E denote the set of points (a, b) such that (7) has an imaginary root. As in § 7, we see that (7) has at most four imaginary roots, and that if $|a| \leq \varrho$, $|b| \leq \varrho$, then the imaginary roots are inside the circle $|\zeta| = N\pi$ where $N = N(\varrho)$. Further, E is an open set, and if $(a, b) \in F$, where F is the frontier of E, then there is a real number ζ such that

$$(11') \qquad \varphi(\zeta) = (\zeta^2 + a)\cos\zeta + b\zeta\sin\zeta = 0,$$

$$(11'') \qquad \varphi'(\zeta) = -(\zeta^2 + a)\sin\zeta + 2\zeta\cos\zeta + b(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta) = 0.$$

There are two possibilities. (i) Equations (11) are satisfied with $\zeta = 0$. (ii) Equations (11) are satisfied with $\zeta \neq 0$. In case (i), (11′) implies that $a = 0$. We cannot have $b < -1$ since then (7) has a root $\zeta = iy$ with $y > 0$, which would imply that $(a, b) \in E$. For

$$\varphi(iy) = -y(y\,\mathrm{ch}\,y + b\,\mathrm{sh}\,y),$$

and this is negative for large y, while for small y it is positive if $b < -1$. Thus, in case (i), $(a, b) \in L$.

In case (ii), equations (11) are the same as

$$a = \zeta^2 \frac{\sin\zeta\cos\zeta - \zeta}{\sin\zeta\cos\zeta + \zeta}, \qquad b = -\frac{2\zeta\cos^2\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta + \zeta}.$$

We may suppose that $\zeta > 0$. Write $t = 2\zeta$. Then $(a, b) \in G$. Thus $F \subset G + L$.

To complete the proof, it is enough to verify that $G + L$ divides the plane into two domains D_1, D_2, one of which, D_1 say, contains $(-\pi, 0)$, and the other contains the points $(0, b)$ with $b < -1$. For $(0, b) \in E$ if $b < -1$, and $(-\pi, 0)$ does not belong to E. Thus $E = D_2$, and the argument proceeds as at the end of § 7.

We use the abbreviations (10). Write

$$h(t) = \frac{t^2}{t - s} + \frac{1 + c}{s}$$

and consider the behaviour of $h(t)$ in each open interval δ_r. We have

$$h'(t) = -\frac{(ct - s)^2}{(t - s)^2(1 - c)}$$

so that $h(t)$ is decreasing in each δ_r. Further,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t(t - s)(1 - c)}{2(t + s)^2} h(t), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{s(t - s)}{(t + s)^2} h(t).$$

If $h(t) \neq 0$, then

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{t}\cot\frac{t}{2},$$

and

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{t + \sin t}{(t\sin\frac{1}{2}t)^2} > 0.$$

Clearly $h(t) > 0$ in δ_0. Then $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dt} > 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. Since $x \to 0$, $y \to -1$, as $t \downarrow 0$, the arc of G which corresponds to δ_0, is a concave arc joining $Q_0(0, -1)$ to $A_1(-\frac{1}{4}\pi^2, 0)$. At Q_0, G forms a cusp with L. At A_1, it touches the x-axis.

In δ_1, h is positive near $t = \pi$ and negative near $t = 2\pi$. Hence there is a number η_1 between π and 2π such that $h(t) > 0$ if $\pi < t < \eta_1$ and $h(t) < 0$ if $\eta_1 < t < 2\pi$. Hence the part of G which corresponds to (π, η_1) is a concave arc joining A_1 to Q_1, where Q_1 is the point for which $t = \eta_1$, and the part of G corresponding to $(\eta_1, 2\pi)$ is a convex arc joining Q_1 to $B_1(-\pi^2, -2)$. At Q_1 there is a cusp, at B_1 the tangent is parallel to the y-axis. In δ_2, $h(t) > 0$. Hence the corresponding part of G is a concave arc joining B_1 to $A_2(-\frac{9}{4}\pi^2, 0)$ at which it touches the x-axis, and so on.

References.

[1] FEJES, L.: Über die Fouriersche Reihe der Abkühlung. Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **11**, 28—36 (1946). — [2] VERBLUNSKY, S.: Sur une classe de series exponentielles de Cauchy. Bull. Sci. Math. (2) **76**, 85—96 (1952). — [3] HAMMERSLEY, J. M.: A non-harmonic Fourier series. Acta Math. **89**, 243—260 (1953). — [4] VERBLUNSKY, S.: Some theorems on F. A. series. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **3**, 89—105 (1954).

Dept. of Math., The Queen's University, Belfast (N. Ireland).

(Eingegangen am 19. Juli 1954.)

NITSCHE, J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 336—347 (1954)

Über die linearen Randwertprobleme eines quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems.

Von
JOHANNES NITSCHE.

T sei der Einheitskreis $x^2+y^2<1$ und S seine Peripherie mit der Bogenlänge $s(-\infty<s<\infty)$. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Randwertproblem

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\{-F(x,y;u,v)\,v_x + E(x,y;u,v)\,v_y\}\\ u_y &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\{-G(x,y;u,v)\,v_x + F(x,y;u,v)\,v_y\}\end{aligned}\right\} \text{ in } T$$

$$(2)\qquad R^\sigma(u,v) \equiv u\cos\sigma(s) + v\sin\sigma(s) = h(s) \quad \text{auf} \quad S.$$

Es sollen die folgenden Voraussetzungen gelten: Die reellen Funktionen $E=E(x,y;u,v)$, $F=F(x,y;u,v)$ und $G=G(x,y;u,v)$ seien für $x^2+y^2\leq 1$ und alle u,v erklärt und nach den beiden letzten Argumenten differenzierbar. E,F,G und $E_u,\ldots,G_v$ sollen als Funktionen von x,y in $T+S$ λ-HÖLDER-stetig (kurz: aus $\mathfrak{C}^0(\lambda)$, $0<\lambda<1$) sein, und zwar gleichmäßig für jeden abgeschlossenen Bereich der u,v-Ebene. Für jede Zahl $m\geq 0$ sollen $E_u,\ldots,G_v$ in $x^2+y^2\leq 1$; $|u|,|v|\leq m$ bezüglich u und v HÖLDER-stetig sein. HÖLDER-Koeffizient und HÖLDER-Exponent dürfen dabei von m abhängen. Außerdem soll $EG-F^2>0$, $E>0$ gelten. $\sigma=\sigma(s)$ sei eine λ-HÖLDER-stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge (kurz: $\sigma\in\mathfrak{C}^1(\lambda)$), welche sich bei einmaligem Umlaufen des Randes im positiven Sinne um ein ganzzahliges Vielfaches n ($\gtreqless 0$) von 2π ändert: $\sigma(s+2\pi)=\sigma(s)+2\pi n$. Die Zahl n heißt der Index der Randbedingung. Zur Abkürzung wird noch $\tau(s)=\sigma(s)+\frac{\pi}{2}$ gesetzt. $h(s)$ schließlich sei periodisch: $h(s+2\pi)=h(s)$ und aus $\mathfrak{C}^1(\lambda)$. Gesucht sind Lösungen $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. u und v sind in T stetig differenzierbar und in $T+S$ HÖLDER-stetig[1]).

2a. Wenn $n\geq 0$, so erfüllen u,v auf dem Rande zusätzlich die $2n+1$ Bedingungen

$$(2a)\qquad \int_S h_j(s)\,R^\tau(u,v)\,ds \equiv \int_S h_j(s)\{u\cos\tau(s)+v\sin\tau(s)\}\,ds = \varkappa_j \quad (j=0,1,\ldots,2n)$$

mit beliebig vorgegebenen (reellen) Konstanten $\varkappa_j$. Dabei stehen die $h_j(s)$ als Abkürzung für die trigonometrischen Funktionen

$$1,\quad \cos s,\quad \sin s,\quad \ldots,\quad \cos(ns),\quad \sin(ns).$$

[1]) Mit einem beliebigen und auch von Lösung zu Lösung verschiedenen Exponenten >0.

[Kurz: Die ersten $2n+1$ FOURIER-Koeffizienten von $R^\tau(u, v)$ sollen vorgegebene Werte annehmen.]

2b. Wenn $n<0$, so unterscheidet sich der auf dem Rande definierte Ausdruck $R^\sigma(u, v)$ von der Funktion $h(s)$ höchstens um eine reelle Linearkombination[2])

$$\gamma_0 h_0(s) + \gamma_1 h_1(s) + \cdots + \gamma_{2|n|-2} h_{2|n|-2}(s).$$

[Kurz: $R^\sigma(u, v)$ soll mit $h(s)$ jedenfalls bis auf die ersten $2|n|-1$ FOURIER-Koeffizienten übereinstimmen.]

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Das Randwertproblem* (1), (2) *hat für* $n=0$ *stets eine eindeutig bestimmte Lösung* u, v. *Sie gehört in* $T+S$ *überdies zu* $\mathfrak{C}^1(\lambda')$ $(\lambda'<\lambda)$. *Für* $n\neq 0$ *existiert stets eine eindeutig bestimmte Lösung* u, v, *wenn es eine Konstante* M *gibt, mit der für alle* u, v *die Ungleichung* $E+G\leq M\sqrt{EG-F^2}$ *richtig ist*[3]).

Bemerkung. Unter zusätzlichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen werden von dem formulierten Satz gewisse Randwertprobleme einer Klasse quasilinearer selbstadjungierter Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfaßt, insbesondere für $\sigma=\text{const}\,(n=0!)$ das DIRICHLETsche Problem. — Für $\sigma=\pi/2$ erhielte man z. B., wenn E, F und G nicht von u abhängen:

$$\left(\frac{G v_x - F v_y}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_x + \left(\frac{E v_y - F v_x}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_y = 0 \quad \text{in } T, \tag{3}$$

$$v = h(s) \quad \text{auf} \quad S. \tag{3'}$$

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus. Zunächst werden, wie üblich[4]), Normen eingeführt: $\|u\| = \text{Max}|u(x, y)|$ für $(x, y)\in T+S$; $\|u\|_{\mu,0} = \|u\| + \overline{\text{fin}}\left\{|u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)| \cdot [(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1^2)]^{-\frac{\mu}{2}}\right\}$ für (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in T+S$ und $(x_1, y_1)\neq(x_2, y_2)$; $\|u\|_{\mu,1} = \|u\|_{\mu,0} + \|u_x\|_{\mu,0} + \|u_y\|_{\mu,0}$ usw. Der Kürze halber finden die gleichen Bezeichnungen auch für Funktionen der Bogenlänge Verwendung. Weiterhin steht $\|u, v\|$ für $\text{Max}(\|u\|, \|v\|)$ usw. Gelegentlich wird auch die komplexe Schreibweise mit $x+iy=z$, $u(x, y)+iv(x, y)=w(z)$, $\|w\| = \|u, v\|$, ..., $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ benutzt. Wenn im folgenden lediglich von der HÖLDER-Stetigkeit einer Funktion die Rede ist, so ist nur diese Tatsache, nicht jedoch der genaue HÖLDER-Exponent von Belang.

Hilfssatz 1. Voraussetzungen. *Durch die zu* $\mathfrak{C}^0(\beta)$ $(0<\beta<1)$ *gehörige Funktion* $t=t(s)$ *werde eine topologische Abbildung des Randes* S *auf sich vermittelt* $(t(0)=0,\ t(2\pi)=2\pi)$. *Weiterhin sei* $p(s)$ *eine periodische und ebenfalls*

[2]) Die γ_j sind, wie sich herausstellen wird, eindeutig bestimmt.

[3]) Diese Bedingung ist nur für den Existenzbeweis erforderlich. Man kann sie auch so formulieren: Es existiert eine Konstante $K>0$, so daß

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 \leq K\sqrt{EG-F^2}(\xi^2+\eta^2).$$

[4]) Vgl. J. SCHAUDER [9], S. 664—665.

β-HÖLDER-stetige reelle Funktion. Wir betrachten die Determinante

$$\Delta = \mathrm{Det}\left(\int_S e^{p(t(s))}\, h_j(t(s))\, h_l(s)\, ds\right) \quad (j, l = 0, \ldots, 2n). \tag{4}$$

Behauptungen. *Δ ist positiv. Wenn man die Funktionen $t(s)$ und $p(s)$ variiert, so gibt es eine allein von $||t||_{\beta,0}$ und $||p||_{\beta,0}$ abhängige Schranke $d>0$, so daß $\Delta \geq d$ bleibt. Für $n=0$ fällt die Abhängigkeit von $||t||_{\beta,0}$ weg, und die Abhängigkeit von $||p||_{\beta,0}$ kann durch die schwächere von $||p||$ ersetzt werden.*

Der Beweis kann übergangen werden.

Hilfssatz 2. Voraussetzungen. *Es wird das Randwertproblem*

$$u_x - v_y = r_1(x, y), \quad u_y + v_x = r_2(x, y) \quad \text{in } T \tag{5}$$

mit den Randbedingungen (2), (2a) *bzw.* (2), (2b) *betrachtet. Die Funktionen $r_1(x, y)$ und $r_2(x, y)$ sollen in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^0(\lambda)$ gehören.*

Behauptungen. *Es existiert eine eindeutig bestimmte, in $T+S$ überdies zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$ gehörige Lösung u, v. Es seien eine Zahl λ' $(0 \leq \lambda' \leq \lambda)$ und eine beliebige Zahl β $(0<\beta\leq\lambda)$ gegeben, und es werde $\varepsilon = \mathrm{Max}(\lambda', \beta)$ gesetzt. Dann gelten Abschätzungen*

$$||u, v||_{\lambda',0} \leq \nu_T\, ||r_1, r_2|| + \nu_S\, ||h||_{\lambda',0} + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j\, |\varkappa_j|, \tag{6}$$

$$||u, v||_{\beta,1} \leq \nu_T\, ||r_1, r_2||_{\beta,0} + \nu_S\, ||h||_{\beta,1} + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j\, |\varkappa_j|. \tag{7}$$

Die Schranken ν in (6) *hängen für $n=0$ von λ' und $||\sigma||_{\lambda',0}$, für $n\neq 0$ von ε und $||\sigma||_{\varepsilon,0}$ ab, die Schranken ν in* (7) *von β und $||\sigma||_{\beta,1}$. — Die Summen rechts fallen für $n<0$ weg.*

Beweis. Zunächst sei $n \geq 0$. $w^0 = u^0 + i\, v^0$ sei die partikuläre Lösung der Gln. (5), deren Realteil auf dem Rande verschwindet. Nach bekannten Sätzen[5]) gehört $w^0(z)$ in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$ und erfüllt Ungleichungen der Art

$$||w^0||_{\lambda',0} \leq \mu_1(\lambda') \cdot ||r_1, r_2||, \quad ||w^0||_{\beta,1} \leq \mu_2(\beta)\, ||r_1, r_2||_{\beta,0}. \tag{8}$$

Die gewünschte Lösung $w(z)$ soll durch den Ansatz

$$w = w^0 + e^{i\omega}\left\{z^n W + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j w_j\right\} \tag{9}$$

gewonnen werden. $\omega = \omega(z)$ zunächst sei die in T regulär-analytische Funktion, für welche auf S: $\Re\, \omega = \sigma(s) - n \cdot s$ und in $z=0$: $\Im\mathrm{m}\, \omega = 0$ gilt. ω gehört in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$, und man hat[6])

$$||\omega||_{\lambda',0} \leq \mu_3, \quad ||\omega||_{\beta,1} \leq \mu_4 \tag{10}$$

---

[5]) Vgl. z. B. L. LICHTENSTEIN [2], S. 207—209, [4], S. 574.

[6]) Vgl. J. SCHAUDER [8], S. 635 und [9], Fußnote 4; außerdem L. LICHTENSTEIN [3], insbesondere S. 325.

mit nur von λ' und $||\sigma||_{\lambda',0}$ bzw. β und $||\sigma||_{\beta,1}$ abhängigen Schranken μ_3 bzw. μ_4. Nunmehr heißt die Randbedingung (2) folgendermaßen:

$$\Re W + \Re\left\{\bar{z}^n \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j w_j\right\} = e^{\Im \omega(s)} \{h(s) - R^\sigma(u^0, v^0)\}. \tag{11}$$

Die in T regulär-analytische Funktion $W(z) = U + iV$ wird jetzt so bestimmt, daß sie auf S der Bedingung

$$\Re W = e^{\Im \omega(s)} \{h(s) - R^\sigma(u^0, v^0)\} \tag{12}$$

genügt; außerdem soll $\Im W$ im Nullpunkt verschwinden. W gehört in $T + S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda)$, und wegen (8) und (10) gilt [7])

$$||W||_{\lambda',0} \leq \mu_5 ||r_1, r_2|| + \mu_6 ||h||_{\lambda',0}, \quad ||W||_{\beta,1} \leq \mu_7 ||r_1, r_2||_{\beta,0} + \mu_8 ||h||_{\beta,1}, \tag{13}$$

wobei μ_5 und μ_6 nur von λ' und $||\sigma||_{\lambda',0}$ und μ_7 und μ_8 nur von β und $||\sigma||_{\beta,1}$ abhängen. Die Funktionen $w_j(z)$ schließlich sollen in T regulär-analytisch und Lösungen des Randwertproblems $\Re(\bar{z}^n w_j) = 0$ sein. Man kann etwa die folgenden $2n+1$ linear unabhängigen Funktionen wählen:

$$w_0(z) = i z^n, \quad \left\{\begin{array}{l} w_{2l-1}(z) = \dfrac{i}{2}(z^{n+l} + z^{n-l}) \\ w_{2l}(z) = \dfrac{1}{2}(z^{n+l} - z^{n-l}) \end{array}\right\} \quad (l = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Es müssen noch die zusätzlichen Bedingungen (2a) befriedigt werden. Sie führen auf das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der α_j:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_S e^{-\Im \omega(s)} h_j(s)\, h_k(s)\, ds \\ \qquad = \varkappa_j - \int_S h_j(s)\, R^\tau(u^0, v^0)\, ds - \int_S e^{-\Im \omega(s)} h_j(s)\, V(s)\, ds. \end{cases} \tag{15}$$

Die Koeffizientendeterminante ist nach Hilfssatz 1 größer als eine Zahl $d > 0$, welche sich im Falle $n = 0$ allein aus $||\omega||$ d.h. $||\sigma||$, im Falle $n > 0$ aus $||\omega||_{\beta,0}$ d.h. $||\sigma||_{\beta,0}$ bestimmt. Berücksichtigt man die Eigenschaften von w^0, ω und W, so erhält man Abschätzungen

$$|\alpha_j| \leq \mu_9 |\varkappa_j| + \mu_{10} ||r_1, r_2|| + \mu_{11} ||h|| \quad (j = 0, \ldots, 2n). \tag{16}$$

Die Abhängigkeit der Schranken $\mu_9, \mu_{10}, \mu_{11}$ ist die gleiche wie die von d.

Faßt man alles zusammen, so erkennt man an Hand der Darstellung (9) die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

Als Zweites ist der Fall $n < 0$ zu erledigen. Ähnlich wie eben wird die Lösung in der Form

$$w = w^0 + e^{i\omega} z^n W = w^0 + e^{i\omega} z^{-|n|} W \tag{17}$$

angesetzt. Die Funktionen w^0 und w sollen ihre alte Bedeutung behalten. Die Randbedingung (2), (2b):

$$R^\sigma(u, v) = h(s) - \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \gamma_j h_j(s) \tag{18}$$

[7]) Vgl. Fußnote 6).

führt jetzt zu

$$\Re e\, W = e^{\Im m\, \omega(s)} \Big\{ h(s) - \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \gamma_j h_j(s) - R^{\sigma}(u^0, v^0) \Big\}. \tag{19}$$

Hieraus ist zu ersehen, welche Werte man für die γ_j zu wählen hat, damit eine Lösung existiert. $W(z)$ muß nämlich bei $z=0$ eine $|n|$-fache Nullstelle besitzen, d.h. die ersten $2|n|-1$ FOURIER-Koeffizienten der rechten Seite von (19) müssen verschwinden. Dadurch sind die γ_j bestimmt. Analog wie für die α_j erhält man jetzt Abschätzungen

$$|\gamma_j| \leq \mu_{12} \|h\| + \mu_{13} \|R^{\sigma}(u^0, v^0)\| \leq \mu_{12} \|h\| + \mu_{14} \|r_1, r_2\| \tag{20}$$

mit Schranken, welche noch von $\|\omega\|_{\beta,0}$ d.h. $\|\sigma\|_{\beta,0}$ abhängen. Nun bestätigen sich auch für den Fall $n<0$ die aufgestellten Behauptungen.

Hilfssatz 3. Voraussetzungen. *Durch die in $|z| \leq 1$ stetig differenzierbare Funktion $z' = \varphi(z)$ werde der Einheitskreis $T+S$ der z-Ebene topologisch auf den Einheitskreis $T'+S'$ der z'-Ebene abgebildet* [*Umkehrung*: $z = \psi(z')$]. *Die Funktionaldeterminante $\square = |\varphi_z|^2 - |\varphi_{\bar{z}}|^2$ sei in $|z| \leq 1$ positiv. Wir setzen $w(\psi(z')) = w'(z')$ und betrachten für $w(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ das Randwertproblem*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \square \cdot \frac{\partial w'}{\partial \bar{z}'} = 0 \tag{21}$$

mit den Randbedingungen (2), (2a) *bzw.* (2), (2b).

Behauptungen. *Es seien eine Zahl ε $(0 < \varepsilon \leq \lambda)$ und eine Zahl δ $(0 \leq \delta \leq \varepsilon)$ gegeben, und es werde $\lambda_1 = \delta^4$ gesetzt. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung $w(z)$ eine Abschätzung*

$$\|w\|_{\lambda_1,0} \leq \nu_S \|h\|_{\delta,0} + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j |\varkappa_j|. \tag{22}$$

Die Schranken ν_S und ν_j hängen außer von $\sigma(s)$ für $n=0$ von δ, $\|\varphi\|_{\delta,0}$, $\|\psi\|'_{\delta,0}$[8] *und für $n \neq 0$ von ε, $\|\varphi\|_{\varepsilon,0}$ und $\|\psi\|'_{\varepsilon,0}$ ab. Die Summe rechts fällt für $n<0$ weg.*

Beweis. Für $w'(z') = u'(x', y') + i\, v'(x', y')$ handelt es sich um das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} u'_{x'} - v'_{y'} = 0, \quad u'_{y'} + v'_{x'} = 0 \\ R^{\sigma'}(u', v') \equiv u' \cos \sigma'(s') + v' \sin \sigma'(s') = h'(s') \end{cases} \tag{23}$$

und, falls $n \geq 0$,

$$\int_{S'} h'_j(s')\, R^{\tau'}(u', v')\, ds' = \varkappa_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2n). \tag{24}$$

Dabei sind $h'(s') = h\big(s(s')\big)$, $\sigma'(s') = \sigma\big(s(s')\big)$ und $h'_j(s') = h_j\big(s(s')\big) \cdot \frac{ds}{ds'}$ für $n \geq 0$, $h'_j(s') = h_j\big(s(s')\big)$ für $n<0$ gesetzt, wobei unter s' die Bogenlänge von S' verstanden wird.

[8] Die in der z'-Ebene genommenen Normen sind mit einem Strich versehen.

Es sei $n \geqq 0$. Wir halten uns an den Beweis von Hilfssatz 2 und machen wie dort den Ansatz

$$w'(z') = e^{i\omega'(z')}\left\{z'^n W'(z') + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j \bar{w}_j'(z')\right\} \tag{25}$$

($w^{0'}$ tritt hier nicht auf). Bei der Abschätzung der Funktionen ω' und W' kommen Normen $\|\sigma'\|_{\varrho,0}'$ vor (vgl. Fußnote 8), die wegen $\|\sigma'\|_{\varrho,0}' \leqq \|s(s')\|_{\varrho,0}'$ $\operatorname{Max}_S \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|$ außer von $\sigma(s)$ nur von $\|\psi\|_{\varrho,0}'$ abhängen. Die Bestimmung der α_j führt hier auf das Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_{S'} e^{-\Im m\,\omega'(s')}\, h_j'(s')\, h_k(s')\, ds' = \varkappa_j - \int_{S'} e^{-\Im m\,\omega'(s')}\, h_j'(s')\, V'(s')\, ds'. \tag{26}$$

Seine Koeffizientendeterminante heißt

$$\begin{cases} \Delta = \operatorname{Det}\left(\int_{S'} e^{-\Im m\,\omega'(s')}\, h_j'(s')\, h_k(s')\, ds'\right) \\ \quad = \operatorname{Det}\left(\int_{S} e^{-\Im m\,\omega'(s'(s))}\, h_j(s)\, h_k\big(s'(s)\big)\, ds\right). \end{cases} \tag{27}$$

Nach Hilfssatz 1 gilt $\Delta \geqq d > 0$, und d hängt für $n = 0$ nur von $\|\omega'(s')\|'$ ab. Für $n > 0$ tritt noch eine Abhängigkeit von $\|s'(s)\|_{\beta,0}$ und $\|\omega'(s')\|_{\beta,0}'$ hinzu, wobei β eine beliebige Zahl $(0 < \beta < 1)$ bedeutet. Wir wählen $\beta = \varepsilon$; dann gilt für $n > 0$ letzten Endes $d = d(\sigma; \varepsilon, \|\varphi\|_{\varepsilon,0}, \|\psi\|_{\varepsilon,0}')$. Somit ergeben sich Abschätzungen

$$|\alpha_j| \leqq \mu_1 \|h\| + \mu_2 |\varkappa_j| \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{28}$$

wobei die Schranken μ_1 und μ_2 von den gleichen Argumenten wie d abhängen.

Die beiden Zahlen λ_1 und δ seien wie in der Behauptung des Hilfssatzes 3 beschaffen. Dann gilt

$$\|w\|_{\lambda_1,0} \leqq \|w'\|_{\delta^2,0}' \cdot (\|\varphi\|_{\delta^2,0})^{\delta^2}, \tag{29}$$

$$\|h'\|_{\delta^2,0}' \leqq \|h\|_{\delta,0} \cdot \left(\|s(s')\|_{\delta,0}'\right)^{\delta}. \tag{30}$$

Die zu (10) und (13) entsprechenden Ungleichungen für ω' und W' und die Ungleichungen (28) liefern nunmehr in Verbindung mit der Darstellung (25) die behauptete Abschätzung (22), w. z. b. w.

Der Beweis für den Fall $n < 0$ gelingt ganz entsprechend.

Nunmehr können wir mit dem Beweis unseres Satzes beginnen. Er wird in mehreren Schritten geführt. Zunächst wird, und zwar gemeinsam für alle Fälle $n \lesseqgtr 0$, die Existenz bewiesen.

I. $e = e(x, y)$, $f = f(x, y)$ und $g = g(x, y)$ seien in $T + S$ zu $\mathfrak{C}^0(\varrho)$ gehörige Funktionen $(0 < \varrho < 1)$ mit $eg - f^2 = 1$, $e > 0$. Außerdem sollen e und g noch beschränkt sein: $e, g \leqq m_1$. Nach L. LICHTENSTEIN [1] gibt es stets Funktionen $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x, y)$, welche Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\bar{x}_x = -f(x, y)\, \bar{y}_x + e(x, y)\, \bar{y}_y, \qquad \bar{x}_y = -g(x, y)\, \bar{y}_x + f(x, y)\, \bar{y}_y \tag{31}$$

sind und welche darüber hinaus die folgenden Eigenschaften besitzen: Sie sind in $T+S$ aus $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ $(\varrho'<\varrho)$ und bilden — Rand in Rand, Nullpunkt in Nullpunkt — den Einheitskreis $T+S$ topologisch auf den Einheitskreis der $\bar{x}, \bar{y}$-Ebene ab. Außerdem gilt in $T+S$ durchweg $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} > 0$. Man berechnet

$$\bar{x}_x^2 + \bar{y}_x^2 = e \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}, \qquad \bar{x}_y^2 + \bar{y}_y^2 = g \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}, \tag{32}$$

also wegen $e, g \leq m_1$:

$$\bar{x}_x^2 + \bar{x}_y^2 + \bar{y}_x^2 + \bar{y}_y^2 \leq 2m_1 \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)}. \tag{33}$$

Jede solche Transformation ist eine quasikonforme Abbildung. Nach einem Satz von L. AHLFORS[9]) sind $\bar{x}(x, y)$ und $\bar{y}(x, y)$ in $T+S$ HÖLDER-stetig mit „universellen" HÖLDER-Konstanten, d.h. HÖLDER-Koeffizient und HÖLDER-Exponent $\mu_1 = \mu_1(m_1)$ hängen nur von m_1 ab. Außerdem ist, um es zu wiederholen, jede dieser Abbildungen in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ gehörig. — Die gleichen Eigenschaften besitzt die inverse Abbildung $x(\bar{x}, \bar{y})$, $y(\bar{x}, \bar{y})$.

II. In der Absicht, die Lösung des gestellten Problems (1), (2) als Fixpunkt einer geeigneten Funktionaloperation in einem noch zu definierenden BANACH-Raum zu gewinnen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir nehmen, zunächst auf beliebige Art, in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^0(\varrho)$ gehörige Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ $(0<\varrho\leq\lambda)$ und setzen abkürzend mit $W = \sqrt{EG-F^2}$: $EW^{-1}\big(x, y; u(x, y), v(x, y)\big) = e(x, y)$. Entsprechend sind die Bezeichnungen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ zu verstehen. e, f, g sind $T+S$ ϱ-HÖLDER-stetige Funktionen. Nun betrachten wir das lineare Randwertproblem[10]) für die gesuchten Funktionen $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$:

$$U_x = -f(x, y) V_x + e(x, y) V_y, \qquad U_y = -g(x, y) V_x + f(x, y) V_y, \tag{34}$$

außerdem die jetzt mit U und V geschriebenen Randbedingungen (2), (2a) bzw. (2), (2b). Mit einer der unter **I** beschriebenen, zu e, f, g gemäß (31) bestimmbaren Abbildungen $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ und den Abkürzungen $\overline{U} = U\big(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})\big)$ usw. geht (34), (2) wegen $\frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} > 0$ in umkehrbarer Weise über in

$$\overline{U}_{\bar{x}} - \overline{V}_{\bar{y}} = 0, \qquad \overline{U}_{\bar{y}} + \overline{V}_{\bar{x}} = 0, \tag{35}$$

$$\overline{U} \cos\bar{\sigma}(\bar{s}) + \overline{V} \sin\bar{\sigma}(\bar{s}) = \bar{h}(\bar{s}) \tag{36}$$

und die zu (2a) bzw. (2b) entsprechenden Bedingungen. Unter $\bar{s}$ verstehen wir die Bogenlänge der Kreisperipherie $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$. Außerdem haben wir $\bar{\sigma}(\bar{s}) = \sigma\big(s(\bar{s})\big)$ gesetzt. Nach dem Hilfssatz 2 besitzt dieses Problem eine eindeutig bestimmte Lösung, welche, weil die Transformation $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ aus

[9]) Siehe z.B. L. NIRENBERG [5], S. 117.

[10]) Nach dem Vorgang von L. NIRENBERG [5], der beim DIRICHLETschen Problem der quasilinearen elliptischen Differentialgleichung

$$A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = 0$$

diese Wendung der SCHAUDERschen Methode mit Erfolg benutzt hat.

$\mathfrak{C}^1(\varrho')$ ist, in $T+S$ (in Abhängigkeit von x, y!) zu $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ gehört $(\varrho'<\varrho)$. Die Zuordnung $u, v \to U, V$ läßt sich somit als Funktionaloperation $(U, V)=\Psi(u, v)$ auffassen. Da jedenfalls $\|\bar{\sigma}\|=\|\sigma\|$ und $\|\bar{h}\|=\|h\|$ gilt[11]), hat man die apriori-Abschätzung

$$\|U, V\| \leq \nu_S \|h\| + \sum_{j=0}^{2n} \nu_j |\varkappa_j| \equiv N. \tag{37}$$

Die Summe über j fällt wie gewöhnlich weg, wenn der Index n negativ ist.

III. Wir müssen nun genauer feststellen, wovon diese Schranken ν_s und ν_j abhängen. Auf Grund des Hilfssatzes 3 bestimmen sie sich im Falle $n=0$ allein durch die mit dem Problem von vornherein gegebene Funktion $\sigma(s)$. Das gleiche gilt folglich auch für die Schranke N.

In den Fällen $n \neq 0$ tritt außerdem noch eine Abhängigkeit von den $\varepsilon, 0$-Normen der beiden Abbildungen $x, y \to \bar{x}, \bar{y}$ und $\bar{x}, \bar{y} \to x, y$ hinzu, wobei ε eine positive, aber sonst beliebig wählbare Zahl ist. Für $n \neq 0$ besitzen wir aber noch die Voraussetzung $E+G \leq M\sqrt{EG-F^2}$ bzw. $e+g \leq M$. Dann können wir die in **I** eingeführte Schranke m_1 jedenfalls gleich M setzen und wissen folgendes: Wie auch die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gewählt werden, stets sind die Abbildungen $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ HÖLDER-stetig mit Konstanten, welche sich allein aus M bestimmen. Wir identifizieren ε mit dem zugehörigen HÖLDER Exponenten $\mu_1(M)$. Dann ist auch in diesen Fällen sicher, daß die Schranke N durch die bekannten Daten des Randwertproblems von vornherein feststeht.

IV. Die in E, F und G eingesetzten Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ werden jetzt nur noch der Menge u, v mit $\|u, v\| \leq N$ entnommen. Dann existiert eine Konstante $m_2=m_2(N)$, welche sich allein durch N bestimmt, und für welche die zugehörigen Funktionen $e(x, y)$ und $g(x, y)$ kleiner als m_2 bleiben. Gemäß **I** folgt daraus die HÖLDER-Stetigkeit der Funktionen $\bar{x}(x, y)$ und $\bar{y}(x, y)$ aus (31), wobei sowohl HÖLDER-Koeffizient als auch HÖLDER-Exponent ihrerseits nur von m_2, d.h. also auch wieder nur von den Daten des Randwertproblems abhängen. *Dieser* Exponent wird jetzt mit ε bezeichnet. Es bedeutet keine Einschränkung, $0<\varepsilon \leq \lambda$ anzunehmen. Wir wählen $\delta \leq \varepsilon$ und setzen $\lambda_1=\delta^4$, $\lambda_2=\frac{1}{2}\lambda_1$. Wiederum nach Hilfssatz 3 können wir auf die Abschätzung

$$\|U, V\|_{\lambda_1', 0} \leq N' \qquad (0 \leq \lambda_1' \leq \lambda_1) \tag{38}$$

schließen, wobei N' von der $\varepsilon, 0$-Norm der Abbildungen $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$, also letzten Endes auch wieder von den gegebenen Daten des Randwertproblems abhängt.

V. Es werde noch einmal zusammengefaßt: Wenn man für u und v in $T+S$ ϱ-HÖLDER-stetige Funktionen nimmt $(0<\varrho \leq \lambda)$, welche die Ungleichung $\|u, v\| \leq N$ erfüllen, so ergeben sich die gemäß (34), (2) zugeordneten Funktionen U, V in $T+S$ sogar als zu $\mathfrak{C}^1(\varrho')$ gehörig $(\varrho'<\varrho)$. Überdies sind sie aber in allen Fällen $n \gtreqless 0$ universell, d.h. mit von u, v unabhängigen

[11]) Normen, welche in der $\bar{x}, \bar{y}$-Ebene zu nehmen sind, haben wir dabei durch $\|\ \|$ bezeichnet.

Konstanten, in $T+S$ λ_1-HÖLDER-stetig. Insbesondere gilt

$$\|U, V\| \leq N, \quad \|U, V\|_{\lambda_2, 0} \leq N', \tag{39}$$

wobei N und N' durch die Daten des Randwertproblems ein für allemal bestimmte Schranken bedeuten.

Die beschriebene Funktionaloperation $(U, V) = \Psi(u, v)$ wird nun über dem BANACH-Raum $\mathfrak{B}$ der in $T+S$ λ_2-HÖLDER-stetigen Funktionenpaare mit der λ_2, 0-Norm als Norm erklärt. Die in $\mathfrak{B}$ konvexe Menge $\|u, v\| \leq N$, $\|u, v\|_{\lambda_2, 0} \leq N'$ wird mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

VI. Die Funktionaloperation ist in $\mathfrak{R}$ — sogar in $\mathfrak{B}$ — stetig.

Beweis. u^0, v^0 sei ein gegebenes Funktionenpaar aus $\mathfrak{B}$, e^0, f^0, g^0 seien die gemäß **II** mit seiner Hilfe definierten Funktionen und $(U^0, V^0) = \Psi(u^0, v^0)$. u^1, v^1 sei ein weiteres Paar aus der λ_2, 0-Umgebung von u^0, v^0, e^1, f^1, g^1 und U^1, V^1 seien die durch dieses entsprechend definierten Funktionen. Die besagte Umgebung werde von vornherein so beschränkt, daß $\|u^1 - u^0, v^1 - v^0\| \leq 1$ gilt. Die Differenzen $U = U^1 - U^0$, $V = V^1 - V^0$ genügen dem folgenden Randwertproblem:

$$\begin{cases} U_x + f^0 V_x - e^0 V_y = -(f^1 - f^0) V_x + (e^1 - e^0) V_y - \\ \qquad\qquad - (f^1 - f^0) V_x^0 + (e^1 - e^0) V_y^0 \equiv r_1(x, y) \\ U_y + g^0 V_x - f^0 V_y = -(g^1 - g^0) V_x + (f^1 - f^0) V_y - \\ \qquad\qquad - (g^1 - g^0) V_x^0 + (f^1 - f^0) V_y^0 \equiv r_2(x, y) \end{cases} \tag{40}$$

und

$$R^\sigma(U, V) = 0, \quad \int_S h_j(s)\, R^\tau(U, V)\, ds = 0 \quad \text{für} \quad n \geq 0, \tag{41a}$$

$$R^\sigma(U, V) = \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \alpha_j h_j(s) \quad \text{für} \quad n < 0. \tag{41b}$$

Mit der zu e^0, f^0, g^0 gehörigen Koordinatentransformation, die wieder mit $\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)$ bezeichnet werde, und den Abkürzungen $\overline{U} = U\big(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})\big)$ usw. erhält man

$$\begin{cases} \overline{U}_{\bar{x}} - \overline{V}_{\bar{y}} = \dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}} \bar{r}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial \bar{x}} \bar{r}_2 \equiv \overline{R}_1(\bar{x}, \bar{y}) \\ \overline{U}_{\bar{y}} + \overline{V}_{\bar{x}} = \dfrac{\partial x}{\partial \bar{y}} \bar{r}_1 + \dfrac{\partial y}{\partial \bar{y}} \bar{r}_2 \equiv \overline{R}_2(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases} \tag{42}$$

und die transformierten Randbedingungen (41).

u^0, v^0 ist ein fest angenommenes Paar aus $\mathfrak{B}$. Dann ist auch die Transformation $x, y \leftrightarrow \bar{x}, \bar{y}$ fest gegeben und in $T+S$ zu $\mathfrak{C}^1(\lambda_2')$ gehörig $(\lambda_2' < \lambda_2)$. Weiter gilt

$$\begin{cases} e^1(x, y) - e^0(x, y) = \{u^1(x, y) - u^0(x, y)\} \int_0^1 (EW^{-1})_u \times \\ \qquad\qquad \times \big(x, y; u^0 + t(u^1 - u^0), v^0 + t(v^1 - v^0)\big)\, dt + \\ \qquad\qquad + \{v^1(x, y) - v^0(x, y)\} \int_0^1 (EW^{-1})_v \times \\ \qquad\qquad \times \big(x, y; u^0 + t(u^1 - u^0), v^0 + t(v^1 - v^0)\big)\, dt \end{cases} \tag{43}$$

usw. Auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen E, F, G und wegen $\|u^1, v^1\| \leq \|u^0, v^0\| + 1$ existieren eine Zahl β $(0 < \beta < \lambda_2')$ und eine Schranke m_3, welche beide von der speziellen Wahl von u^1, v^1 unabhängig sind, so daß

$$\|e^1 - e^0\|_{\beta,0} \leq m_3 \|u^1 - u^0, v^1 - v^0\|_{\beta,0}. \tag{44}$$

Ebenso gilt

$$\|f^1 - f^0\|_{\beta,0}, \qquad \|g^1 - g^0\|_{\beta,0} \leq m_3 \|u^1 - u^0, v^1 - v^0\|_{\beta,0}. \tag{44}$$

Von den Funktionen U^0, V^0 und U^1, V^1, also auch von U, V steht fest, daß sie in $T + S$ zu $\mathfrak{E}^1(\lambda_2')$ gehören. Es handelt sich jetzt darum, eine Abschätzung für ihre β, 1-Norm zu gewinnen. Man hat zunächst

$$\|r_1, r_2\|_{\beta,0} \leq 4 m_3 \cdot \left(\|U, V\|_{\beta,1} + \|U^0, V^0\|_{\beta,1}\right) \cdot \|u^1 - u^0, v^1 - v^0\|_{\beta,0}, \tag{45}$$

somit auch

$$\|\overline{R}_1, \overline{R}_2\|_{\beta,0} \leq m_4 \cdot \left(\|U, V\|_{\beta,1} + \|U^0, V^0\|_{\beta,1}\right) \cdot \|u^1 - u^0, v^1 - v^0\|_{\beta,0} \tag{46}$$

mit einer Schranke m_4, welche jetzt noch von der Transformation $\bar{x}(x, y)$, $\bar{y}(x, y)$, aber somit letzten Endes auch nur von u^0, v^0 abhängt. Nach den im Hilfssatz 2 bewiesenen Aussagen gilt aber weiter eine Ungleichung

$$\|\overline{U}, \overline{V}\|_{\beta,1} \leq \bar{\nu}_T \|\overline{R}_1, \overline{R}_2\|_{\beta,0} \tag{47}$$

und deshalb wegen $\|U, V\|_{\beta,1} \leq \text{const} \cdot \|\overline{U}, \overline{V}\|_{\beta,1}$ endlich auch

$$\|U, V\|_{\beta,1} \leq m_5 \left(\|U, V\|_{\beta,1} + \|U^0, V^0\|_{\beta,1}\right) \cdot \|u^1 - u^0, v^1 - v^0\|_{\lambda_2,0}. \tag{48}$$

m_5 hängt dabei von den Funktionen u^0, v^0, von β und von den Daten des Randwertproblems, nicht dagegen von u^1, v^1 ab. Man erkennt aus (48) sofort, daß man $\|U, V\|_{\beta,1}$ und insbesondere damit auch $\|U, V\|_{\lambda_2,0}$ durch genügend kleine Wahl von $\|u^1 - u^0, v^1 - v^0\|_{\lambda_2,0}$ beliebig klein machen kann. Das war zu beweisen.

VII. Die Funktionaloperation Ψ ist in $\mathfrak{R}$ vollstetig. Das ist klar auf Grund der Definition von $\mathfrak{B}$ und der Tatsache, daß die Bilder U, V gleichmäßig für $u, v \in \mathfrak{R}$ sogar λ_1-HÖLDER-stetig sind $(\lambda_1 = 2\lambda_2)$ und somit eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{R}$ bilden. Darin (und in der eben bewiesenen Stetigkeit) bestehen die Voraussetzungen des SCHAUDERschen Fixpunktsatzes[12]), welcher nunmehr die Existenz eines Paares u, v aus $\mathfrak{B}$ sicherstellt, das in sich übergeführt wird. Die Funktionen u, v sind dann in $T + S$ zu $\mathfrak{E}^1(\lambda_2')$ gehörig, also Lösungen des Randwertproblems (1), (2). Jetzt ergeben sich die durch u, v definierten Funktionen $e(x, y)$, $f(x, y)$ und $g(x, y)$ aber sogar als λ-HÖLDER-stetig. Eine nochmalige Anwendung der vorangegangenen Schlußweisen garantiert somit die λ'-HÖLDER-stetige Differenzierbarkeit in $T + S$ der gefundenen Lösung u, v $(\lambda' < \lambda)$.

VIII. Eindeutigkeitsbeweis. u^1, v^1 und u^2, v^2 seien zwei Lösungen des Randwertproblems. Wieder werde $EW^{-1}\left(x, y; u^1(x, y), v^1(x, y)\right) = e^1(x, y)$

[12]) Vgl. J. SCHAUDER [7].

usw. gesetzt. Die Differenz $u = u^2 - u^1$, $v = v^2 - v^1$ ist Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} u_x + f^1 v_x - e^1 v_y + a u + b v = 0 \\ u_y + g^1 v_x - f^1 v_y + c u + d v = 0 \end{cases} \tag{49}$$

und

$$R^\sigma(u, v) = 0, \quad \int h_j(s)\, R^\tau(u, v)\, ds = 0 \quad \text{für} \quad n \geqq 0, \tag{50a}$$

$$R^\sigma(u, v) = \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} \alpha_j h_j(s) \quad \text{für} \quad n < 0. \tag{50b}$$

Dabei gilt

$$\begin{cases} a(x, y) = v_x^2(x, y) \int_0^1 (FW^{-1})_u \left(x, y; u^1 + t(u^2 - u^1), v^1 + t(v^2 - v^1)\right) dt - \\ \qquad - v_y^2(x, y) \int_0^1 (EW^{-1})_u \left(x, y; u^1 + t(u^2 - u^1), v^1 + t(v^2 - v^1)\right) dt, \end{cases} \tag{51}$$

und die Ausdrücke b, c, d sind entsprechend gebaut und, ebenso wie a, als bekannte Funktionen anzusehen. Mit der zu e^1, f^1, g^1 gehörigen Koordinatentransformation $\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y)$ und den üblichen Abkürzungen $\bar{u} = u\left(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})\right)$ usw. erhält man das System mit CAUCHY-RIEMANNschem Hauptteil:

$$\begin{cases} \bar{u}_{\bar{x}} - \bar{v}_{\bar{y}} + (\bar{a}\, x_{\bar{x}} + \bar{c}\, y_{\bar{x}})\, \bar{u} + (\bar{b}\, x_{\bar{x}} + \bar{d}\, y_{\bar{x}})\, \bar{v} = 0 \\ \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{v}_{\bar{x}} + (\bar{a}\, x_{\bar{y}} + \bar{c}\, y_{\bar{y}})\, \bar{u} + (\bar{b}\, x_{\bar{y}} + \bar{d}\, y_{\bar{y}})\, \bar{v} = 0 \end{cases} \tag{52}$$

und außerdem die transformierten Randbedingungen (50). Die Koeffizienten von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ in (52) und die in die Randbedingungen eingehenden Funktionen sind jedenfalls HÖLDER-stetig. Dann ist aber $\bar{u} = \bar{v} \equiv 0$, d.h. auch $u = v \equiv 0$ die einzige Lösung[13]). Das war zu beweisen.

Bemerkung. Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß man statt des Einheitskreises ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet der Klasse Ah als Grundgebiet hätte nehmen können[14]). — Von den trigonometrischen Funktionen $h_j(s)$ ist hier lediglich die folgende Eigenschaft benutzt worden: Es gibt stets eine Linearkombination der $h_j(s)$, welche in vorgegebenen $2m$ ($m \leqq n$) verschiedenen Randpunkten und sonst nirgends einen Vorzeichenwechsel besitzt. (Jede Linearkombination ohne Vorzeichenwechsel verschwindet nicht identisch.) Jedes System von $2n+1$ ($n \geqq 0$) Funktionen dieser Art würde an Stelle der trigonometrischen Funktionen treten können.

Literatur.

[1] LICHTENSTEIN, L.: Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nicht-analytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, ser. A **1916**, 192—217. — [2] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enc. d. math. Wissensch. IIc 3, 177

[13]) Vgl. I. N. VEKUA [11], § 8.9; JOH. NITSCHE [6].

[14]) Das heißt der Tangentenwinkel seiner Randkurve soll (mit einem Exponenten $> \lambda$) Hölder-stetig sein; vgl. L. LICHTENSTEIN [2], S. 185.

bis 377. — [3] LICHTENSTEIN, L.: Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. IV. Ber. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. Leipzig **82**, 265—344 (1930). — [4] LICHTENSTEIN, L.: Neue Untersuchungen in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischen Typus. Bull. Acad. polon. Sci. A **1931**, 571 bis 598. — [5] NIRENBERG, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. p. appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [6] NITSCHE, JOH.: Eine charakteristische Eigenschaft der Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungssysteme. Arch. d. Math. (im Druck). — [7] SCHAUDER, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2**, 171—180 (1930). — [8] SCHAUDER, J.: Potentialtheoretische Untersuchungen. I. Abhandlung. Math. Z. **33**, 602—640 (1931). — [9] SCHAUDER, J.: Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus. Math. Ann. **106**, 661—721 (1932). — [10] SCHAUDER, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **38**, 257—282 (1934). — [11] VEKUA, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung auf die Theorie der Schalen, 880. Mat. Sbornik (N. S.) **31** (**73**), 217—314 (1952).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität.

(Eingegangen am 5. August 1954.)

PETRESCO, J.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 348—356 (1954)

Sur les commutateurs.

Par
JULIAN PETRESCO.

Il s'agit d'une reconsidération des différentes notions relatives aux commutateurs dans les groupes, d'un point de vue plus général et qui, tout en restant à l'intérieur de la théorie classique, permet des développements systématiques. Nous en déduisons plusieurs relations, dont certaines généralisent les propositions de H. FITTING [4] sur l'existence des noyaux résoluble et nilpotent. Une de ces relations renferme comme cas particulier l'identité bien connue de P. HALL [1].

1. *Sur quelques définitions.* On définit le sous-groupe commutateur K d'un groupe G comme le sous-groupe engendré par les commutateurs $a \circ b = a b a^{-1} b^{-1}$, avec $a \in G$, $b \in G$, ou encore comme le sous-groupe normal minimum tel que $a b \equiv b a \bmod K$.

Si $a_i \in G$, $i < n$, considérons Πa_i et notons $\overset{\omega}{\Pi} a_i$ le produit des a_i dans un ordre ω, éventuellement différent de celui de Πa_i. *La relation: il existe un ensemble fini $\{a_i\}$ d'éléments de G, non nécessairement différents, et un ordre ω, tel que $a = \Pi a_i$, $b = \overset{\omega}{\Pi} a_i$, équivaut à:* $a \equiv b \bmod K$. Celle-là entraîne en effet celle-ci, car $\Pi a_i \equiv \overset{\omega}{\Pi} a_i \bmod K$, et réciproquement, de $a \equiv b \bmod K$, on déduit $a = b \Pi a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$, $b = b \Pi a_i a_i^{-1} b_i b_i^{-1}$. On obtient en particulier la définition suivante de K: *l'ensemble des Πa_i pour lesquels il existe un ordre ω tel que $\overset{\omega}{\Pi} a_i = 1$.*

A et B étant des sous-groupes de G, notons $K(A)$ le sous-groupe commutateur de A, et $A \cup B$ le sous-groupe engendré par A et B, dont les éléments sont de la forme $\Pi a_i b_i$, avec $a_i \in A$, $b_i \in B$.

1.1. *$K(A \cup B)$ est l'ensemble des $\Pi a_i b_i$ avec $\Pi a_i \in K(A)$, $\Pi b_i \in K(B)$.*

Cet ensemble est un sous-groupe, car le produit $\Pi a_i b_i \Pi \alpha_j \beta_j$ $(i < n, j < m)$ de deux de ces éléments est tel que $\Pi a_i \Pi \alpha_j \in K(A)$, $\Pi b_i \Pi \beta_j \in K(B)$, et d'autre part $(\Pi a_i b_i)^{-1} = \Pi b_{n-i}^{-1} a_{n-i}^{-1}$ est tel que $\Pi a_{n-i}^{-1} = (\Pi a_i)^{-1} \in K(A)$, $\Pi b_{n-i}^{-1} \in K(B)$. Un commutateur $\Pi a_i b_i \circ \Pi \alpha_j \beta_j$ de $A \cup B$ est par ailleurs tel que $\Pi a_i \Pi \alpha_j \Pi a_{n-i}^{-1} \Pi \alpha_{m-j}^{-1} \equiv \Pi a_i \Pi a_{n-i}^{-1} \Pi \alpha_j \Pi \alpha_{m-j}^{-1} = 1 \bmod K(A)$, $\Pi b_i \Pi \beta_j \Pi b_{n-i}^{-1} \Pi \beta_{m-j}^{-1} \equiv 1 \bmod K(B)$, donc il appartient à cet ensemble. Réciproquement, on a pour un élément $\Pi a_i b_i$ de celui-ci $\Pi a_i b_i \equiv \Pi a_i \Pi b_i \bmod K(A \cup B)$, et puisque $\Pi a_i \Pi b_i \in K(A)\, K(B) \subseteq K(A \cup B)$, il appartient à $K(A \cup B)$.

Si l'on considère $A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^\nu$, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments de la forme $\Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu$, $a_i^\iota \in A^\iota$, $1 \leq \iota \leq \nu$, $i < n$, on déduit, plus généralement: *$K(A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^\nu)$ est l'ensemble des $\Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu$ avec $\Pi a_i^\iota \in K(A^\iota)$.*

Appelons maintenant *norme* $N(A)$ du sous-groupe A, le sous-groupe normal engendré par A; si $A \subseteqq B$ notons $N_B(A)$ la norme de A dans B.

1.2. $N_{A\cup B}(A)$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i b_i$, *avec* $\Pi b_i = 1$.

On voit comme précédemment que cet ensemble est un sous-groupe. De plus il est normal dans $A \cup B$, car si $a \in A$, $b \in B$, alors $a \cdot \Pi a_i b_i \cdot a^{-1}$ est tel que $\Pi b_i = 1$ et $b \cdot \Pi a_i b_i \cdot b^{-1}$ est tel que $b \cdot \Pi b_i \cdot b^{-1} = bb^{-1} = 1$, de sorte que pour tout $\Pi \alpha_j \beta_j \in A \cup B$, $\Pi \alpha_j \beta_j \Pi a_i b_i (\Pi \alpha_j \beta_j)^{-1} = \Pi \alpha_j \beta_j \Pi a_i b_i \Pi \beta_{m-j}^{-1} \alpha_{m-j}^{-1}$ lui appartient. De l'identité

$$\Pi a_i b_i = \Pi b_1 b_2 \dots b_{i-1} a_i (b_1 b_2 \dots b_{i-1})^{-1} \cdot \Pi b_i$$

il résulte d'autre part que, si $\Pi b_i = 1$, $\Pi a_i b_i \in N_{A\cup B}(A)$, et par conséquent, l'ensemble des $\Pi a_i b_i$ avec $\Pi b_i = 1$, qui contient A, coïncide avec $N_{A\cup B}(A)$.

Puisque $A \cup G = G$, on déduit en particulier que $N(A)$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i g_i$, *avec* $a_i \in A$, $g_i \in G$, $\Pi g_i = 1$.

Notons enfin $A \circ B$, le commutateur des sous-groupes A et B, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les $a \circ b$, avec $a \in A$, $b \in B$. $A \circ B$ *est sous-groupe normal dans* $A \cup B$, car si $\alpha \in A$, $\beta \in B$,

$$\alpha (a \circ b) \alpha^{-1} = (\alpha a) b (\alpha a)^{-1} b^{-1} \cdot b \alpha b^{-1} \alpha^{-1} \in A \circ B$$

$$\beta (a \circ b) \beta^{-1} = \beta a \beta^{-1} a^{-1} \cdot a (\beta b) a^{-1} (\beta b)^{-1} \in A \circ B,$$

et d'autre part $\alpha \cdot \Pi (a_i \circ b_i) \cdot \alpha^{-1} = \Pi \alpha (a_i \circ b_i) \alpha^{-1}$, par exemple. En particulier, $A \circ G$ *est normal dans* G.

1.3. $A \circ B$ *est l'ensemble des* $\Pi a_i b_i$, *avec* $\Pi a_i = \Pi b_i = 1$.

On voit comme précédemment que cet ensemble est un sous-groupe normal dans $A \cup B$, et tout commutateur $a b a^{-1} b^{-1}$, avec $a \in A$, $b \in B$, lui appartient. Réciproquement $ab \equiv ba \bmod A \circ B$, entraîne, puisque $A \circ B$ est normal dans $A \cup B$,

$$\Pi a_i b_i \equiv \Pi a_i \Pi b_i \bmod A \circ B \tag{1}$$

de sorte que si $\Pi a_i = \Pi b_i = 1$, $\Pi a_i b_i \in A \circ B$.

(1) entraîne par ailleurs

$$A \cup B = A (A \circ B) B, \tag{1.4}$$

et si on l'applique à 1.1 et 1.2 respectivement,

$$K(A \cup B) = K(A) \cdot (A \circ B) \cdot K(B), \tag{1.5}$$

$$N_{A\cup B}(A) = A (A \circ B). \tag{1.6}$$

Si d'autre part A', A^* et B', B^* sont des sous-groupes de A et B respectivement,

$$A'(A \circ B) B' \circ A^* (A \circ B) B^* \subseteqq (A' \circ A^*) (A \circ B) (B' \circ B^*), \tag{1.7}$$

car d'après (1), $A'(A \circ B) B'$ coincide avec l'ensemble des $\Pi a_i b_i$, avec $\Pi a_i \in A'$, $\Pi b_i \in B'$, et $ab \equiv ba \bmod A \circ B$, entraîne

$$\Pi a_i b_i \circ \Pi \alpha_j \beta_j \equiv (\Pi a_i \circ \Pi \alpha_j) (\Pi b_i \circ \Pi \beta_j) \bmod A \circ B.$$

2. *Les opérations* $K^i, \overline{K}$. Considérons la chaîne des sous-groupe commutateurs successifs de A, définie par $K^i(A) = K[K^{i-1}(A)]$, $K^1(A) = K(A)$.

2.1. *On a* $K^i(A \cup B) \subseteqq K^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^i(B)$.

Si en effet $K^{i-1}(A \cup B) \subseteqq K^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^{i-1}(B)$, on a en appliquant (1.7), $K^i(A \cup B) = K^{i-1}(A \cup B) \circ K^{i-1}(A \cup B) \subseteqq [K^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^{i-1}(B)] \circ [K^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^{i-1}(B)] \subseteqq [K^{i-1}(A) \circ K^{i-1}(A)]\ (A \circ B)\ [K^{i-1}(B) \circ K^{i-1}(B)] = K^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot K^i(B)$, et 2.1 résulte de (1.5) par récurrence.

Si G est un groupe à condition de chaînes descendantes pour les sous-groupes normaux, il existe un nombre n, que nous appellerons *degré résoluble* de A, tel que $K^{n-1}(A) \neq K^n(A) = K^{n+1}(A) = \cdots$. Si $K^n(A) = 1$, A est appelé *résoluble*. Nous appellerons par ailleurs *anti-résoluble* un sous-groupe A tel que $K(A) = A$.

Si A et B sont anti-résolubles, $A \cup B = K(A) \cup K(B) \subseteqq K(A \cup B)$, et par conséquent, *la réunion de deux sous-groupes anti-résolubles est un sous-groupe anti-résoluble*. $K^n(A)$ est donc le sous-groupe anti-résoluble maximum de A, et nous l'appellerons *noyau anti-résoluble* de A en le notant $\overline{K}(A)$; si $A \subseteqq B$, $\overline{K}(A) \subseteqq \overline{K}(B)$.

2.2. *On a* $\overline{K}(A \cup B) \subseteqq \overline{K}(A) \cdot (A \circ B) \cdot \overline{K}(B)$.

Si m et n sont les degrés résolubles de A et B, ceci résulte de 2.1, pour $i = \max(m, n)$.

2.3. *On a* $K^i(A \cup B) \subseteqq K^i(A) \cdot N_{A \cup B}(B)$.

Ceci résulte également de 2.1, car d'après (1.6), $(A \circ B) \cdot K^i(B) \subseteqq (A \circ B)B = N_{A \cup B}(B)$.

En particulier: *si B est normal, $K^i(AB) \subseteqq K^i(A) \cdot B$; si B est normal et anti-résoluble, $K^i(AB) = K^i(A) \cdot B$.*

2.4. *On a* $\overline{K}(A \cup B) = N_{A \cup B}[\overline{K}(A)] \cdot \overline{K}(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(B)]$.

Soit i le degré résoluble de $A \circ B$. En tenant compte de 2.2, 2.3 et de la relation évidente $N(A \cup B) = N(A)N(B)$, on a succesivement $\overline{K}(A \cup B) = K^i[\overline{K}(A \cup B)] \subseteqq K^i[(A \circ B) \cdot \overline{K}(A)\overline{K}(B)] \subseteqq K^i\{(A \circ B)\,[\overline{K}(A) \cup \overline{K}(B)]\} \subseteqq K^i(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(A) \cup \overline{K}(B)] = \overline{K}(A \circ B) \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(A)] \cdot N_{A \cup B}[\overline{K}(B)]$, tandis que l'inclusion réciproque est évidente.

En particulier:

2.5. *Si A et B sont résolubles,* $\overline{K}(A \cup B) = \overline{K}(A \circ B)$.

2.6. *Si A et B sont normaux,* $\overline{K}(AB) = \overline{K}(A)\overline{K}(B)$.

3. *Les opérations* $O^i, \overline{O}$. Considérons la chaîne centrale descendante relative au sous-groupe A, définie par $O^i(A) = O^{i-1}(A) \circ A$, $O^1(A) = A \circ A$.

3.1. *On a* $O^i(A \cup B) \subseteqq O^i(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^i(B)$.

Si en effet $O^{i-1}(A \cup B) \subseteqq O^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^{i-1}(B)$, on a d'après (1.4) et (1.7), $O^i(A \cup B) = O^{i-1}(A \cup B) \circ (A \cup B) \subseteqq [O^{i-1}(A) \cdot (A \circ B) \cdot O^{i-1}(B)] \circ [A(A \circ B)\,B] \subseteqq [O^{i-1}(A) \circ A]\ (A \circ B)\ [O^{i-1}(B) \circ B] = O^i(A)\ (A \circ B)\ O^i(B)$.

Si G satisfait à la condition des chaînes descendantes, il existe un nombre n, que nous appellerons *degré nilpotent* de A, tel que $O^{n-1}(A) \neq O^n(A) = O^{n+1}(A) = \cdots$. Si $O^n(A) = 1$, A est appelé *nilpotent* (de classe n).

Notons par ailleurs $O_G^i(A) = O_G^{i-1}(A) \circ G$, $O_G^1(A) = A \circ G$. On définit de façon analogue le *degré G-nilpotent n* de A et on dira que A est *G-nilpotent* si $O_G^n(A) = 1$. Si A et B sont normaux

$$(2) \qquad AB \circ G = (A \circ G)(B \circ G)$$

et puisque $A \circ G$ et $B \circ G$ sont également normaux, on déduit par récurrence, $O_G^i(AB) = O_G^i(A)\, O_G^i(B)$; il résulte que *le produit de deux sous-groupes normaux G-nilpotents est G-nilpotent* et l'existence du *noyau G-nilpotent* de G.

Appelons maintenant *G-anti-nilpotent* un sous-groupe A, nécessairement normal, tel que $A \circ G = A$. D'après (2), *le produit de deux sous-groupes G-anti-nilpotents est G-anti-nilpotent.*

Dans le cas du groupe A, on voit dans ces conditions que $O^n(A)$ est le sous-groupe A-anti-nilpotent maximum, que nous appellerons *noyau A-anti-nilpotent* de A en le notant $\overline{O}(A)$. On peut également définir $\overline{O}(A)$ comme l'intersection des sous-groupes normaux A' de A tels que A/A' soit nilpotent[1]). Si $A \subseteqq B$, $\overline{O}(A) \subseteqq \overline{O}(B)$.

3.2. *On a* $\overline{O}(A \cup B) \subseteqq \overline{O}(A) \cdot (A \circ B) \cdot \overline{O}(B)$.

Ceci résulte de 3.1, comme 2.2 de 2.1.

Considérons les sous-groupes C_i, $1 \leq i \leq n$, de G et notons $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i \leq n-1}{\Omega}(C_i) \circ C_n$, $\underset{i=1}{\Omega}(C_i) = C_1$.

3.3. *Si* $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_m}$, *avec* $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$, *sont normaux,* $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteqq \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j})$.

(a) *Si* C_1 *est normal,* $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteqq C_1$; si en effet $\underset{i \leq n-1}{\Omega}(C_i) \subseteqq C_1$, $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i \leq n-1}{\Omega}(C_i) \circ C_n \subseteqq C_1 \circ C_n \subseteqq C_1$.

(b) *Si* C_j, $1 \leq j \leq n$, *est normal,* $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteqq C_j$; on a $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{j \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k)$ où $\Gamma_j = \underset{i \leq j-1}{\Omega}(C_i) \circ C_j \subseteqq C_j$ et si $k > j$, $\Gamma_k = C_k$, donc d'après (a), $\underset{j \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k) \subseteqq \underset{j \leq k \leq n}{\Omega}(C_k) \subseteqq C_j$.

D'après (b), 3.3 est donc vraie pour tout n et pour $m = 1$. Si maintenant $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) \subseteqq \underset{j \leq m-1}{\Omega}(C_{i_j})$, pour tout n, on a $\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i_m \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k)$, où $\Gamma_{i_m} = \underset{i \leq i_m - 1}{\Omega}(C_i) \circ C_{i_m}$ et si $k > i_m$, $\Gamma_k = C_k$. Mais d'après l'hypothèse, $\Gamma_{i_m} \subseteqq \underset{j \leq m-1}{\Omega}(C_{i_j}) \circ C_{i_m} = \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j})$, de sorte que si on note $\Gamma'_{i_m} = \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j})$ et $\Gamma'_k = C_k$ pour $k > i_m$, on a en appliquant (a),

$$\underset{i \leq n}{\Omega}(C_i) = \underset{i_m \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma_k) \subseteqq \underset{i_m \leq k \leq n}{\Omega}(\Gamma'_k) \subseteqq \Gamma'_{i_m} = \underset{j \leq m}{\Omega}(C_{i_j}).$$

En appliquant maintenant la loi de distributivité (2), on montre par récurrence que si A et B sont normaux,

$$(3) \qquad O^i(AB) = \prod_{C_j = A,\, B} \left[\underset{j \leq i}{\Omega}(C_j) \right]$$

où le produit est formé par les sous-groupes (normaux) obtenus en remplaçant dans $\underset{j \leq i}{\Omega}(C_j)$, C_j par A ou B, de toutes les façons possibles.

[1]) H. ZASSENHAUS [2], p. 122.

3.4. *Si A et B sont normaux, $O^{2i}(AB) \subseteq O^i(A)\, O^i(B)$.*

Soit α le nombre des C_j égaux à A et β le nombre des C_j égaux à B, dans $\underset{\leq 2i}{\Omega}(C_j)$. On a $\alpha+\beta=2i$, de sorte que $\max(\alpha,\beta) \geq i$, et d'après 3.3, $\underset{j\leq 2i}{\Omega}(C_j) \subseteq O^\alpha(A) \cap O^\beta(B)$. Il en résulte que soit $\underset{j\leq 2i}{\Omega}(C_j) \subseteq O^i(A)$, soit $\underset{j\leq 2i}{\Omega}(C_j) \subseteq O^i(B)$. Mais alors, en appliquant (3), et puisque $O^i(A)$ et $O^i(B)$ sont normaux, on obtient 3.4. On déduit enfin de celle-ci:

3.5. *Si A et B sont normaux, $\overline{O}(AB) = \overline{O}(A)\, \overline{O}(B)$.*

4. *Sur les formes commutatrices.* Soit $I=\{1, 2, \ldots, \nu\}$ un ensemble fini d'indices et $E=\{A^1, A^2, \ldots, A^\nu\}$ un ensemble de sous-groupes, non nécessairement différents, de G. Considérons un élément quelconque de $E^0 = A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^\nu$, soit $a = \Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu$, avec $a_i^\varkappa \in A^\varkappa$, $\varkappa \in I$, $i<n$. Si I^ι, $\iota \leq \nu$, est un sous-ensemble de ι éléments de I, soit $I^\iota = \{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\iota\}$, nous notons I^ι (a), le produit obtenu en égalant à 1, tout élément $a_i^\varkappa$ de l'expression de a pour lequel $\varkappa \notin I^\iota$, c'est-à-dire que $I^\iota(a) = \Pi a_i^{\varkappa_1} a_i^{\varkappa_2} \ldots a_i^{\varkappa_\iota}$. La notation $I^\iota(a)$ est relative, non pas à l'élément a, mais à un représentation donnée de a dans E^0.

Notons par ailleurs $E^\varkappa$ ou $E^\varkappa(A^1, \ldots, A^\nu)$ l'ensemble des éléments $a \in E^0$, dont il existe une représentation telle que $I^\iota(a)=1$, quels que soient $\iota \leq \varkappa$ et $I^\iota \subseteq I$. On a évidemment $E^{\nu-1} \subseteq \cdots \subseteq E^\varkappa \subseteq \cdots \subseteq E^1 \subseteq E^0$. De plus:

4.1. *$E^\varkappa$ est un sous-groupe normal de E^0.*

Si $\alpha = \Pi \alpha_j^1 \alpha_j^2 \ldots \alpha_j^\nu$, $\alpha^\varkappa \in A^\varkappa$, $\varkappa \in I$, $j<m$, ceci résulte des relations:

$$I^\iota(a\,\alpha) = \Pi a_i^{\varkappa_1} \ldots a_i^{\varkappa_\iota} \Pi \alpha_j^{\varkappa_1} \ldots \alpha_j^{\varkappa_\iota} = I^\iota(a) \cdot I^\iota(\alpha)$$

$$I^\iota(a^{-1}) = \Pi (a_{n-i}^{\varkappa_\iota})^{-1} \ldots (a_{n-i}^{\varkappa_1})^{-1} = (\Pi a_i^{\varkappa_1} \ldots a_i^{\varkappa_\iota})^{-1} = [I^\iota(a)]^{-1}$$

$$I^\iota[\alpha^\varkappa a (\alpha^\varkappa)^{-1}] = \alpha^\varkappa \cdot \Pi a_i^{\varkappa_1} \ldots a_i^{\varkappa_\iota} \cdot (\alpha^\varkappa)^{-1} = \alpha^\varkappa [I^\iota(a)] (\alpha^\varkappa)^{-1}; \quad \varkappa \in I^\iota$$

$$I^\iota[\alpha^\varkappa a (\alpha^\varkappa)^{-1}] = \Pi a_i^{\varkappa_1} \ldots a_i^{\varkappa_\iota} = I^\iota(a); \quad \varkappa \notin I^\iota.$$

Soit maintenant $\Phi(A^1, A^2, \ldots, A^\nu)$ une forme commutatrice de poid ν.

4.2. *On a $\Phi(A^1, A^2, \ldots, A^\nu) \subseteq E^{\nu-1}(A^1, A^2, \ldots, A^\nu)$.*

D'après 1.3 ceci est vrai pour $\nu=2$. Supposons que la relation soit vraie pour tout $\nu' < \nu$. D'après la définition des formes commutatrices

$$\Phi(A^1, \ldots, A^\nu) = \Phi_1(\ldots, A^{\varkappa_1}, \ldots) \circ \Phi_2(\ldots, A^{\varkappa_2}, \ldots)$$

où $\varkappa_1 \in I_1$, $\varkappa_2 \in I_2$, $I_1 \cap I_2 = 0$, $I_1 \cup I_2 = I$. Il s'ensuit que tout élément $\varphi \in \Phi$ est de la forme $\varphi = \Pi \varphi_k^1 \varphi_k^2$, où d'après 1.3, $\Pi \varphi_k^1 = \Pi \varphi_k^2 = 1$, et d'après l'hypothèse, $\varphi_k^1 = \Pi \ldots a_i^{\varkappa_1} \ldots$, avec $I_1'(\varphi_k^1) = 1$, pour tout $I_1' < I_1$, $\varphi_k^2 = \Pi \ldots a_i^{\varkappa_2} \ldots$, avec $I_2'(\varphi_k^2) = 1$, pour tout $I_2' < I_2$. Si $I^\iota < I$,

$$I^\iota(\varphi) = \Pi I^\iota(\varphi_k^1)\, I^\iota(\varphi_k^2) = \Pi (I_1 \cap I^\iota)(\varphi_k^1) \cdot (I_2 \cap I^\iota)(\varphi_k^2)\ ^2).$$

Quatre cas sont à distinguer:

(a) $I_1 \cap I^\iota < I_1$, $I_2 \cap I^\iota < I_2$; on a $(I_1 \cap I^\iota)\ (\varphi_k^1) = (I_2 \cap I^\iota)(\varphi_k^2) = 1$, donc $I^\iota(\varphi) = 1$.

---

2) $(I_1 \cap I^\iota)\ (\varphi_k^1)$ signifie que l'opération $I_1 \cap I^\iota$ est appliquée à φ_k^1.

(b) $I_1 \cap I^\iota = I_1$, $I_2 \cap I^\iota \subset I_2$; on a $(I_1 \cap I^\iota)(\varphi_k^1) = I_1(\varphi_k^1) = \varphi_k^1$, $(I_2 \cap I^\iota)(\varphi_k^2) = 1$, donc $I^\iota(\varphi) = \Pi \varphi_k^1 = 1$.

(c) $I_1 \cap I^\iota \subset I_1$, $I_2 \cap I^\iota = I_2$; $I^\iota(\varphi) = \Pi \varphi_k^2 = 1$.

(d) $I_1 \cap I^\iota = I_1$, $I_2 \cap I^\iota = I_2$; on a $I_1 \subseteqq I^\iota$, $I_2 \subseteqq I^\iota$, donc $I = I_1 \cap I_2 \subseteqq I^\iota$, ce qui est contradictoire.

On conclut que pour la représentation donnée de φ, $I^\iota(\varphi) = 1$, quel que soit $I^\iota \subset I$, donc $\varphi \in E^{\nu-1}$ et en définitive $\Phi \subseteqq E^{\nu-1}$ pour tout ν.

Soit maintenant $\Phi(A^{\lambda_1}, A^{\lambda_2}, \ldots, A^{\lambda_w})$ une forme commutatrice de poid w, l'ensemble $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_w\}$ étant composé d'indices, non nécessairements différents, appartenant à I. Nous dirons que le nombre des classes de L par rapport à l'égalité dans I, est l'*indice* de Φ par rapport à E. Notons $\Phi^\lambda(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w})$ une forme d'indice λ; on a $\lambda \leq w$.

4.3. *On a* $\Phi^\lambda(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w}) \subseteqq E^{\lambda-1}(A^1, \ldots, A^\nu)$.

D'après 4.2, $\Phi^\lambda(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w}) \subseteqq E^{w-1}(A^{\lambda_1}, \ldots, A^{\lambda_w})$; d'autre part un élément $a \in E^{w-1}$ est de la forme $a = \Pi a_i^{\lambda_1} \ldots a_i^{\lambda_w}$, $a_i^{\lambda_v} \in A^{\lambda_v}$, $\lambda_v \in L$, avec $L^v(a) = 1$, pour tout $L^v \subset L$. Notons $L \wedge I^\iota$, l'ensemble des éléments de L égaux à des éléments de I^ι. Si $\iota \leq \lambda - 1$, $L \wedge I^\iota \subset L$, de sorte que $I^\iota(a) = (L \wedge I^\iota)(a) = 1$, donc $a \in E^{\lambda-1}(A^1, \ldots, A^\nu)$.

5. *Agrégats commutateurs.* Nous allons appeler *agrégat commutateur* d'indice $\varkappa$, la réunion[3]) des formes commutatrices Φ^σ d'indice $\sigma > \varkappa$ par rapport à E, que nous noterons $O^\varkappa$ ou $O^\varkappa(A^1, \ldots, A^\nu)$; on a $O^{\nu-1} \subseteqq \cdots \subseteqq O^\varkappa \subseteqq \cdots \subseteqq O^1 \subseteqq O^0 = E^0$.

5.1. *On a* $E^\varkappa = O^\varkappa$, $\varkappa < \nu$.

Nous allons montrer tout d'abord que si $a \in E^\varkappa$, toute représentation $a = \Pi a_i^1 \ldots a_i^\nu$, avec $I^\iota(a) = 1$, quels que soient $\iota \leq \varkappa$, $I^\iota \subseteqq I$, peut être mise sous la forme

$$a = \prod_j \prod_{\sigma > \varkappa} \varphi_j(I^\sigma) \tag{4}$$

où, si $I^\sigma = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\sigma\}$, $\varphi_j(I^\sigma)$ est un produit formé avec les $a_i^{\varkappa_1}, \ldots, a_i^{\varkappa_\sigma}$ de l'expression de a, tel que si $I^{\sigma'} \subset I^\sigma$, $I^{\sigma'}[\varphi_j(I^\sigma)] = 1$, et qui appartient à une forme commutatrice $\Phi_j^\sigma(I^\sigma) \subseteqq O^\sigma$, le produit $\prod_{\sigma > \varkappa}$ étant étendu à tous les $I^\sigma \subseteqq I$, avec $\sigma > \varkappa$.

Si (4) est vraie pour $E^{\varkappa-1}$, une représentation $a = \Pi a_i^1 \ldots a_i^\nu$ avec $I^\iota(a) = 1$, $\iota \leq \varkappa$, de $a \in E^\varkappa \subseteqq E^{\varkappa-1}$ se ramène à la forme $a = \prod_j \prod_{\sigma > \varkappa - 1} \varphi_j(I^\sigma)$, avec $I^{\sigma'}[\varphi_j(I^\sigma)] = 1$, et on a dans ce cas

$$I^\varkappa[\varphi_j(I^\sigma)] = [I^\varkappa \cap I^\sigma][\varphi_j(I^\sigma)] = \begin{cases} 1; & I^\sigma \neq I^\varkappa \\ \varphi_j(I^\varkappa); & I^\sigma = I^\varkappa \end{cases}$$

de sorte que

$$1 = I^\varkappa(a) = \prod_j \prod_{\sigma > \varkappa - 1} I^\varkappa[\varphi_j(I^\sigma)] = \prod_j \varphi_j(I^\varkappa). \tag{5}$$

A partir de l'identité $ab = (a \circ b)\, ba$, on peut maintenant remaner à droite, successivement et dans l'ordre indiqué ci-dessous, tous les $\varphi_j(I^\varkappa)$ de l'expression de a, comme dans la première étape du procédé de collectage (à droite) de

[3]) Dans le treillis des sous-groupes de G.

P. HALL [1], et on a

$$a = \prod_k \prod_{\varrho > \varkappa} \psi_k(I^\varrho) \cdot \prod_\varkappa \prod_j \varphi_j(I^\varkappa) \tag{6}$$

où $\psi_k(I^\varrho) = \Omega_r \varphi_{j_r}(I^{\sigma_r})$, $\sigma_r > \varkappa - 1$, $\bigcup_r I^{\sigma_r} = I^\varrho$, deux ensemble I^{σ_r} au moins étant différants donc $\varrho > \varkappa$. On voit dans ces conditions, que $\psi_k(I^\varrho)$ appartient à une forme commutatrice d'indice $\varrho > \varkappa$, donc $\psi_k(I^\varrho) \in O^\varkappa$. D'autre part si $I^{\varrho'} \subset I^\varrho$, il existe r tel que $I^{\sigma_r} \not\subseteq I^{\varrho'}$, donc tel que $I^{\varrho'} \cap I^{\sigma_r} \subset I^{\sigma_r}$, et par conséquent pour ce r, $[I^{\varrho'} \cap I^{\sigma_r}][\varphi_{j_r}(I^{\sigma_r})] = 1$, d'où on déduit

$$I^{\varrho'}[\psi_k(I^\varrho)] = \Omega_r [I^{\varrho'} \cap I^{\sigma_r}][\varphi_{j_r}(I^{\sigma_r})] = 1.$$

(4) résulte maintenant de (6), si l'on tient compte du fait que (5) entraîne $\prod_\varkappa \prod_j \varphi_j(I^\varkappa) = 1$. Puisque d'autre part (4), est trivialement vraie pour $a \in E^0$, elle est, de ce fait, démontrée par récurrence.

Mais dans (4), $\varphi_j(I^\sigma) \in O^\sigma \subseteq O^\varkappa$, donc $a \in O^\varkappa$. Réciproquement $O^\varkappa \subseteq E^\varkappa$, résulte de 4.1 et 4.3.

Nous allons pouvoir démontrer maintenant la généralisation suivante de (1.4):

5.2. *On a*

$$E^0 = \prod_{\varkappa_1} A^{\varkappa_1} \cdot \prod_{\varkappa_1, \varkappa_2} O^1(A^{\varkappa_2}, A^{\varkappa_1}) \dots \prod_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda} O^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1}, \dots, A^{\varkappa_\lambda}) \dots O^{\nu-1}.$$

Choisissons tout d'abord un ordre fixe, mais autrement arbitraire, pour les produits $\prod_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda}$ et soit $a = \prod a_i^1 \dots a_i^\nu \in E^0$. Notons $I_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda} = \{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda\}$ et posons $c(\varkappa_1) = I_{\varkappa_1}(a)$, $p_1 = \prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1)$. Les relations

$$c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda) = I_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1} a)$$

$$p_\lambda = p_{\lambda-1} \cdot \prod_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda} c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)$$

définissent $c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_\lambda)$ et p_λ pour tout $\lambda < \nu$. On a évidemment

$$c(\varkappa_1) \in A^{\varkappa_1}$$

et d'autre part

$$I_\varkappa(p_1^{-1} a) = 1, \quad \varkappa \in I$$

car $I_\varkappa(p_1^{-1} a) = \overset{\omega}{\prod_{\varkappa_1}} \{I_\varkappa[c(\varkappa_1)]\}^{-1} \cdot I_\varkappa(a) = \overset{\omega}{\prod_{\varkappa_1}} \{I_\varkappa[I_{\varkappa_1}(a)]\}^{-1} \cdot I_\varkappa(a)$, et

$$I_\varkappa[I_{\varkappa_1}(a)] = \begin{cases} 1; & \varkappa_1 \neq \varkappa \\ I_\varkappa(a); & \varkappa_1 = \varkappa \end{cases}$$

de sorte que $I_\varkappa(p_1^{-1} a) = [I_\varkappa(a)]^{-1} \cdot I_\varkappa(a) = 1$, pour tout $\varkappa \in I$.

Supposons maintenant que

$$I'[c(\varkappa_1, \dots, \varkappa_{\lambda-1}) = 1, \quad I' \subset I_{\varkappa_1, \dots, \varkappa_{\lambda-1}} \tag{7'}$$

$$I^\iota(p_{\lambda-1}^{-1} a) = 1, \quad \iota \leq \lambda - 1. \tag{8'}$$

Si $I' \in I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}$, on déduit de (8')

$$I'[c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = I'[I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1} a)] = I'(p_{\lambda-1}^{-1} a) = 1. \tag{7}$$

On a cependant

$$p_\lambda^{-1} a = \overset{\omega}{\underset{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}{\Pi}} [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)]^{-1} \cdot p_{\lambda-1}^{-1} a.$$

Mais si $\iota < \lambda$, $I^\iota \cap I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \subset I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}$, et d'après (7)

$$I^\iota [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = [I^\iota \cap I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda}] [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = 1$$

de sorte qu'en tenant compte de (8')

$$I^\iota (p_\lambda^{-1} a) = 1, \quad \iota < \lambda.$$

D'autre part

$$I^\lambda [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)] = \begin{cases} 1; & I^\lambda \neq I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \\ c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda); & I^\lambda = I_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda} \end{cases}$$

et part conséquent

$$I^\lambda (p_\lambda^{-1} a) = [c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda)]^{-1} \cdot I^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a) = [I^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a)]^{-1} \cdot I^\lambda (p_{\lambda-1}^{-1} a) = 1.$$

Finalement

$$I^\iota (p_\lambda^{-1} a) = 1, \quad \iota \leq \lambda \tag{8}$$

de sorte que (7) et (8) sont valables pour tout $\lambda < \nu$.

De (8) on déduit maintenant $a \equiv p_\lambda \bmod E^\lambda$, donc d'après 5.1

$$a \equiv p_\lambda \bmod O^\lambda, \quad \lambda < \nu$$

c'est-à-dire qu'en particulier

$$a = p_{\nu-1} \cdot c(1, \ldots, \nu) = \underset{\varkappa_1}{\Pi} c(\varkappa_1) \cdot \underset{\varkappa_1, \varkappa_2}{\Pi} c(\varkappa_1, \varkappa_2) \ldots c(1, \ldots, \nu)$$

où, d'après (7) et 5.1, $c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) \in E^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1}, \ldots, A^{\varkappa_\lambda}) = O^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1}, \ldots, A^{\varkappa_\lambda})$, $1 \leq \lambda < \nu$, $c(1, \ldots, \nu) \in E^{\nu-1} = O^{\nu-1}$, et en définitive 5.2.

5.3. *La suite définie par*

$$c_\lambda = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \ldots c_2^{-\binom{\lambda}{2}} b^{-\lambda} a^{-\lambda} (ab)^\lambda, \quad c_2 = b^{-2} a^{-2} (ab)^2, \quad c_1 = 1$$

est telle que $c_\lambda \in O^{\lambda-1}\{a, b\}$.

Nous allons montrer que si on prend, dans la démonstration de 5.2, $A^\varkappa = \{a, b\}$, $a_1^\varkappa = b^{-1}$, $a_2^\varkappa = a^{-1}$, $a_3^\varkappa = ab$, $1 \leq \varkappa \leq \nu$, on obtient en considérant l'élément

$$\alpha = \Pi a_i^1 a_i^2 \ldots a_i^\nu = b^{-\nu} a^{-\nu} (ab)^\nu, \quad i = 1, 2, 3$$

de $E^0 = \{a, b\}$, l'égalité suivante:

$$c(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda) = c_\lambda, \tag{9}$$

quel que soit le sous-ensemble $\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\lambda\}$ de λ éléments de I.

Supposons en effet que l'égalité ait lieu pour tout $\lambda' < \lambda$. D'après l'hypothèse et la relation (7) de 5.2,

$$I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}[c(\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'})] = \begin{cases} 1; & I_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'}} \nsubseteq I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda} \\ c_{\lambda'}; & I_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'}} \subseteq I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}. \end{cases}$$

La seconde alternative se vérifie pour $\binom{\lambda}{\lambda'}$ sous-ensembles $I_{\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_{\lambda'}}$ de λ' éléments de I, de sorte que

$$I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}) = I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}\Big[\prod_{\varkappa_1} c(\varkappa_1) \ldots \prod_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{\lambda-1}} c(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{\lambda-1})\Big]$$
$$= c_2^{\binom{\lambda}{2}} c_3^{\binom{\lambda}{3}} \ldots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}}$$

et en définitive, puisque $I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}(\alpha) = b^{-\lambda} a^{-\lambda}(ab)^\lambda$,

$$c(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda) = I_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda}(p_{\lambda-1}^{-1}\alpha) = c_{\lambda-1}^{-\binom{\lambda}{\lambda-1}} \ldots c_2^{-\binom{\lambda}{2}} b^{-\lambda} a^{-\lambda}(ab)^\lambda = c_\varkappa.$$

On déduit que (9) est valable pour tout $\lambda < \nu$. Mais au cours de la démonstration de 5.2, $c(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_\lambda) \in O^{\lambda-1}(A^{\varkappa_1},\ldots,A^{\varkappa_\lambda}) = O^{\lambda-1}\{a,b\}$, de sorte que

$$c_\lambda \in O^{\lambda-1}\{a,b\},$$

pour tout $\lambda < \nu$, et puisque la relation a lieu pour tout ν elle est valable pour tout λ. On en déduit l'identité de P. HALL [1]:

$$(ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda c_2^{\binom{\lambda}{2}} \ldots c_{\lambda-1}^{\binom{\lambda}{\lambda-1}} c_\lambda$$

avec $c_\varkappa \in O^{\varkappa-1}\{a,b\}$, $2 \leq \varkappa \leq \lambda$, sous la forme donnée par W. MAGNUS [3] et généralisée par M. LAZARD [5].

Références.

[1] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power orders. Proc. Lond. Math. Soc., II **36**, 29—95 (1933). — [2] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig 1937. — [3] MAGNUS, W.: Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. J. reine angew. Math. **177**, 105—115 (1937). — [4] FITTING, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. **48**, 77—141 (1938). — [5] LAZARD, M.: Sur certaines suites d'éléments dans les groupes libres et leurs extensions. C. R. Ac. Sci. Fr. **236**, 36—38 (1953).

8 rue Pascal, Montrouge (Seine), France.

(Eingegangen am 20. September 1954.)

SCHÖNEBORN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 357—373 (1955)

Über eine Klasse von topologischen Gruppen.

Von
HEINZ SCHÖNEBORN.

Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen sind diejenigen (nicht notwendig kommutativen) topologischen Gruppen, deren Topologie durch ein aus *Normalteilern* bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen des neutralen Elementes definiert wird *(Normalteilertopologie; normalteilertopologische Gruppen)*. Derartige Gruppen wurden im abelschen Falle bereits 1925 von H. PRÜFER [*9*] im Rahmen seiner Untersuchungen über abelsche Gruppen betrachtet. Später zeigte W. KRULL [*6*], daß die Galoisgruppen unendlicher algebraischer Körpererweiterungen kompakte Gruppen mit einer Normalteilertopologie sind (vgl. hierzu z. B. auch KAWADA [*5*]) und untersuchte die Prüferschen abelschen topologischen Gruppen unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen („Separabilität", lineare Kompaktheit) [*7*], wobei sich außerdem enge Beziehungen zu den Resultaten und Problemen der PONTRJAGINschen Dualitätstheorie ergaben. — In neuerer Zeit wurden die auf PRÜFER und KRULL zurückgehenden Begriffsbildungen und Resultate für den Fall *abelscher* Gruppen in verschiedener Richtung verallgemeinert und ausgebaut unter anderem von VILENKIN [*12*], ZELINSKY [*13*], KAPLANSKY [*4*] und dem Verfasser [*10*] (vgl. auch eine demnächst in den Hamburger Abhandlungen erscheinende Arbeit über „Prüfersche Gruppen" von H. LEPTIN), während nichtkommutative Gruppen mit einer Normalteilertopologie von M. HALL jr. [*3*] unter spezielleren Gesichtspunkten betrachtet worden sind.

Das Ziel der vorliegenden Note ist die Untersuchung einiger Fragen aus der Theorie der nichtkommutativen Gruppen mit einer Normalteilertopologie unter Gesichtspunkten, wie sie für den Fall abelscher Gruppen vom Verfasser in einer früheren Arbeit [*10*] entwickelt worden sind. Dabei zeigt sich insbesondere, daß bei den topologischen Gruppen mit einer Normalteilertopologie — ebenso wie im abelschen Falle — außergewöhnlich enge Beziehungen zwischen der topologischen und der gruppentheoretischen Struktur bestehen in dem Sinne, daß einerseits den meisten der auftretenden topologischen Eigenschaften eine rein gruppentheoretische Bedeutung zukommt und andererseits sich viele Begriffsbildungen und Fragestellungen der reinen Gruppentheorie auf den Fall der Gruppen mit Normalteilertopologie in zwangloser und natürlicher Weise übertragen lassen. Dadurch wird ein gewisses Interesse auch der reinen Gruppentheorie an der Untersuchung der topologischen Gruppen mit Normalteilertopologie begründet[1]), während umgekehrt viele sonst nur mit

[1]) Vgl. hierzu die oben zitierte Arbeit von HALL [*3*], in welcher ein Satz von MAGNUS über die höheren Kommutatorgruppen gewöhnlicher freier Gruppen mit Hilfsmitteln der Theorie der normalteilertopologischen Gruppen bewiesen wird.

tiefliegenden topologischen Betrachtungen angreifbare Problemstellungen aus der allgemeinen Theorie der topologischen Gruppen im vorliegenden Falle eine besonders durchsichtige und rein gruppentheoretisch sinnvolle Form annehmen[2]).

Inhaltsübersicht. In Nr. **1** der vorliegenden Arbeit werden die später benötigten Grundbegriffe und Eigenschaften resümiert. Nr. **2** enthält Untersuchungen über topologische Eigenschaften der natürlichen Abbildungen normalteilertopologischer Gruppen auf Restklassengruppen und Nebenscharenräume. In Nr. **3** werden einige bekannte Begriffsbildungen der Gruppentheorie, insbesondere die Begriffe der p-Gruppe und der p-Sylowgruppe in geeigneter Form auf unseren Fall übertragen und eine Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes bewiesen. Der für das folgende grundlegende Begriff der linearen Kompaktheit wird in Nr. **4** definiert und auf seine wichtigsten Eigenschaften hin untersucht. Insbesondere ergibt sich, daß die Eigenschaft der linearen Kompaktheit einer normalteilertopologischen Gruppe im wesentlichen äquivalent ist zur linearen Kompaktheit der *diskreten* Restklassengruppen nach den die Topologie der Gruppe definierenden Umgebungsnormalteilern. Die sich daraus ergebende Frage nach einer gruppentheoretischen Kennzeichnung der Umgebungsnormalteiler einer linear-kompakten Gruppe führt zunächst auf den in Nr. **5** behandelten Problemkreis: Aus der Theorie der normalteilertopologischen *abelschen* Gruppen ist bekannt ([*10*] Satz 15), daß die Umgebungsnormalteiler N_ν einer abelschen linear-kompakten Gruppe die folgenden einander äquivalenten Eigenschaften besitzen: 1. Ist N_ν Durchschnitt eines Systems von Obergruppen, so gibt es unter diesen bereits endlich viele, deren Durchschnitt N_ν ist. 2. Die Restklassengruppen der Gesamtgruppe nach den N_ν genügen der Minimalbedingung für Untergruppen. Im Falle nichtabelscher Gruppen führt die Übertragung der ersten der obigen Eigenschaften zu dem Begriff des G-Normalteilers, die der zweiten zu dem des großen Normalteilers und während die Äquivalenz beider im abelschen Falle leicht zu beweisen ist, stellt sich für nichtabelsche Gruppen die (rein gruppentheoretische) Frage, ob jeder G-Normalteiler ein großer Normalteiler ist. Als Beitrag für die Beantwortung dieser — auch an sich interessanten — Frage werden in Nr. **5** Bedingungen für eine bejahende Antwort gegeben. Der für abelsche Gruppen bewiesene Satz, daß die obigen Eigenschaften 1. bzw. 2. der Umgebungsnormalteiler einer Gruppe für ihre lineare Kompaktheit im wesentlichen charakteristisch sind, wird in Nr. **6** mit Hilfe eines Satzes von ČERNIKOV auf (in dem hier definierten verallgemeinerten Sinne) lokal auflösbare Gruppen verallgemeinert. Ebenso wird ein Resultat über die Darstellung linear-kompakter normalteilertopologischer spezieller Gruppen als topologisches direktes Produkt von p-Sylowgruppen hergeleitet.

1. Im folgenden werden durchwegs (nicht notwendig kommutative) additiv geschriebene topologische Gruppen A betrachtet, deren Topologie durch ein aus Normalteilern N_ν von A mit $\bigcap N_\nu = 0$ bestehendes System von offenen

[2]) Siehe z. B. die von KAPLANSKI [*4*] und vom Verfasser [*10*] durchgeführte Untersuchung zur PONTRJAGINschen Dualitätstheorie.

Nullumgebungen definiert wird („*Normalteilertopologie*"). Weiterhin sind unter „Gruppen" stets Gruppen der genannten Art zu verstehen[3]).

Eine (nicht notwendig invariante) Untergruppe B der Gruppe A ist genau dann offen, wenn sie einen offenen A-Normalteiler N_ν enthält und genau dann abgeschlossen, wenn sie als Durchschnitt von offenen Untergruppen darstellbar ist, d.h. wenn $B = \bigcap A_\beta$, wo A_β alle offenen Obergruppen von B in A durchläuft. Ist $B = N$ ein (in A) abgeschlossener *Normalteiler*, dann ist N bereits Durchschnitt aller N umfassenden offenen *Normalteiler*. Insbesondere ist also jede offene Untergruppe abgeschlossen. Ist B eine Untergruppe von A, so bilden die B-Normalteiler[4]) $B \cap N_\nu$ wo N_ν die offenen Normalteiler von A durchläuft, ein vollständiges System von Nullumgebungen für die durch die Topologie von A induzierte Topologie von B. Ist ferner B eine *abgeschlossene* Untergruppe von A, $[A/B]^{(l)}$[5]) die Menge der (natürlich gleichfalls in A abgeschlossenen) Linksnebenscharen von B in A und durchläuft wieder N_ν die offenen Normalteiler von A, so bilden die Mengen $[(N_\nu + B)/B]^{(l)}$ ein vollständiges System von Nullumgebungen für die durch die Topologie von A induzierte Topologie von $[A/B]^{(l)}$. Ist insbesondere B ein abgeschlossener *Normalteiler* von A, so werde die nach obiger Vorschrift topologisierte Restklassengruppe nach B wie üblich durch A/B bezeichnet.

Eine Menge $\mathfrak{B}$ von Linksnebenscharen $B^{(l)} \subseteq A$ nach *abgeschlossenen* Untergruppen von A nennen wir (in für uns zweckmäßiger Abänderung der sonst üblichen Terminologie) eine *Filterbasis* (in A), wenn sie mit je endlich vielen $B^{(l)}$ auch deren Durchschnitt enthält. Enthält $\mathfrak{B}$ darüber hinaus mit jedem $B^{(l)}$ auch alle $B^{(l)}$ enthaltenden Linksnebenscharen (in A) nach abgeschlossenen Untergruppen von A, dann heißt $\mathfrak{B}$ ein *Filter*. Zu jeder Filterbasis $\mathfrak{B}$ gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten $\mathfrak{B}$ enthaltenden Filter $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$, welcher aus allen abgeschlossenen Linksnebenscharen in A besteht, die eine Linksnebenschar aus $\mathfrak{B}$ enthalten. Wir bezeichnen $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$ als den „zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Filter", $\mathfrak{B}$ als eine „Filterbasis von $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$". Eine aus Nebenscharen nach *Normalteilern* bestehende Filterbasis heißt eine *Normalfilterbasis*, ein Filter der eine Normalfilterbasis besitzt ein *Normalfilter*. Ist allgemeiner $\mathfrak{E}$ ein System von abgeschlossenen Linksnebenscharen in A, die zu je endlich vielen einen nichtleeren Durchschnitt haben, so sind diese endlichen Durchschnitte offenbar wieder abgeschlossene Linksnebenscharen und durch ihre Hinzunahme zu $\mathfrak{E}$ entsteht aus $\mathfrak{E}$ eine Filterbasis $\mathfrak{B}$. Der zu $\mathfrak{B}$ gehörige Filter $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$ wird dann als „der von

[3]) Wegen der in dieser Nummer resümierten Grundeigenschaften der Gruppen mit einer Normalteilertopologie vgl. etwa HALL [3], für den Fall abelscher Gruppen auch SCHÖNEBORN [10]. Eine Darstellung unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen findet man bei HÄMISCH [2]. Für die verwendeten topologischen Begriffbildungen und Sätze s. BOURBAKI [1].

[4]) Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir statt „Normalteiler der Gruppe A", „Element der Gruppe A" und dergleichen gelegentlich auch kurz „A-Normalteiler", „A-Element" usw.

[5]) Wo einseitige Nebenscharen auftreten, beschränken wir uns auf die Betrachtung von *Links*nebenscharen und deuten dies gelegentlich durch den den betreffenden Symbolen beigefügten Index (l) an.

$\mathfrak{E}$ erzeugte Filter" bezeichnet. Die Menge aller offenen Untergruppen der Gruppe A bildet offenbar einen Normalfilter $\mathfrak{F}_0$, den *„charakteristischen Filter"* von A. — A ist genau dann diskret, wenn $(0) \in \mathfrak{F}_0$. Der Filter $\mathfrak{F}^{(1)}$ heißt *gröber* als der Filter $\mathfrak{F}^{(2)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$ *feiner* als $\mathfrak{F}^{(1)}$, wenn $\mathfrak{F}^{(1)} \prec \mathfrak{F}^{(2)}$. Sind $\tau^{(1)}$ und $\tau^{(2)}$ zwei in derselben abstrakten Gruppe A definierte Topologien mit den charakteristischen Filtern $\mathfrak{F}_0^{(1)}$ und $\mathfrak{F}_0^{(2)}$, dann soll $\tau^{(1)}$ gröber als $\tau^{(2)}$, $\tau^{(2)}$ feiner als $\tau^{(1)}$ genannt werden, wenn $\mathfrak{F}_0^{(1)}$ gröber als $\mathfrak{F}_0^{(2)}$ ist. — Unter dem *Durchschnitt eines Filters* $\mathfrak{F}$ schließlich verstehen wir den Durchschnitt aller zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Nebenscharen.

Ein CAUCHY-*Filter* in A ist ein Filter, der zu jeder offenen Untergruppe von A eine Linksnebenschar enthält. Die Gruppe A ist *vollständig*, wenn jeder CAUCHY-Filter in A einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Dafür reicht bereits hin, daß jeder aus *offenen* Linksnebenscharen bestehende CAUCHY-Filter einen nichtleeren Durchschnitt hat. — Jede Gruppe A mit einer Normalteilertopologie läßt sich in eine im wesentlichen eindeutig bestimmte vollständige Gruppe $\hat{A}$, die *„vollständige Hülle"* von A, einbetten, deren charakteristischer Filter aus den vollständigen Hüllen $\hat{A}_\alpha$ der offenen Untergruppen A_α von A besteht. Ist insbesondere N_ν ein offener Normalteiler von A, $\hat{N}_\nu$ der entsprechende durch Abschließung in $\hat{A}$ aus N_ν hervorgehende offene Normalteiler von $\hat{A}$, *so sind die* (diskreten!) *Restklassengruppen* $\hat{A}/\hat{N}_\nu$ *und* A/N_ν *isomorph.* Denn die (sämtlich diskreten!) Gruppen $(A+\hat{N}_\nu)/\hat{N}_\nu$ und $A/(\hat{N}_\nu \cap A) = A/N_\nu$ sind isomorph und $A+\hat{N}_\nu$[6]) ist als Obergruppe von $\hat{N}_\nu$ offen, also abgeschlossen in $\hat{A}$, woraus sofort $A+\hat{N}_\nu = \hat{A}$ und damit die Behauptung folgt.

Die Gruppe A ist genau dann kompakt, wenn sie erstens vollständig ist und wenn zweitens alle offenen Normalteiler (und damit also alle offenen Untergruppen) von endlichem Index in A sind.

Sind $A^{(\alpha)}$ irgendwelche Gruppen, so bedeutet $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ die *„(direkte)* TYCHONOFF-*Summe"*, d.i. die übliche (hier additiv geschriebene) aus allen (gegebenenfalls unendlichen) Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende topologische Produktgruppe der $A^{(\alpha)}$. Im Falle endlich vieler $A^{(\alpha)}$ schreiben wir statt $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ auch einfach $A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)}$. Bilden die N_ν ein den charakteristischen Filter von A erzeugendes System von offenen Normalteilern und ist $A^{(\nu)} = A/N_\nu$, dann gibt es nach einem bekannten Satz eine Abbildung von A in $\sum^T \oplus A^{(\nu)}$, welche sowohl ein gruppentheoretischer Isomorphismus als auch ein topologischer Homöomorphismus, also ein „topologischer Isomorphismus" ist (s. nächste Nummer). Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ und werden die Elemente von $\mathfrak{M}$ in der Form $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ dargestellt, so bilden (für festes α) die in diesen Darstellungen auftretenden Komponenten $a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)}$ in ihrer Gesamtheit die *„Projektion"* von $\mathfrak{M}$ in $A^{(\alpha)}$.

---

[6]) Das Zeichen $+$ bedeutet die übliche Komplexaddition. Sind B_1 und B_2 vertauschbare Untergruppen von A, so ist $B_1 + B_2$ natürlich die gewöhnliche Vereinigungsgruppe von B_1 und B_2.

2. Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einem anderen nennen wir *offen*, wenn sie offene Mengen in offenen Mengen überführt. Unter einem *topologischen Homomorphismus (Isomorphismus)* einer Gruppe A auf eine Gruppe A' verstehen wir einen stetigen und offenen Homomorphismus (Isomorphismus). Die homomorphe Abbildung φ von A auf $A' = \varphi(A)$ ist genau dann ein topologischer Homomorphismus, wenn der (aus den in die Null von A' abgebildeten Elementen von A bestehende) „Kern" N von φ abgeschlossen in A und die zugehörige Abbildung der Restklassengruppe A/N auf $\varphi(A) = A'$ ein topologischer Isomorphismus ist. Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $[A/B]^{(l)}$ wieder der Raum der Linksnebenscharen von B in A und φ die natürliche Abbildung von A auf $[A/B]^{(l)}$, so ist φ stetig und offen. Eine Abbildung der Gruppe A auf einen topologischen Raum R heißt *abgeschlossen*, wenn sie abgeschlossene *Untergruppen* von A in abgeschlossene Untermengen von R überführt[7]).

Wir sagen, die *Gruppe A besitze die Eigenschaft* (A), wenn gilt

(A) Für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteqq A$ ist die natürliche Abbildung von A auf $[A/B]^{(l)}$ abgeschlossen.

(2.1) *Besitzt die Gruppe A die Eigenschaft (A) und sind B und B' miteinander vertauschbare abgeschlossene Untergruppen von A, dann ist die gewöhnliche Vereinigungsgruppe $B + B'$ von B und B' abgeschlossen in A.*

Denn bei der natürlichen Abbildung φ von A auf den Linksnebenscharenraum $[A/B]^{(l)}$ geht B' in eine abgeschlossene Teilmenge $\overline{B}'$ von $[A/B]^{(l)}$ über. Das vollständige Urbild von $\overline{B}'$ in A vermöge φ ist aber $B + B'$ und wegen der Stetigkeit von φ ist $B + B'$ abgeschlossen.

(2.2) *Ist N ein abgeschlossener Normalteiler, B eine abgeschlossene Untergruppe der die Eigenschaft (A) besitzenden Gruppe A, dann ist der natürliche Isomorphismus von $B/(B \cap N)$ auf $(B+N)/N$ (in dieser Richtung!) stetig und abgeschlossen.*

Beweis. Wegen (2.1) können wir $A = B + N$ voraussetzen. φ sei die natürliche Abbildung von A auf $\bar{A} = A/N$, φ_B die dadurch induzierte Abbildung von B auf $\bar{A}$, $\overline{\varphi}_B$ die von φ_B induzierte natürliche Abbildung von $B/(B \cap N) = B^*$ auf $\bar{A}$. φ ist ein topologischer Homomorphismus, φ_B daher jedenfalls ein stetiger Homomorphismus und $\overline{\varphi}_B$ ein stetiger Isomorphismus auf $\bar{A}$. Sei $B^{*\prime}$ eine abgeschlossene Untergruppe von B^*. $B^{*\prime}$ entspricht in B eine abgeschlossene

[7]) Man beachte, daß ein in unserem Sinne abgeschlossener Homomorphismus nicht notwendig beliebige abgeschlossene Unter*mengen* in abgeschlossene Untermengen überführt, auch dann nicht, wenn er topologisch ist. Sei z. B. p eine Primzahl, Z_1 eine diskrete Torsionsgruppe vom Typ p^∞, so daß Z_1 ein unendliches Erzeugendensystem $a_1, a_2, \ldots$ mit den Relationen $p \cdot a_1 = 0$, $p \cdot a_{i+1} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ besitzt. Ferner sei Z_2 die topologische Additionsgruppe der ganzen p-adischen Zahlen mit dem erzeugenden Element b, $A = Z_1 \oplus Z_2$ die topologische direkte Summe von Z_1 und Z_2, M die Menge der Elemente $a_1 + b$, $a_2 + p \cdot b$, $a_3 + p^2 \cdot b$, ... Wie leicht zu sehen, besitzt M keinen Häufungspunkt in A und ist mithin abgeschlossen. Aber die Bildmenge $\overline{M}$ von M in $\bar{A} = A/Z_1$ ist die gegen Null konvergente und wegen $\overline{0} \notin \overline{M}$ nicht abgeschlossene Folge $\overline{b}$, $p \cdot \overline{b}$, $p^2 \cdot \overline{b}$, ... Hingegen ist das Bild jeder abgeschlossenen *Untergruppe* von A in $\bar{A}$ offenbar abgeschlossen.

Untergruppe $B' \supseteq B \cap N$ und diese geht bei φ in die wegen (A) abgeschlossene Untergruppe $\overline{B}' = \varphi(B') = \varphi_B(B') = \overline{\varphi}_B(B^{*\prime})$ über, woraus die Behauptung folgt.

Sei nun wieder B eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe A und φ die natürliche Abbildung von A auf die Menge $L^{(B)}$ der Linksnebenscharen nach B. $L^{(B)}$ kann in bekannter Weise topologisiert werden durch Einführung eines vollständigen Systems von Umgebungen $L_\lambda^{(B)}$ der Nullklasse $\overline{0} \in L^{(B)}$ und vermöge der Festsetzung, daß für $\overline{a} \in L^{(B)}$ die Menge der $\overline{a} + L_\lambda^{(B)}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von $\overline{a}$ bilden soll, wo $\overline{a}$ und die Elemente der $L_\lambda^{(B)}$ als Linksnebenscharen nach B aus A aufzufassen sind und die Summenbildung $\overline{a} + L_\lambda^{(B)}$ im Sinne der üblichen Komplexrechnung zu verstehen ist. Eine solche Topologie des „homogenen Raumes" $L^{(B)}$ soll als *„zulässig"* bezeichnet werden, wenn sie durch ein aus natürlichen Bildern $\varphi(A_\beta)$ offener Untergruppen A_β von A mit $\bigcap A_\beta = B$ bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen der $\overline{0}$ definiert werden kann. Offenbar ist dann die natürliche Abbildung φ von A auf $L^{(B)}$ stetig. Dann und nur dann wenn φ außerdem offen ist, ist $L^{(B)}$ mit $[A/B]^{(l)}$ identisch, d.h. die Topologie von $[A/B]^{(l)}$ ist die feinste für $L^{(B)}$ zulässige Topologie. Wir sagen, die Gruppe *A besitze die Eigenschaft* (O), wenn für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteq A$ der Nebenscharenraum $L^{(B)}$ nur *eine* zulässige Topologie (also nur die von $[A/B]^{(l)}$) besitzt, oder, anders ausgedrückt, wenn gilt:

(O) *Für jede abgeschlossene Untergruppe B der Gruppe A ist die natürliche Abbildung φ von A auf den zulässig topologisierten Nebenscharenraum $L^{(B)}$ offen.*

Die Gruppen mit der Eigenschaft (O) lassen sich wieder rein gruppentheoretisch charakterisieren, denn es gilt

(2.3) *Ist A eine Gruppe mit dem charakteristischen Filter $\mathfrak{F}_0$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *A besitzt die Eigenschaft (O).*

b) *Verschiedene Teilfilter von $\mathfrak{F}_0$ haben verschiedene Durchschnitte.*

Beweis. Aus a) folgt b): Zwei verschiedene Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{F}_0$ von A mögen gleichen Durchschnitt B haben, wo also B eine abgeschlossene Untergruppe von A ist. Dann ist wenigstens einer der beiden Filter — er möge $\mathfrak{F}'_B$ genannt werden — verschieden von dem aus *allen* offenen Untergruppen $A_\beta \supseteq B$ bestehenden Filter $\mathfrak{F}_B$, dessen Durchschnitt gleichfalls B ist. Offenbar ist $\mathfrak{F}'_B$ gröber als $\mathfrak{F}_B$ und es gibt eine zu $\mathfrak{F}_B$ aber nicht zu $\mathfrak{F}'_B$ gehörige Untergruppe $A_{\beta_0} \supset B$. Sei nun $L^{(B)}$ der zu B gehörige Linksnebenscharenraum, dessen Topologie durch die natürlichen Bilder $\varphi(A_{\beta'})$ der $A_{\beta'} \in \mathfrak{F}'_B$ definiert wird. Wegen a) ist $L^{(B)} = [A/B]^{(l)}$ und es gibt ein $A_{\beta'_0} \in \mathfrak{F}'_B$ mit $\varphi(A_{\beta'_0}) \subseteq \varphi(A_{\beta_0})$. Daraus folgt $A_{\beta'_0} \subseteq A_{\beta_0}$, $A_{\beta_0} \in \mathfrak{F}'_B$ — Widerspruch. Aus b) folgt a): Sei φ die natürliche (und also stetige) Abbildung von A auf den zulässig topologisierten Linksnebenscharenraum $L^{(B)}$ nach der abgeschlossenen Untergruppe $B \subseteq A$. Zum Nachweis von (O) genügt es offenbar zu zeigen, daß jeder offene Normalteiler N_ν von A durch φ in eine offene Untermenge von $L^{(B)}$ überführt wird und da das vollständige Urbild von $\varphi(N_\nu)$ in A die

offene Gruppe $A_\beta = B + N_\nu$ ist, bleibt zu beweisen, daß $\varphi(A_\beta)$ offen in $L^{(B)}$ für jede offene Untergruppe $A_\beta \supseteq B$. Nun gibt es ein System von Untergruppen $A_{\beta'} \supseteq B$, so daß die Bilder $\varphi(A_{\beta'})$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Nullklasse $\bar{0}$ in $L^{(B)}$ bilden. Und hieraus folgt $\cap \varphi(A_{\beta'}) = \bar{0}$, $\cap A_{\beta'} = B$ und wegen b) muß es endlich viele β', etwa $\beta'_1, \ldots, \beta'_n$ mit $\cap A_{\beta'_i} \subseteq A_\beta$ geben, so daß also $\cap \varphi(A_{\beta'_i}) = \varphi(\cap A_{\beta'_i}) \subseteq \varphi(A_\beta)$. Daraus folgt die Offenheit von $\varphi(A_\beta)$.

3. Unter der *Kommutatorgruppe* $K = K(A)$ der Gruppe A verstehen wir hier die in A abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen Kommutatorgruppe von A. Sind N_ν die offenen Normalteiler von A und ist $\overline{K}_\nu$ die Kommutatorgruppe von A/N_ν, K_ν die entsprechende Untergruppe aus A, dann ist, wie leicht zu sehen $K = \cap K_\nu$. Sind im besonderen die Restklassengruppen A/N_ν sämtlich abelsch, dann ist $\overline{K}_\nu = \bar{0}$, $K_\nu = N_\nu$, $K = 0$ und es folgt, daß auch A abelsch ist.

Der *Normalisator* $N(B)$ einer Untergruppe B von A wird wie üblich erklärt. Es gilt:

(3.1) *Der Normalisator einer abgeschlossenen Untergruppe $B \subseteq A$ ist abgeschlossen in A.*

Beweis. Sei B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $\widetilde{N(B)}$ die (in A) abgeschlossene Hülle von $N(B)$ und $a \in \widetilde{N(B)}$. Ist N_ν ein offener Normalteiler von A, dann ist für jedes $n \in N(B)$: $n + (N_\nu + B) = (N_\nu + B) + n$, d.h. es gilt $N(B) \subseteq N(N_\nu + B)$. Mit $N_\nu + B$ ist auch $N(N_\nu + B)$ offen und also abgeschlossen in A und es folgt $\widetilde{N(B)} \subseteq N(N_\nu + B)$, d.h. $a + (N_\nu + B) = (N_\nu + B) + a$ für jedes ν. Die Scharen $a + (N_\nu + B)$ bzw. $(N_\nu + B) + a$ bilden nun offenbar Filterbasen mit den Durchschnitten $a + B$ bzw. $B + a$ und es folgt $a + B = B + a$, $a \in N(B)$ w. z. z. w.

Das *Zentrum* einer Gruppe A und allgemein der *Zentralisator* einer beliebigen Untermenge wird ebenso wie bei diskreten Gruppen erklärt. Beide sind gleichfalls stets abgeschlossen in A.

Definition. Die Gruppe A mit den offenen Normalteilern N_ν heißt eine „*p-Gruppe*", wo p eine ganzrationale Primzahl bedeutet, wenn für alle offenen Normalteiler N_ν von A A/N_ν eine (gewöhnliche) p-Gruppe ist.

Wie sofort zu sehen ist, ist jede (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppe und jede Restklassengruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler einer p-Gruppe sowie jede TYCHONOFF-Summe von (zur gleichen Primzahl p gehörigen) p-Gruppen wiederum eine p-Gruppe. Ebenso ist die vollständige Hülle einer p-Gruppe eine p-Gruppe. Daraus ergibt sich allgemeiner: Ist B eine p-Untergruppe der Gruppe A, dann auch die (in A) abgeschlossene Hülle $\widetilde{B}$ von B. Denn $\widetilde{B}$ ist in der vollständigen Hülle $\hat{B}$ von B enthalten. Hieraus und aus der Tatsache, daß die Vereinigungsmenge einer (eventuell transfiniten) aufsteigenden Folge von p-Gruppen eine p-Gruppe ist, folgt nun

(3.2) *Jede p-Untergruppe einer Gruppe A ist in (mindestens) einer maximalen p-Untergruppe P von A enthalten. P ist abgeschlossen in A und heißt p-Sylowgruppe von A.*

Die folgende Betrachtung zeigt, wie die p-Sylowgruppen einer Gruppe A aus den p-Sylowgruppen der diskreten Restklassengruppen von A nach den offenen Normalteilern N_ν erhalten werden können: Sei P eine p-Sylowgruppe von A, $\bar{A}^{(\nu)} = A/N_\nu$, $\bar{P}^{(\nu)}$ das Bild von P bei dem natürlichen Homomorphismus von A auf $\bar{A}^{(\nu)}$. $\bar{P}^{(\nu)}$ ist eine p-Gruppe und also in einer p-Sylowgruppe $\bar{P}_\nu$ aus $\bar{A}^{(\nu)}$ enthalten. P_ν sei die $\bar{P}_\nu$ entsprechende Untergruppe von A. *Dann ist* $P = \cap P_\nu$. Denn offenbar ist zunächst $P \subseteq \cap P_\nu$. Sei nun $a \in \cap P_\nu$. Dann ist a modulo jedem offenen Normalteiler N_ν von A von p-Potenzordnung und also $\cap P_\nu$ eine p-Gruppe, woraus die Behauptung folgt.

Wie üblich sieht man, daß die Konjugierten einer p-Sylowgruppe wieder p-Sylowgruppen sind. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß alle p-Sylowgruppen einer Gruppe A untereinander konjugiert sind, liefert die folgende *Verallgemeinerung des Satzes von* SYLOW:

(3.3) *Ist A kompakt und besitzt eine abgezählte charakteristische Basis $N_1 > N_2 > \cdots$, so sind für jede feste Primzahl p alle p-Sylowgruppen von A konjugiert.*

Beweis. Seien P und P^* zwei p-Sylowgruppen von A. Die Gruppen $\bar{A}^{(\nu)}$ $\bar{P}_\nu$, P_ν mögen die oben eingeführten Bedeutungen haben und analog seien $\bar{P}_\nu^*$, P_ν^* die entsprechenden zu P^* gehörigen Gruppen. Wegen der Endlichkeit von $\bar{A}^{(\nu)}$ sind $\bar{P}_\nu$ und $\bar{P}_\nu^*$ konjugiert in $\bar{A}^{(\nu)}$ und es gibt eine N_ν-Restklasse $\bar{a}_\nu$ mit $\bar{a}_\nu + \bar{P}_\nu - \bar{a}_\nu = \bar{P}_\nu^*$. Ist also a_ν' ein A-Element aus $\bar{a}_\nu$, so ist $a_\nu' + P_\nu - a_\nu' = P_\nu^*$. Sei nun ν_0 ein Index mit $N_{\nu_0} < N_\nu$. Dann ist $P_{\nu_0} \subseteq P_\nu$ und $P_{\nu_0}^* \subseteq P_\nu^*$ und wegen $a_\nu' + P_\nu - a_\nu' = P_\nu^*$ ist $a_\nu' + P_{\nu_0} - a_\nu' = P_{\nu_0}' \subseteq P_\nu^*$. P_{ν_0}' und $P_{\nu_0}^*$ entsprechen in $\bar{A}^{(\nu_0)} = A/N_{\nu_0}$ die p-Sylowgruppen $\bar{P}_{\nu_0}'$ und $\bar{P}_{\nu_0}^*$ und wegen $P_{\nu_0}' \subseteq P_\nu^*$, $P_{\nu_0}^* \subseteq P_\nu^*$ sind $\bar{P}_{\nu_0}'$ und $\bar{P}_{\nu_0}^*$ erst recht p-Sylowgruppen in P_ν^*/N_{ν_0}. Daraus folgt die Existenz eines $a_{\nu_0}' \in P_\nu^*$ mit $a_{\nu_0}' + P_{\nu_0}' - a_{\nu_0}' = P_{\nu_0}^*$. Setzt man nun $a_{\nu_0} = a_{\nu_0}' + a_\nu'$, dann ist $a_{\nu_0} + P_\nu - a_{\nu_0} = a_{\nu_0}' + (a_\nu' + P_\nu - a_\nu') - a_{\nu_0}' = P_\nu^*$ und $a_{\nu_0} + P_{\nu_0} - a_{\nu_0} = a_{\nu_0} + (a_\nu' + P_{\nu_0} - a_\nu') - a_{\nu_0}' = a_{\nu_0}' + P_{\nu_0}' - a_{\nu_0}' = P_{\nu_0}^*$, d.h. a_{ν_0} transformiert sowohl die „größere" Gruppe P_ν als auch die darin enthaltene „kleinere" Gruppe P_{ν_0} in die entsprechenden Gruppen P_ν^* bzw. $P_{\nu_0}^*$. Aus der Existenz eines solchen a_{ν_0} folgt nun leicht: Ist $\mathfrak{A}_\nu$ die Menge aller a_ν mit $a_\nu + P_\nu - a_\nu = P_\nu^*$, so ist für irgend zwei Indizes ν, ν' der Durchschnitt $\mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{A}_{\nu'}$ nicht leer (setze $N_{\nu_0} = N_\nu \cap N_{\nu'}$!) und wegen der Kompaktheit von A ist der Durchschnitt der $\mathfrak{A}_\nu$ nicht leer. Sei $a \in \cap \mathfrak{A}_\nu$. Dann ist $a + P_\nu = P_\nu^* + a$ für jedes ν und wegen $\cap P_\nu = P$, $\cap P_\nu^* = P^*$ ist $a + P = P^* + a$ und P und P^* sind konjugiert in A w. z. z. w.

4. *Definition.* Die Gruppe A heißt *linear-kompakt*, wenn jeder Filter in A einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Notwendig und hinreichend für die lineare Kompaktheit von A ist schon, daß jeder aus *offenen* Linksnebenscharen bestehende Filter einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Denn ist $\mathfrak{F}$ ein beliebiger aus den abgeschlossenen Linksnebenscharen $B_\beta^{(l)}$ bestehender Filter, so ist zunächst für festes β $B_\beta^{(l)}$ Durchschnitt aller $B_\beta^{(l)}$ enthaltenden offenen Linksnebenscharen $A_{\alpha_\beta}^{(l)}$ und die Menge aller $A_{\alpha_\beta}^{(l)}$ (genommen über alle β) bildet offenbar einen Filter $\mathfrak{F}'$ mit dem gleichen Durchschnitt wie $\mathfrak{F}$.

Jede kompakte Gruppe ist offenbar linear-kompakt, jede linear-kompakte Gruppe vollständig.

(4.1) *Jede abgeschlossene Untergruppe B und jede Restklassengruppe A/N nach einem abgeschlossenen Normalteiler N einer linear-kompakten Gruppe A ist linear-kompakt.*

Für abgeschlossene Untergruppen ist die Behauptung trivial, denn jeder Filter in B ist ein Filter in A. Ist ferner N ein abgeschlossener Normalteiler in A, $\overline{\mathfrak{F}}$ ein Filter in der Restklassengruppe $\bar{A}=A/N$, so entspricht $\overline{\mathfrak{F}}$ in A ein Filter $\mathfrak{F}$ und mit $\mathfrak{F}$ hat auch $\overline{\mathfrak{F}}$ einen nichtleeren Durchschnitt.

(4.2) *Sind die Gruppen $A^{(\alpha)}$ sämtlich linear-kompakt, so auch ihre* TYCHONOFF-*Summe* $A=\sum^T\oplus A^{(\alpha)}$.

Beweis. Da A als TYCHONOFF-Summe von vollständigen Gruppen nach einem bekannten Satz vollständig ist, genügt es zu zeigen, daß sich jeder Filter in A zu einem CAUCHY-Filter verfeinern läßt, und nach dem oben Bemerkten braucht man dabei nur Filter aus Nebenscharen nach *offenen* Untergruppen zu betrachten. Der Beweis verläuft nun nach bekanntem Schema: Sei $\mathfrak{F}'=\{A_\gamma^{(l)}\}$ ein aus offenen Linksnebenscharen $A_\gamma^{(l)}$ bestehender Filter in A. Nach dem ZORNschen Lemma existiert ein aus offenen Nebenscharen $A_\gamma^{(l)}$ bestehender feinster Filter $\mathfrak{F}=\{A_\gamma^{(l)}\}$ mit $\mathfrak{F}'\subseteqq\mathfrak{F}$. Die Projektionen $(A_\gamma^{(l)})^{(\alpha)}$ der $A_\gamma^{(l)}$ in $A^{(\alpha)}$ liefern einen Filter $\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ in $A^{(\alpha)}$ und wegen der linearen Kompaktheit von $A^{(\alpha)}$ hat dieser einen nichtleeren Durchschnitt. Sei $a^{(\alpha)}\in\bigcap_\gamma(A_\gamma^{(l)})^{(\alpha)}$, $a=\sum a^{(\alpha)}$, $B^{(l)}$ eine a enthaltende offene Linksnebenschar aus A, $(B^{(l)})^{(\alpha)}$ die Projektion von $B^{(l)}$ in $A^{(\alpha)}$. Dann gibt es für geeignete $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ offene $a^{(\alpha_i)}$ enthaltende Linksnebenscharen $(\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}$ in $A^{(\alpha_i)}$ mit $\bigcap_i\left((\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}+\sum_{\alpha\neq\alpha_i}^T\oplus A^{(\alpha)}\right)\subseteqq B^{(l)}$ und aus $a^{(\alpha_i)}\in(\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}\cap(A_\gamma^{(l)})^{(\alpha_i)}$ für jedes $(A_\gamma^{(l)})^{(\alpha_i)}\in\mathfrak{F}^{(\alpha_i)}$ folgt $\left((\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}+\sum_{\alpha\neq\alpha_i}^T\oplus A^{(\alpha)}\right)\cap A_\gamma^{(l)}$ nicht leer für jedes $A_\gamma^{(l)}\in\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{F}$ ein feinster Filter ist, folgt $(\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}+\sum_{\alpha\neq\alpha_i}^T\oplus A^{(\alpha)}\in\mathfrak{F}$, also $\bigcap_i\left((\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}+\sum_{\alpha\neq\alpha_i}^T\oplus A^{(\alpha)}\right)\in\mathfrak{F}$, $B^{(l)}\in\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}\supseteqq\mathfrak{F}'$ ist ein CAUCHY-Filter.

Nunmehr ergibt sich leicht:

(4.3) *Die vollständige Hülle $\hat{A}$ der Gruppe A ist genau dann linear-kompakt, wenn die (diskreten) Restklassengruppen A/N_ν von A nach ihren offenen Normalteilern sämtlich linear-kompakt sind.*

In der Tat. Ist $\hat{A}$ linear-kompakt, dann nach (4.1) auch $\hat{A}/\hat{N}_\nu\cong A/N_\nu$, wo $\hat{N}_\nu$ die in $\hat{A}$ abgeschlossene Hülle von N_ν bedeutet. Seien umgekehrt die A/N_ν linear-kompakt. Dann gilt nach (4.2) gleiches für die TYCHONOFF-Summe $A'=\sum^T\oplus(A/N_\nu)$. Nach einer am Schluß von **1.**) gemachten Bemerkung ist A eine Untergruppe A'' von A' topologisch isomorph und wegen der linearen Kompaktheit und also Vollständigkeit von A' ist die vollständige Hülle $\hat{A}''$ von A'' zu der in A' abgeschlossenen Hülle $\tilde{A}''$ von A'' topologisch isomorph. Aus der Isomorphieinvarianz von Vollständigkeit und linearer Kompaktheit folgt jetzt die lineare Kompaktheit von $\tilde{A}''$ und die von $\hat{A}''$ und $\hat{A}$.

Wegen (4.3) sind die Eigenschaften der *diskreten* linear-kompakten Gruppen von besonderem Interesse.

(4.4) *Jede diskrete linear-kompakte Gruppe A ist periodisch und kann nicht als direkte Summe unendlich vieler Normalteiler dargestellt werden.*

Beweis. Wäre A nicht periodisch, so enthielte A die unendliche zyklische Gruppe, aber diese ist sicher nicht linear-kompakt — im Widerspruch zu (4.1). Sei nun $A = \sum \oplus N^{(\nu)}$ die (gewöhnliche) direkte Summe der unendlich vielen Normalteiler $N^{(\nu)}$, so daß also A aus allen eindeutigen endlichen Summen $\sum a^{(\nu)}$ $(a^{(\nu)} \in N^{(\nu)})$ besteht. Für irgendein $\nu = \nu_0$ wähle man $a^{(\nu_0)} \in N^{(\nu_0)}$ mit $a^{(\nu_0)} \neq 0$ und bilde die Menge $U^{(\nu_0)}$ aller Elemente der Form $a^{(\nu_0)} + \sum_{\nu \neq \nu_0} a^{(\nu)}$ (endliche Summen, $a^{(\nu)} \in N^{(\nu)}$). U^{ν_0} ist offenbar eine Nebenschar von $\sum_{\nu \neq \nu_0} \oplus N^{(\nu)}$. Läßt man nun ν_0 die Menge aller ν durchlaufen, so bilden die zugehörigen $U^{(\nu_0)}$ offenbar eine Filterbasis mit leerem Durchschnitt — im Widerspruch zur linearen Kompaktheit von A.

(4.5) *Sei B eine abgeschlossene Untergruppe der linear-kompakten Gruppe A, $L^{(B)}$ der zulässig topologisierte Linksnebenscharenraum von A nach B (vgl. Nr. 2) und φ die natürliche Abbildung von A auf $L^{(B)}$. Dann ist φ abgeschlossen.*

Beweis. Sei C eine abgeschlossene Untergruppe von A, $\bar{a}$ ein Häufungspunkt von $\varphi(C)$ in $L^{(B)}$. Dann gibt es zu $\bar{a}$ ein Fundamentalsystem $\mathfrak{U}$ von Umgebungen $\overline{U}_\beta$ von der Gestalt $\overline{U}_\beta = \bar{a} + \varphi(A_\beta)$, wo die A_β die offenen Obergruppen von B sind und wo $\overline{U}_\beta \cap \varphi(C)$ nicht leer ist für alle β. Das vollständige Urbild U_β von $\overline{U}_\beta$ in A vermöge φ ist $U_\beta = (a+B) + (A_\beta + B) = a + A_\beta$, wo a in der Linksnebenschar $\bar{a}$ liegt, d.h. $\overline{U}_\beta = \varphi(a + A_\beta)$. Aus $\overline{U}_\beta \cap \varphi(C)$ nicht leer folgt die Existenz eines $c_\beta \in C$ mit $c_\beta \in a + A_\beta$ so daß $(a + A_\beta) \cap C$ nicht leer für jedes β. Wegen der linearen Kompaktheit hat der von den $(a + A_\beta) \cap C$ erzeugte Filter einen nicht leeren Durchschnitt und enthält also ein $c \in C$. Dann ist $\bar{a} = \cap \overline{U}_\beta = \varphi\left(\cap (a + A_\beta)\right) \in \varphi(C)$ und $\varphi(C)$ ist abgeschlossen.

Als unmittelbare Folge von (4.5) ergibt sich, daß jede linear-kompakte Gruppe die Eigenschaft (A) aus Nr. **2** besitzt.

(4.6) *Ist φ ein stetiger Homomorphismus der linear-kompakten Gruppe A auf die Gruppe A', dann ist A' linear-kompakt und φ abgeschlossen.*

Beweis. φ induziert einen stetigen Isomorphismus einer Restklassengruppe $\bar{A}$ von A auf A' und wegen (4.1) und (4.5) genügt es, den Satz für den Fall eines stetigen *Isomorphismus* φ von $A = \bar{A}$ auf A' zu beweisen. Sei nun $\mathfrak{F}'$ ein Filter aus A'. Wegen der Stetigkeit von φ entspricht ihm in A ein (gleichfalls aus *abgeschlossenen* Nebenscharen bestehender) Filter $\mathfrak{F}$ und dieser und damit auch $\mathfrak{F}'$ hat wegen der linearen Kompaktheit von A einen nicht leeren Durchschnitt, woraus die lineare Kompaktheit von A' folgt. Der zweite Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folge von (4.5).

5[8]). *Definition.* Eine abgeschlossene Untergruppe B der Gruppe A heißt eine „*G-Untergruppe*" von A, wenn gilt: Ist $\{B_\beta\}$ ein System von Untergruppen

[8]) Wegen der Bedeutung dieser Nummer im Rahmen der vorliegenden Arbeit vgl. den entsprechenden Abschnitt der Einleitung.

aus A mit $\cap B_\beta = B$, so gibt es bereits endlich viele B_β, etwa $B_{\beta_1}, \ldots, B_{\beta_n}$ mit $\cap B_{\beta_i} = B$.

Jede G-Untergruppe von A ist offen, weil nach Nr. 1 als Durchschnitt von offenen und mithin von endlich vielen offenen Untergruppen darstellbar.

Wir betrachten zunächst *G-Normalteiler* und stellen die folgenden Grundeigenschaften der G-Normalteiler zusammen:

a) Ist N G-Normalteiler von A, $B \subseteq A$ eine Obergruppe von N, dann ist N G-Normalteiler von B.

b) Ist N' ein abgeschlossener Normalteiler von A, dann ist ein Normalteiler $N \supseteq N'$ genau dann G-Normalteiler in A, wenn der entsprechende Normalteiler $\bar{N}$ aus $\bar{A} = A/N'$ G-Normalteiler in $\bar{A}$ ist.

c) Ist N' ein G-Normalteiler von A, $N \subseteq N'$ ein Normalteiler von A, welcher G-Normalteiler in N' ist, dann ist N G-Normalteiler in A.

d) Ist A' eine abgeschlossene Untergruppe von A, N ein G-Normalteiler von A, dann ist $N' = A' \cap N$ ein G-Normalteiler von A'.

a) und b) sind trivial. *Beweis von c).* N ist offenbar offen in A und $\bar{A} = A/N$ diskret. $\bar{\mathfrak{F}}$ sei ein Filter aus $\bar{A}$ mit dem Durchschnitt $\bar{0} \in \bar{A}$, $\bar{N}'$ der N' entsprechende G-Normalteiler aus $\bar{A}$. Nach b) ist $\bar{0}$ G-Normalteiler in $\bar{N}'$ Folglich gibt es eine Gruppe $\bar{A}_{\alpha_0} \in \bar{\mathfrak{F}}$ mit $\bar{N}' \cap \bar{A}_{\alpha_0} = \bar{0}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ geht bei Übergang zur Restklassengruppe $\bar{\bar{A}} = \bar{A}/\bar{N}'$ in den zu $\bar{\mathfrak{F}}$ „lokalisomorphen" Filter $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ über. Daher ist der Durchschnitt von $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ gleich $\bar{\bar{0}}$ und da $\bar{\bar{0}}$ nach b) G-Normalteiler von $\bar{\bar{A}}$ ist, folgt $\bar{\bar{0}} \in \bar{\bar{\mathfrak{F}}}$, also $\bar{N}' \in \bar{\mathfrak{F}}$, $\bar{0} = \bar{N} \cap \bar{A}_{\alpha_0} \in \bar{\mathfrak{F}}$. Aus $\bar{0} \in \bar{\mathfrak{F}}$ für jeden Filter $\bar{\mathfrak{F}}$ mit dem Durchschnitt $\bar{0}$ folgt aber leicht, daß $\bar{0}$ G-Normalteiler von $\bar{A}$, also N G-Normalteiler von A ist. *Beweis von d).* N ist G-Normalteiler in $A' + N$ und die diskrete Gruppe $(A' + N)/N$ ist isomorph zur gleichfalls diskreten Gruppe $A'/A' \cap N = A'/N'$. Da in $(A' + N)/N$ die Nullgruppe G-Normalteiler ist, gilt das gleiche für A'/N' und hieraus folgt die Behauptung nach b).

Nach c) und d) ist der Durchschnitt endlich vieler G-Normalteiler wieder ein solcher, d.h.

(5.1) *Die Menge der G-Normalteiler einer Gruppe A bildet eine Normalfilterbasis.*

Dieser Satz legt die Frage nahe, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen der zu der Normalfilterbasis aus (5.1) gehörige Filter nur aus G-Untergruppen besteht, ob also jede Obergruppe eines G-Normalteilers eine G-Untergruppe ist [9]).

Definition. Eine Untergruppe B einer Gruppe A heißt *„große Untergruppe"* von A, oder einfach „groß in A", wenn ein abgeschlossener Normalteiler $N \subseteq B$ von A existiert, so daß die Restklassengruppe A/N der Minimalbedingung [10]) genügt.

---

[9]) Die allgemeinere Frage, ob überhaupt jede Obergruppe einer (nicht notwendig invarianten) G-Untergruppe eine G-Untergruppe ist, wird hier nicht untersucht.

[10]) Unter der Minimalbedingung (schlechthin) wird in dieser Arbeit stets die *Minimalbedingung für Untergruppen* verstanden.

Offenbar ist jede große Untergruppe eine G-Untergruppe und mithin offen in A. In bekannter Weise ergibt sich:

a) Ist N großer Normalteiler in A, B eine abgeschlossene Untergruppe von A, dann ist $B \cap N$ großer Normalteiler von B.

b) Sind N und $N' \supseteq N$ Normalteiler von A, N' groß in A und N groß in N', dann ist N groß in A.

Daraus folgt sofort, daß der Durchschnitt endlich vieler großer Normalteiler ein großer Normalteiler und damit der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen eine große Untergruppe ist. Da auch jede Obergruppe einer großen Untergruppe groß ist, haben wir als Gegenstück zu (5.1):

(5.2) *Die Menge aller großen Untergruppen einer Gruppe A bildet einen Normalfilter.*

Hinsichtlich der im Anschluß an (5.1) gestellten Frage ergibt sich jetzt sofort:

(5.3) *Der von einer Menge von G-Normalteilern $N^{(\nu)}$ einer Gruppe A erzeugte Filter $\mathfrak{F}$ besteht dann und nur dann ausschließlich aus G-Untergruppen, wenn die $N^{(\nu)}$ groß in A sind.*

Beweis. Sind die $N^{(\nu)}$ groß in A, so auch sämtliche Untergruppen des von den $N^{(\nu)}$ erzeugten Filters, d.h. sämtliche zu $\mathfrak{F}$ gehörige Untergruppen sind sicherlich G-Untergruppen. — Möge nun umgekehrt $\mathfrak{F}$ aus G-Untergruppen bestehen und sei $B \in \mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{F}$ ein Normalfilter ist, gibt es einen Normalteiler $N \in \mathfrak{F}$ mit $N \subseteq B$. Sei $\bar{A} = A/N$. Da jede Obergruppe von N G-Untergruppe in A ist, sind sämtliche Untergruppen von $\bar{A}$ G-Untergruppen von $\bar{A}$ und aus der Definition der G-Untergruppe folgt sofort, daß in $\bar{A}$ jede absteigende Untergruppenkette nach endlich vielen Gliedern abbricht. Mithin genügt $\bar{A}$ der Minimalbedingung und B ist groß in A w. z. z. w.

Nach (5.3) ist die an (5.1) angeschlossene Frage äquivalent zu der folgenden:

(F) *Ist jeder G-Normalteiler der Gruppe A groß in A?*

Wir nennen eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für eine bejahende Antwort auf die Frage (F) und können uns dabei offenbar auf die Betrachtung diskreter Gruppen beschränken. (Man bilde die Restklassengruppe nach dem in Rede stehenden — jedenfalls offenen — Normalteiler.)

(5.4) *Ist jeder G-Normalteiler der diskreten Gruppe A ein großer Normalteiler, so besitzt A die folgende Eigenschaft:*

(E_1) *Gibt es eine der Minimalbedingung genügende Untergruppe B von A derart, daß jede Untergruppe $\neq (0)$ von A mit B einen Durchschnitt $\neq (0)$ hat, so genügt A der Minimalbedingung.*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}$ ein aus Untergruppen B_σ bestehender Filter in A mit $\bigcap B_\sigma = (0)$. Wegen $B_\sigma \cap B \neq (0)$ für $B_\sigma \neq (0)$ und wegen der Minimalbedingung für B folgt aus $\bigcap B_\sigma = (0)$ die Existenz eines B_{σ_0} mit $B_{\sigma_0} = 0$, d.h. $(0) \in \mathfrak{F}$.

Daraus folgt leicht, daß (0) G-Normalteiler von A ist und daraus nach Voraussetzung die Minimalbedingung für A[11]).

Gewissermaßen als Gegenstück zu (5.4) gilt nun:

(5.5) *Die diskrete Gruppe A besitze die folgende Eigenschaft*:

(E_2) *Ist B eine der Minimalbedingung genügende Untergruppe von A und M eine in A maximale Untergruppe mit $B \cap M = (0)$, dann genügt jede Untergruppe B_0 von A mit $B_0 \supseteq B$, $B_0 \cap M = 0$ gleichfalls der Minimalbedingung.*

Dann ist jeder G-Normalteiler groß in A.

Beweis. Sei irgendein G-Normalteiler in A gegeben. Indem wir sofort Restklassengruppenbildung vorgenommen denken, können wir uns auf den Fall beschränken, daß (0) G-Normalteiler von A ist. In A gibt es nun sicher eine wohlgeordnete absteigende Untergruppenkette $\cdots > B_\sigma > B_{\sigma+1} > \cdots$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. Jede als Durchschnitt irgendwelcher B_σ darstellbare Untergruppe kommt in der Kette vor. 2. Genügt B_σ nicht der Minimalbedingung, dann gibt es unendlich viele $B_{\sigma'} < B_\sigma$ in der Kette. — Angenommen nun, A genüge der Minimalbedingung nicht, dann reißt die Kette der B_σ mit einer gewissen Ordinalzahl λ ab, die o. B. d. A. als Limeszahl vorausgesetzt werden kann und B_λ genügt der Minimalbedingung. M sei eine in A maximale Untergruppe mit $B_\lambda \cap M = (0)$. Aus $\bigcap (M \cap B_\sigma) = 0$ und der G-Eigenschaft von (0) folgt nun die Existenz eines $B_{\sigma_0} > B_\lambda$ mit $B_{\sigma_0} \cap M = (0)$ und wegen (E_2) genügt B_{σ_0} der Minimalbedingung im Widerspruch zu der Tatsache, daß σ_0 Vorgänger der Limeszahl λ ist.

Übrigens ist (E_1) offenbar eine Folge von (E_2).

Die vorangegangenen Betrachtungen legen es nahe, Gruppen zu untersuchen, deren charakteristischer Filter aus großen Untergruppen besteht. Es ist klar, daß die vollständige Hülle solcher Gruppen linear-kompakt ist. Ferner gilt als Ergänzung von (2.3):

(5.6) *Ist A eine vollständige Gruppe, so sind folgende Aussagen gleichwertig*:

a) *A besitzt die Eigenschaft (O) aus Nr. 2.*

b) *Der charakteristische Filter von A besteht aus großen Untergruppen.*

Beweis. Aus a) folgt b). Ist nicht jede offene Untergruppe von A groß in A, dann gibt es in A einen offenen Normalteiler N, so daß $\bar{A} = A/N$ nicht der Minimalbedingung genügt und in $\bar{A}$ existiert eine abgezählte Untergruppenkette $\bar{A}_1 > \bar{A}_2 > \cdots$ mit $\bigcap_i \bar{A}_i \neq \bar{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Für die entsprechenden Untergruppen $A_i > N$ von A gilt dann gleichfalls $\bigcap_i A_i \neq A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $\bigcap_i A_i$ ist einerseits Durchschnitt des von den A_i erzeugten und aus allen Unter-

[11]) *Jede* diskrete Gruppe A besitzt nach dem Beweis von (5.4) die folgende Eigenschaft (E_1'): *Ist B eine Untergruppe von A, in welcher* (0) *G-Normalteiler ist und hat jede Untergruppe $\neq$ (0) von A mit B einen von* (0) *verschiedenen Durchschnitt, dann ist* (0) *G-Normalteiler von A.*

Wird in (E_1') der Begriff „G-Normalteiler" durch „großer Normalteiler" ersetzt, dann geht (E_1') in (E_1) über und es ergibt sich, daß die G-Normalteiler eine Eigenschaft [nämlich (E_1')] besitzen, die bisher meines Wissens für große Normalteiler [d.h. also (E_1)] noch nicht allgemein nachgewiesen ist.

gruppen $\geqq A_i$ bestehenden Filters, andererseits des wegen $\bigcap_i A_i \neq A_k$ davon verschiedenen aus allen Untergruppen $\geqq \bigcap_i A_i$ bestehenden Filters. Wegen (2.3) besitzt also A nicht die Eigenschaft (O). Aus b) folgt a): Wegen b) ist A linear-kompakt. Sei B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $L^{(B)}$ der zugehörige Linksnebenscharenraum mit einer zulässigen Topologie (vgl. Nr. **2**), φ die natürliche Abbildung von A auf $L^{(B)}$. Nach (4.6) ist $\varphi(B) = \bar{0}$ abgeschlossen in $L^{(B)}$ und wegen der Zulässigkeit der Topologie von $L^{(B)}$ gibt es ein aus Bildern $\varphi(A_\beta)$ offener Untergruppen $A_\beta \geqq B$ von A bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen der $\bar{0}$ in $L^{(B)}$. Sei nun $A' \supset B$ eine offene Untergruppe aus A. Wegen $\bigcap A_\beta = B$ und (2.3) gibt es dann ein A_β, etwa $A_{\beta'}$, mit $A_{\beta'} \subset A'$. Dann besteht A' aus gewissen Linksnebenscharen mod $A_{\beta'}$ und da die Bilder dieser Linksnebenscharen vermöge φ offen in $L^{(B)}$ sind, ist auch $\varphi(A')$ offen in $L^{(B)}$, w. z. z. w.

6. Eine diskrete Gruppe heißt bekanntlich lokal-endlich, wenn jede ihrer Untergruppen mit endlich vielen Erzeugenden endlich ist. Natürlich ist jede lokal-endliche Gruppe periodisch. Diese Erklärung läßt sich sofort verallgemeinern zu der

Definition. Eine Gruppe A mit dem von den Normalteilern N_ν erzeugten charakteristischen Filter heißt lokal-endlich, wenn die (diskreten!) Restklassengruppen A/N_ν sämtlich lokal-endlich sind.

Offenbar braucht eine in diesem Sinne lokal-endliche Gruppe nicht periodisch zu sein.

(6.1) *B sei ein abgeschlossener Normalteiler von A, $A' = A/B$. Ist A lokal-endlich, so auch B und A'. Sind A' und B lokal-endlich, so auch A.*

A sei lokal-endlich und der charakteristische Filter von A werde von dem Normalteiler N_ν erzeugt. Wegen der Isomorphie von $(N_\nu + B)/N_\nu$ und $B/B \cap N_\nu$ und da die $B \cap N_\nu$ den charakteristischen Filter von B erzeugen, folgt die lokale Endlichkeit von B aus der lokalen Endlichkeit von $(N_\nu + B)/N_\nu \subseteqq A/N_\nu$. Ebenso leicht ergibt sich die lokale Endlichkeit von $A' = A/B$. Seien nun A' und B lokal-endlich, N_ν ein offener Normalteiler von A. Wegen $(N_\nu + B)/N_\nu = B/B \cap N_\nu$ ist dann $(N_\nu + B)/N_\nu$ und wegen $A/(N_\nu + B) = (A/B)/\big((N_\nu + B)/B\big)$ auch $A/(N_\nu + B)$ lokal-endlich.

Die diskrete Gruppe A/N_ν ist also isomorph zur Erweiterung der lokal-endlichen Gruppe $A/(N_\nu + B)$ durch die lokal-endliche Gruppe $(N_\nu + B)/N_\nu$ und mithin nach einem bekannten Satz lokal-endlich.

Definition. Eine lokal-endliche Gruppe A, deren charakteristischer Filter von den Normalteilern N_ν erzeugt wird, heißt lokal-auflösbar bzw. auflösbar bzw. lokal-speziell bzw. speziell, wenn die (diskreten) Restklassengruppen A/N_ν sämtlich die entsprechende Eigenschaft haben[12]).

Mit A ist auch die vollständige Hülle $\hat{A}$ von A lokal-auflösbar usw., wie sich sofort aus der Isomorphie von A/N_ν und $\hat{A}/\hat{N}_\nu$ ergibt (vgl. Nr. **1**). Ab-

[12]) Zu den auftretenden gruppentheoretischen Begriffsbildungen und Sätzen vgl. KUROSCH [8].

geschlossene Untergruppen und Restklassengruppen nach solchen sowie die TYCHONOFF-Summe von lokal-auflösbaren usw. Gruppen sind stets wieder lokal-auflösbar usw. Schließlich ist auch die Erweiterung einer lokal-auflösbaren Gruppe mit einer lokal-auflösbaren Gruppe lokal-auflösbar.

Im diskreten Falle fällt unsere Definition der lokalen Auflösbarkeit usw. mit der üblichen zusammen. Hingegen braucht z. B. eine nichtdiskrete in unserem Sinne lokal-auflösbare Gruppe nicht im üblichen Sinne lokal-auflösbar zu sein. Trotzdem lassen sich viele bei gewöhnlichen lokal-auflösbaren usw. Gruppen gültige Sätze in geeigneter Form auch auf unseren Fall übertragen. Mit Hilfe eines Satzes von ČERNIKOV [*11*], nach welchem eine diskrete lokal-auflösbare Gruppe genau dann der Minimalbedingung genügt, wenn ihre abelschen Untergruppen der Minimalbedingung genügen, zeigen wir zunächst

(6.2) *Die Gruppe A sei lokal-auflösbar, $\hat{A}$ die vollständige Hülle von A. Dann ist jeder G-Normalteiler von A groß in A und A besitzt die Eigenschaft* (E_1) *aus Nr.* **5**. *Ferner sind folgende Aussagen äquivalent*:

a) *$\hat{A}$ ist linear-kompakt.*

b) *Jede offene Untergruppe ist groß in A.*

Beweis. Sei N ein G-Normalteiler von A, $\bar{A} = A/N$. Dann ist $\bar{A}$ diskret und $\bar{0}$ ist G-Normalteiler von $\bar{A}$, also insbesondere auch G-Normalteiler aller abelschen Untergruppen von $\bar{A}$. Würden die abelschen Untergruppen von $\bar{A}$ nicht sämtlich der Minimalbedingung genügen, so gäbe es unter ihnen sicher eine, in welcher $\bar{0}$ nicht G-Normalteiler wäre (z. B. eine direkte Summe von abzählbar vielen zyklischen Gruppen), im Widerspruch zur Voraussetzung! Mithin genügen alle abelschen Untergruppen von $\bar{A}$ der Minimalbedingung und nach dem zitierten Satz von ČERNIKOV auch $\bar{A}$, d. h. N ist groß in A. — Sei nun A linear-kompakt, $\hat{N}_\nu$ ein offener Normalteiler von $\hat{A}$, $\bar{A} = \hat{A}/\hat{N}_\nu$. $\bar{A}$ ist diskret und linear-kompakt und das gleiche gilt folglich für alle abelschen Untergruppen von $\bar{A}$. Nach wohlbekannten Sätzen (vgl. z. B. SCHÖNEBORN [*10*]) genügen folglich die abelschen Untergruppen von $\bar{A}$ der Minimalbedingung, woraus nach dem Satz von ČERNIKOV folgt, daß $\hat{N}_\nu$ groß in $\hat{A}$ ist. — Ist umgekehrt b) erfüllt, so folgt a) sofort aus (4.3).

Durch (6.2) ist die Frage (F) aus Nr. 5 für lokal-auflösbare Gruppen bejahend beantwortet. Ferner folgt aus (6.2) nach bekannten Sätzen (vgl. KUROSCH [*8*]), daß für linear-kompakte Gruppen die Begriffe „auflösbar" und „lokal-auflösbar" ebenso wie die Begriffe „speziell" und „lokal-speziell" zusammenfallen.

Im folgenden sollen noch die nachstehenden von ČERNIKOV [*11*] für die Minimalbedingung genügende lokal-auflösbare Gruppen gewonnene Resultate auf linear-kompakte lokal-auflösbare Gruppen übertragen werden.

Genügt die lokal-auflösbare Gruppe A der Minimalbedingung, so gilt nach ČERNIKOV:

a) A besitzt einen abelschen Normalteiler von endlichem Index in A.

b) Ist A eine Divisionsgruppe[13]), so ist A abelsch.

c) Besitzt A keine unendliche Sylowuntergruppe, so ist A endlich.

Die Übertragung auf unseren Fall lautet:

(6.3) *Ist A lokal-auflösbar und linear-kompakt, so gilt*

A. *A enthält einen abgeschlossenen abelschen Normalteiler N mit kompakter Restklassengruppe A/N.*

B. *Ist A eine Divisionsgruppe, so ist A abelsch.*

C. *Ist jede Sylowuntergruppe von A kompakt, so auch A selber.*

Beweis. A. Sei $\bar{A}^{(\nu)} = A/N_\nu$, wo N_ν die offenen Normalteiler von A durchläuft. Dann enthält $\bar{A}^{(\nu)}$ nach a) einen abelschen Normalteiler $\bar{N}^{(\nu)}$ von endlichem Index. $N^{(\nu)}$ sei der $\bar{N}^{(\nu)} = N^{(\nu)}/N_\nu$ entsprechende (offene) Normalteiler aus A, $N = \cap N^{(\nu)}$, $A' = A/N$. Dann folgt wegen (6.2) aus der linearen Kompaktheit von A und A' nach (2.3), daß die Gruppen $N^{(\nu)'} = N^{(\nu)}/N$ den vollen charakteristischen Filter von A' erzeugen und aus der Endlichkeit von $A'/N^{(\nu)'} = \bar{A}^{(\nu)}/\bar{N}^{(\nu)}$ ergibt sich die Kompaktheit von A'. Wegen $N \subseteqq N^{(\nu)}$, $N_\nu \subseteqq N^{(\nu)}$ ist $N + N_\nu \subseteqq N^{(\nu)}$ und mit $N^{(\nu)}/N_\nu$ ist auch $(N + N_\nu)/N_\nu$ abelsch. Da die Gruppen $N/N \cap N_\nu = (N + N_\nu)/N_\nu$ den charakteristischen Filter von N erzeugen, folgt A nach einer in Nr. **5** gemachten Bemerkung. — B. ist klar, da mit A auch A/N_ν eine Divisionsgruppe und also nach b) abelsch ist. — C. Sei N der abelsche Normalteiler aus A. mit kompaktem A/N. Die linear-kompakte abelsche Gruppe N ist nach bekannten Sätzen direkte TYCHONOFF-Summe ihrer p-Sylowgruppen und diese sind, da in geeigneten p-Sylowgruppen von A enthalten, kompakt. Mithin ist auch N kompakt und aus der Kompaktheit von A/N folgt sofort die von A.

Zum Schlusse wenden wir uns den lokal-speziellen Gruppen zu und bemerken zunächst, daß — wie leicht zu sehen — genau wie im diskreten Falle eine lokal-spezielle Gruppe A zu jeder Primzahl p höchstens eine p-Sylowgruppe $P \neq (0)$ enthält und daß P Normalteiler in A ist. Darüber hinaus gilt:

(6.4) *Eine linear-kompakte Gruppe A ist genau dann lokal-speziell (und damit speziell), wenn sie direkte* TYCHONOFF-*Summe ihrer verschiedenen p-Sylowgruppen ist und wenn diese sämtlich lokal-endlich sind.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß eine direkte TYCHONOFF-Summe von lokal-endlichen linear-kompakten p-Gruppen lokal-speziell ist. — Sei nun umgekehrt A lokal-speziell und ${}^{(i)}P$ durchlaufe die verschiedenen p-Sylowgruppen von A. Dann enthält A zunächst die Gruppe A^* aller endlichen Summen $\sum {}^{(i)}a$ $({}^{(i)}a \in {}^{(i)}P)$. Die durch die Topologie von A in A^* induzierte Relativtopologie wird definiert durch die in A^* offenen Normalteiler $N_\nu^* = A^* \cap N_\nu$ und A^*/N_ν^* genügt stets der Minimalbedingung. Daraus folgt leicht, daß die vollständige Hülle von A^* gerade die TYCHONOFF-Summe $\hat{A}^* = \sum^T \oplus {}^{(i)}P$ ist und wegen der Vollständigkeit von A ist $\sum^T \oplus {}^{(i)}P \subseteqq A$. — Ist umgekehrt

[13]) Eine Gruppe ist eine „Divisionsgruppe" (auch „komplette Gruppe" genannt), wenn für jede natürliche Zahl $n > 0$ jedes ihrer Elemente in der Gruppe als n-te Potenz darstellbar ist.

$a \in A$ und (a) die in A abgeschlossene und daher vollständige Hülle der gewöhnlichen von a erzeugten zyklischen Gruppe, dann ist die abelsche Gruppe (a) kompakt und (a), wie wohlbekannt, darstellbar als direkte Summe $(a) = \sum^T \oplus ({}^{(i)}a)$, wo $({}^{(i)}a)$ „abgeschlossene Hüllen" zyklischer Gruppen aus ${}^{(i)}P$ sind. Hieraus folgt $(a) \subseteqq \sum^T \oplus {}^{(i)}P$, $A \subseteqq \sum^T \oplus {}^{(i)}P$ und damit die Behauptung.

Literatur.

[1] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. I—III. Paris 1951. — [2] Hämisch, W.: Über die Topologie in der Algebra. Math. Z. **60**, 458—487 (1954). — [3] Hall jr., M.: A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. **52**, 127—139 (1950). — [4] Kaplansky, I.: Dual modules over a valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 213—219 (1953). — [5] Kawada, Y.: On the structure of the Galois groups of some infinite extensions I. J. Fac. Sc. Tokyo, Sec. I **7**, 1—18. — [6] Krull, W.: Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. **100**, 687—697 (1928). — [7] Krull, W.: Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184**, 19—48 (1942). — [8] Kurosch, A.: Gruppentheorie. Berlin 1953. — [9] Prüfer, H.: Theorie der abelschen Gruppen, II. Math. Z. **22**, 222—249 (1925). — [10] Schöneborn, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen I/II. Math. Z. **59**, 455—473 (1954); **60**, 17—30 (1954). — [11] Černikov, S. N.: Über die Theorie der lokal-auflösbaren Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **65**, 21—24 (1949). — [12] Vilenkin, N. Y.: Direkte Zerlegungen topologischer Gruppen I/II. Mat. Sbornik N. S., **19**, (61), 85—154, 311—340 (1946). — [13] Zelinsky, D.: Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math. **75**, 79—90 (1953).

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 18. August 1954.)

KRICKEBERG, K.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 374—385 (1955)

Charakterisierung oberer und unterer Integrale durch Additivitäts- und Mittelwerteigenschaften*).

Von
KLAUS KRICKEBERG.

Einleitung.

Von HANS HAHN rührt die Definition des LEBESGUE-STIELTJESschen Integrals einer reellen meßbaren Funktion als diejenige totaladditive Mengenfunktion her, die den Mittelwertsatz erfüllt. Da das obere und das untere Integral einer beliebigen, nicht notwendig meßbaren reellen Funktion, soweit sie im Sinne von [*I*][1]) existieren, ebenfalls totaladditive Mengenfunktionen bilden, die dem Mittelwertsatz genügen, so liegt die Frage nahe, ob sich nicht auch diese Integrale in ähnlicher Weise kennzeichnen lassen. Es zeigt sich in der Tat leicht (Satz 1.2), daß das obere Integral, falls vorhanden, als die größte derartige Mengenfunktion beschrieben werden kann und dementsprechend das untere Integral als die kleinste. Das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit besteht nun in der Frage, unter welchen Bedingungen umgekehrt die Existenz des oberen Integrals aus dem Vorhandensein einer größten unter den totaladditiven Mengenfunktionen, die den Mittelwertsatz oder doch wenigstens seine eine Hälfte, die Abschätzung nach oben, erfüllen, abgeleitet werden kann, wann sich also die oberen und unteren Integrale auf diese Weise völlig charakterisieren lassen. Die Beantwortung dieser Frage liefert demnach Bedingungen, unter denen die Theorie des oberen und unteren Integrals in entsprechender Weise wie die des LEBESGUE-STIELTJESschen Integrals meßbarer Funktionen axiomatisch aufgebaut werden kann.

Die Bedingung II, die dafür in Satz 2.1 aufgestellt wurde, sieht in der Sprache der Verbände, die ich sonst hier ebenso wie in der vorangegangenen Arbeit [*I*] um des allgemeineren Verständnisses willen vermieden habe, so aus: *Zu jedem* BOOLE*schen σ-Quotientenverband* $\mathfrak{V}$ *des Quotientenverbandes* $\mathfrak{W} = \mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ *der meßbaren Mengen nach den Nullmengen und jedem vom Nullelement verschiedenen Element* X *aus* $\mathfrak{V}$ *gibt es ein in* $\mathfrak{V}$ *erklärtes endliches Maß, das an der Stelle* X *nicht verschwindet.* Hierfür ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{W}$ einen Maßverband darstellt, d. h. den Definitionsbereich eines endlichen und strikt positiven Maßes.

Hiernach ist, anders als bei den Integralen meßbarer Funktionen, eine entsprechende axiomatische Kennzeichnung der oberen und unteren Integrale

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Würzburg als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

durchaus nicht immer möglich. Die Untersuchungsmethode führt jedoch auch im Fall der meßbaren Integranden zu neuen Einsichten, z. B. dem Satz 2.4. Die Bedeutung der Bedingung II wird in § 3 durch einige Beispiele beleuchtet.

Es sei schließlich auf eine Arbeit von M. COTLAR und Y. FRENKEL [4] hingewiesen, die sich unter anderem ebenfalls mit der Charakterisierung von Integralen vermöge gewisser Ordnungsrelationen im System aller Mengenfunktionen über einem Mengensystem $\mathfrak{S}$ beschäftigt. Es werden allgemeiner sogar Integrale von Mengenfunktionen vom BURKILL-KOLMOGOROFFschen Typ behandelt. Das eigentliche Problem der vorliegenden Arbeit, das Existenzproblem, taucht in jener Abhandlung jedoch nicht auf, da dort alle vorkommenden Integrale auf Grund geeigneter Endlichkeitsvoraussetzungen vorhanden sind.

§ 1. Vorbereitungen.

Wir stützen uns auf den Begriff des oberen und unteren Integrals aus [1] und gebrauchen die dort eingeführten Bezeichnungen. μ sei ein in einem BORELschen Ring $\mathfrak{S}$ definiertes Maß und $\mathfrak{N}$ das System der meßbaren, d.h. zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Nullmengen. $\mathfrak{S}$ enthalte eine größte Menge E, die den Definitionsbereich einer reellen, nicht notwendig endlichen Funktion f bilde. Ist f meßbar, so heißt f bekanntlich über E integrierbar im Sinne von HAHN (vgl. z.B. [2], S. 149ff.), wenn es eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion φ gibt, mit der der Mittelwertsatz

$$\mu(M)\inf_M f \leq \varphi(M) \leq \mu(M)\sup_M f \tag{1.1}$$

für jede Menge M aus $\mathfrak{S}$ gilt. φ ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt, und $\varphi(M)$ wird als das Integral von f über M bezeichnet. Ein Nebenergebnis der folgenden Überlegungen wird die Gleichwertigkeit dieses HAHNschen Integralbegriffs mit dem in [1], § 6 gegebenen sein, und zwar auch dann, wenn μ, anders als in [2], nicht mehr schwach endlich ist.

Wir beginnen die Untersuchung der Verhältnisse bei nicht mehr notwendig meßbarem f mit der Beantwortung der Frage, wann es mindestens eine totaladditive Funktion φ gibt, die (1.1) erfüllt.

Satz 1.1. *Dann und nur dann gibt es eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion φ, die dem Mittelwertsatz* (1.1) *bei jeder Menge M aus $\mathfrak{S}$ genügt, wenn* ${}^*\int_E f\,d\mu$ *oder* ${}_*\int_E f\,d\mu$ *existiert.*

Beweis. Oberes und unteres Integral sind totaladditiv und erfüllen (1.1) nach [1], Satz 5.5 und 5.7. Es habe andererseits φ diese Eigenschaften, und es sei etwa $\varphi(E) < +\infty$. Ist dann $\mathfrak{X}$ eine Zerlegung von E, so folgt aus der unbedingten Konvergenz der Reihe $\varphi(E) = \sum_{X\in\mathfrak{X}} \varphi(X)$ und aus $\mu(X)\inf_X f \leq \varphi(X)$ nach [1], Satz 1.1 die Existenz von $\sigma_*(f, \mathfrak{X})$ und damit die von ${}_*\int_E f\,d\mu$.

Ist weder $*\int_E f\,d\mu$ noch $^*\int_E f\,d\mu$ vorhanden, so gibt es doch stets eine totaladditive Funktion φ, die die eine Hälfte

$$\varphi(M) \leq \mu(M) \sup_M f \tag{1.2}$$

des Mittelwertsatzes für jedes M aus $\mathfrak{S}$ erfüllt, z.B. $\varphi(O)=0$, $\varphi(M)=-\infty$, falls $M \in \mathfrak{S}-\{O\}$, oder auch $\varphi(M)=0$, wenn $M \in \mathfrak{N}$, $\varphi(M)=-\infty$, wenn $M \in \mathfrak{S}-\mathfrak{N}$. Ebenso kann die andere Hälfte $\mu(M) \inf_M f \leq \varphi(M)$ immer befriedigt werden. Um nun unter diesen Funktionen φ das obere oder untere Integral zu kennzeichnen, führen wir im System aller in $\mathfrak{S}$ definierten reellen Funktionen die (Halb-)Ordnung „$\varphi \leq \psi$, wenn $\varphi(M) \leq \psi(M)$ für jedes M aus $\mathfrak{S}$" ein. Der Einfachheit halber betrachten wir nur das obere Integral.

Satz 1.2. *Existiert* $^*\int_E f\,d\mu$, *so bildet die in* $\mathfrak{S}$ *durch* $\varphi_0(M) = {}^*\int_M f\,d\mu$ *definierte Funktion* φ_0 *die größte unter den in* $\mathfrak{S}$ *totaladditiven Mengenfunktionen* φ, *die* (1.2) *bei jeder Menge* M *aus* $\mathfrak{S}$ *erfüllen, also auch die größte unter denen, die* (1.1) *erfüllen.*

Beweis. φ_0 ist totaladditiv und befriedigt (1.1) und (1.2). Ist φ eine weitere in $\mathfrak{S}$ totaladditive Funktion, die (1.2) erfüllt, und $\mathfrak{X}$ eine Zerlegung einer Menge M aus $\mathfrak{S}$, die eine Obersumme von f erzeugt, so gilt

$$\varphi(M) = \sum_{X \in \mathfrak{X}} \varphi(X) \leq \sum_{X \in \mathfrak{X}} \mu(X) \sup_X f = \sigma^*(f, \mathfrak{X}),$$

also $\varphi(M) \leq {}^*\int_M f\,d\mu = \varphi_0(M)$ und damit $\varphi \leq \varphi_0$.

Die Sätze 1.1 und 1.2 und der Satz 6.1 aus [*1*] zeigen nun, daß es zu einer meßbaren Funktion f höchstens eine totaladditive Mengenfunktion φ gibt, mit der der Mittelwertsatz (1.1) gilt, und daß die HAHNschen Begriffe der Integrierbarkeit und des Integrals meßbarer Funktionen dasselbe liefern wie die aus [*1*], § 6.

Zur Definition des oberen Integrals nicht notwendig meßbarer Funktionen läßt sich der Satz 1.2 allerdings nicht immer verwenden, denn es kann, wie wir bald sehen werden, durchaus vorkommen, daß es unter den totaladditiven Funktionen φ, die der Ungleichung (1.2) genügen, eine größte φ_0 gibt, ohne daß $^*\int_E f\,d\mu$ existiert. Wir wollen daher zunächst notwendige Bedingungen dafür ableiten, daß mit φ_0 auch $^*\int_E f\,d\mu$ vorhanden ist.

Satz 1.3. *Bei jeder reellen in* E *erklärten Funktion* f *folge die Existenz von* $^*\int_E f\,d\mu$ *aus der Existenz einer größten unter den in* $\mathfrak{S}$ *totaladditiven Mengenfunktionen* φ, *die* (1.2) *für jedes* M *aus* $\mathfrak{S}$ *erfüllen. Dann gibt es zu jedem* K *aus* $\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$ *ein in* $\mathfrak{S}$ *definiertes endliches Maß* λ, *so daß* $\lambda(N)=0$ *für jedes* N *aus* $\mathfrak{N}$, *aber* $\lambda(K)>0$ *gilt.*

Beweis. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

1. K läßt sich nicht in zwei zueinander fremde Mengen aus $\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$ zerlegen.

2. Es gibt eine Zerlegung $K=P\cup Q$ mit $P\cap Q=O$ und $P,\ Q\in\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$.

Im ersten Fall hat offenbar das folgende Maß λ die verlangten Eigenschaften: $\lambda(X)=0$, wenn $X\cap K\in\mathfrak{N}$, und $\lambda(X)=1$, wenn $X\cap K\in\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$. Im zweiten Fall betrachten wir die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{wenn } x\in E-K,\\ -\infty, & \text{wenn } x\in Q,\\ +\infty, & \text{wenn } x\in P.\end{cases}$$

f ist zwar meßbar, aber nicht integrierbar über E. Ferner ist $\psi(M)=-\int\limits_M f^-\,d\mu$ in $\mathfrak{S}$ totaladditiv und es gilt $-\psi(M)\geq\mu(M)\inf\limits_M(f^-)$, also wegen [1], (1.11) auch

$$\psi(M)\leq-\mu(M)\left(\sup_M f\right)^-\leq\mu(M)\sup_M f.$$

Daher gibt es nach Voraussetzung eine totaladditive Funktion φ, die ebenfalls die Ungleichung (1.2) für jedes M aus $\mathfrak{S}$ erfüllt, und eine Menge L mit

$$\psi(L)<\varphi(L). \tag{1.3}$$

Nach Wahl von f und ψ gilt $\psi(M)=\mu(M)\sup\limits_M f$ für jede zu $\mathfrak{S}$ gehörige Teilmenge M von $E-K$ oder von Q, so daß aus (1.2) und aus

$$\begin{aligned}\psi\big(L\cap(E-K)\big)+\psi(L\cap Q)+\psi(L\cap P)&=\psi(L)\\ &<\varphi(L)=\varphi\big(L\cap(E-K)\big)+\varphi(L\cap Q)+\varphi(L\cap P)\end{aligned}$$

die Ungleichung $\psi(L\cap P)<\varphi(L\cap P)$ folgt. Infolgedessen können wir L sogar als Teilmenge von P bestimmen.

Wir definieren nun λ als die positive Variation von φ (vgl. z. B. [1], S. 96), also $\lambda=\overline{\varphi}$. Ist $N\in\mathfrak{N}$, so erhalten wir $\varphi(M)\leq 0$ nach (1.2) für jede Menge M aus $N\cap\mathfrak{S}$, also $\lambda(N)=0$. Aus (1.2) folgt ferner $\varphi(Q)=-\infty$, so daß λ endlich bleiben muß. Aus (1.3) und $\psi(L)=0$ ergibt sich schließlich wegen $L\subseteqq K$ die letzte Behauptung $\lambda(K)>0$.

§ 2. Die Hauptsätze.

Wir wollen den Fall betrachten, in dem die fragliche Charakterisierung des oberen Integrals bei festgehaltenem $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ bei jeder in E definierten reellen Funktion f und jedem in $\mathfrak{S}$ erklärten Maß ν, das in $\mathfrak{N}$ verschwindet, möglich ist. $\mathfrak{S}$ sei wiederum ein Borelscher Ring mit einer größten Menge E und $\mathfrak{N}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$, d. h. ein in $\mathfrak{S}$ enthaltener Borelscher Ring, dem mit jeder Menge N auch jede in $\mathfrak{S}$ liegende Teilmenge von N angehört. Ist ν ein Maß in $\mathfrak{S}$, so bildet das System $\mathfrak{N}_\nu$ aller Mengen M aus $\mathfrak{S}$ mit $\nu(M)=0$ ebenfalls ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$. Andererseits gibt es zu jedem Borelschen Ideal $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{S}$ ein Maß ν mit $\mathfrak{N}_\nu=\mathfrak{J}$, z. B. $\nu(M)=0$, wenn $M\in\mathfrak{J}$, und $\nu(M)=+\infty$, wenn $M\in\mathfrak{S}-\mathfrak{J}$.

Satz 2.1. *Die beiden folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

I. Für jedes in $\mathfrak{S}$ definierte Maß ν mit $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_\nu$ und jede in E erklärte reelle Funktion f gilt: gibt es unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven Mengenfunktionen φ, die der Ungleichung

$$\varphi(M) \leq \nu(M) \sup_M f \tag{2.1}$$

für jedes M aus $\mathfrak{S}$ genügen, eine größte, so existiert $^*\int_E f\,d\nu$.

II. Zu jedem BORELschen *Ideal $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{N}$ umfaßt, und jeder Menge K aus $\mathfrak{S}-\mathfrak{J}$ gibt es ein in $\mathfrak{S}$ erklärtes endliches Maß λ, so daß zwar $\lambda(I)=0$ für jedes I aus $\mathfrak{J}$, hingegen $\lambda(K)>0$ wird.*

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{J}$ ein BORELsches, $\mathfrak{N}$ umfassendes Ideal in $\mathfrak{S}$, so gibt es, wie eben gezeigt, in $\mathfrak{S}$ ein Maß ν mit $\mathfrak{N}_\nu = \mathfrak{J}$. Hiernach und nach Satz 1.3 folgt II aus I.

2. Im Beweis dafür, daß I aus II folgt, können wir uns auf ein spezielles Maß ν mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\nu$ beschränken. Unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven Funktionen φ, die (2.1) erfüllen, gebe es eine größte φ_0. Nach [*1*], Satz 5.8 dürfen wir, um zu zeigen, daß $^*\int_E f\,d\nu$ existiert, $^*\int_E f^-\,d\nu = +\infty$ voraussetzen und brauchen nur die Ungleichung

$$^*\int_E f^+\,d\nu < +\infty \tag{2.2}$$

zu beweisen.

3. Nach [*1*], (5.1) und [*1*], § 5, Hilfssatz 5 gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{X}$ von E mit $\sum_{X\in\mathfrak{X}} \nu(X)\left(\sup_X f\right)^- = +\infty$. Nach Voraussetzung ist ferner

$$\varphi_0(X) \leq \nu(X) \sup_X f \tag{2.3}$$

für jedes X aus $\mathfrak{S}$, also $\varphi_0(X)^- \geq \nu(X)\left(\sup_X f\right)^-$, so daß $\sum_{X\in\mathfrak{X}} \varphi_0(X)^- = +\infty$ und damit $\varphi_0(E) = \sum_{X\in\mathfrak{X}} \varphi_0(X) = -\infty$ wird. Folglich gilt

$$\varphi_0(M) < +\infty \tag{2.4}$$

für jedes M aus $\mathfrak{S}$.

4. Eine Menge M aus $\mathfrak{S}$ sei so beschaffen, daß $^*\int_M f\,d\nu$ existiert. Aus Satz 1.2, angewandt auf $M \cap \mathfrak{S}$ statt auf $\mathfrak{S}$, folgt dann $\varphi_0(M) \leq {}^*\int_M f\,d\nu$. Ist nun $^*\int_M f\,d\nu < +\infty$, so bildet

$$\varphi(X) = \varphi_0(X-M) + {}^*\int_{X\cap M} f\,d\nu$$

auf Grund von (2.4) eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Funktion, die wegen

$$\varphi_0(X-M) \leq \nu(X-M) \sup_{X-M} f \leq \nu(X-M) \sup_X f,$$

$$^*\int_{X\cap M} f\,d\nu \leq \nu(X\cap M) \sup_{X\cap M} f \leq \nu(X\cap M) \sup_X f$$

und $\nu(X-M)\sup_X f+\nu(X\cap M)\sup_X f=\nu(X)\sup_X f$ auch noch (2.1) erfüllt. Infolgedessen gilt $\varphi\leq\varphi_0$, insbesondere $\varphi(M)\leq\varphi_0(M)$, d.h. ${}^*\int_M f\,d\nu\leq\varphi_0(M)$, also ${}^*\int_M f\,d\nu=\varphi_0(M)$.

5. Wir zerlegen E in zwei zueinander fremde Mengen P und Q aus $\mathfrak{S}$ derart, daß $\varphi_0(P)=\max_{X\in\mathfrak{S}}\varphi_0(X)$ und $\varphi_0(Q)=\min_{X\in\mathfrak{S}}\varphi_0(X)$ wird, also $-\infty=\varphi_0(Q)\leq\varphi_0(X)\leq 0$ für jedes X aus $Q\cap\mathfrak{S}$ und $0\leq\varphi_0(X)\leq\varphi_0(P)<+\infty$ für jedes X aus $P\cap\mathfrak{S}$.

6. Ist $X\in P\cap\mathfrak{S}$ und $\nu(X)>0$, so gilt wegen (2.3): $\sup_X f\geq 0$, also nach [1]; (1.11): $\sup_X f=\left(\sup_X f\right)^+=\sup_X(f^+)$. Somit ist ${}^*\int_M f\,d\nu$ für jede Menge M aus $P\cap\mathfrak{S}$ vorhanden und

$$(2.5)\qquad {}^*\int_M f\,d\nu={}^*\int_M f^+\,d\nu.$$

Aus (2.4) und aus dem unter 4. Bewiesenen folgt daher, daß die in $\mathfrak{S}$ durch

$$(2.6)\qquad \varrho(M)={}^*\int_{M\cap P} f\,d\nu-\varphi_0(M\cap P)$$

definierte Funktion ϱ ein Maß darstellt und nur die Werte 0 und $+\infty$ annimmt. Zugleich gilt $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{N}_\varrho\subseteq\mathfrak{S}$. Wäre nun $P\in\mathfrak{S}-\mathfrak{N}_\varrho$, so existierte nach Voraussetzung ein endliches Maß λ mit $\lambda(P)>0$, das in $\mathfrak{N}_\varrho$ verschwände. Die Funktion $\varphi=\varphi_0+\lambda$ wäre daher in $\mathfrak{S}$ totaladditiv, fiele in $Q\cap\mathfrak{S}$ mit φ_0 zusammen und erfüllte für jedes M aus $P\cap\mathfrak{S}$ die Ungleichung $\varphi(M)\leq{}^*\int_M f\,d\nu$, da deren rechte Seite gleich $+\infty$ wäre, sobald die linke φ_0 überträfe. Hieraus und aus (2.3) folgte die Abschätzung (2.1) ähnlich wie in Teil 4 des Beweises für jedes M aus $\mathfrak{S}$ im Widerspruch zur Definition von φ_0 und zu $\varphi_0(P)<\varphi(P)$. Somit ist $P\in\mathfrak{N}_\varrho$, d.h. $\varrho(P)=0$, also wegen (2.4) bis (2.6):

$${}^*\int_P f^+\,d\nu={}^*\int_P f\,d\nu=\varphi_0(P)<+\infty.$$

7. In ganz ähnlicher Weise läßt sich nun ${}^*\int_Q f^+\,d\nu=0$ und damit die Behauptung (2.2) beweisen. Ist $M\in Q\cap\mathfrak{S}$ und ${}^*\int_M f^+\,d\nu<+\infty$, so existiert ${}^*\int_X f\,d\nu$ für jede Menge X aus $M\cap\mathfrak{S}$ und ist kleiner als $+\infty$. Nach Teil 4 des Beweises wird daher ${}^*\int_X f\,d\nu=\varphi_0(X)\leq 0$ für jedes X aus $M\cap\mathfrak{S}$, woraus nach [1], Satz 5.8 folgt ${}^*\int_M f^+\,d\nu=\overline{{}^*\int_M}\,f\,d\nu=0$. Die in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion $\sigma(M)={}^*\int_{M\cap Q} f^+\,d\nu$ nimmt also nur die Werte 0 und $+\infty$ an. Wäre nun $\sigma(Q)>0$, so existierte in $\mathfrak{S}$ ein endliches Maß λ mit $\lambda(Q)>0$ und $\lambda(M)=0$ für jedes M aus $\mathfrak{N}_\sigma$. Die Funktion $\varphi=\varphi_0+\lambda$ wäre in $\mathfrak{S}$ totaladditiv und die Abschätzung (2.1) folgte im Fall $\lambda(M)=0$ aus (2.3). Im Fall $\lambda(M)>0$ hingegen wäre

${}^*\int_M f^+ d\nu = +\infty$, also $\nu(M)(\sup_M f)^+ = \nu(M)\sup_M(f^+) = +\infty$ und damit auch $\nu(M)\sup_M f = +\infty$, so daß wiederum (2.1) gälte. Mithin müßte $\varphi \leq \varphi_0$ sein im Widerspruch zu $\varphi(Q) > \varphi_0(Q)$.

Satz 2.2. *$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ erfüllen die Bedingung II aus Satz 2.1 sicher dann, wenn es ein schwach endliches in $\mathfrak{S}$ definiertes Maß μ mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\mu$ gibt.*

Beweis. In diesem Fall existiert in $\mathfrak{S}$ offenbar auch ein endliches Maß μ' mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\mu'}$, z. B.

$$\mu'(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\mu(X \cap A_i)}{\mu(A_i)},$$

wenn (A_i) eine Folge aus $\mathfrak{S}$ mit $0 < \mu(A_i) < +\infty$ und $E = \bigcup_i A_i$ bedeutet. Die Funktion $\varkappa(X) = 0$, wenn $X \in \mathfrak{J}$, und $\varkappa(X) = +\infty$, wenn $X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$, ist totaladditiv und μ'-stetig, läßt sich also nach dem RADON-NIKODYMschen Satz (vgl. z. B. [2], S. 169) in der Gestalt $\varkappa(X) = \int_X g\, d\mu'$ mit einer in E erklärten nichtnegativen μ'-meßbaren Funktion g darstellen. Setzen wir $h(x) = 0$, wenn $g(x) = 0$, und $h(x) = 1$, falls $g(x) > 0$ ist, so bildet $\lambda(X) = \int_X h\, d\mu'$ sogar ein endliches Maß λ mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{N}_\lambda$.

Kehren wir nun zum Ausgangspunkt, einem festen Maß μ mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\mu$ und einer festen in E erklärten Funktion f zurück, so erhalten wir insbesondere den

Satz 2.3. *Ist μ schwach endlich und gibt es unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven Mengenfunktionen φ, die (1.2) bei jeder Menge M aus $\mathfrak{S}$ erfüllen, eine größte, so existiert ${}^*\int_E f\, d\mu$.*

Der direkte Beweis dieses Satzes wäre etwas einfacher als der Umweg über die Sätze 2.1 und 2.2. Wir wollen jedoch auf ihn verzichten und statt dessen die folgende, nicht unmittelbar aus Satz 2.1 ableitbare Feststellung direkt verifizieren, wobei das Beweisprinzip ebenfalls hervortritt.

Satz 2.4. *Ist μ schwach endlich, so existiert dann und nur dann genau eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion φ, die dem Mittelwertsatz (1.1) bei jeder Menge M aus $\mathfrak{S}$ genügt, wenn f fast meßbar[2]) und integrierbar über E ist.*

Beweis. Ist f fast meßbar, so existiert, wie im Anschluß an Satz 1.2 festgestellt, höchstens eine Funktion φ mit den fraglichen Eigenschaften, und aus der Integrierbarkeit von f folgt, daß es mindestens eine gibt.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, es gebe genau eine, φ_0, und es sei etwa

$$\varphi_0(E) < +\infty. \tag{2.7}$$

Wie im Beweis zu Satz 1.1 gezeigt, ist dann ${}_*\int_E f\, d\mu$ vorhanden. Nach [1], Satz 6.3 brauchen wir daher, um die Fastmeßbarkeit und Integrierbarkeit von f zu erhalten, nur noch die Existenz von ${}^*\int_E f\, d\mu$ zu beweisen.

[2]) Vgl. [1], S. 110.

P sei eine meßbare Hülle der Menge $\{x: f(x) > 0\}$ im engeren Sinne und $Q = E - P$. Aus $f(x) \leq 0$ für jedes x aus Q folgt

$$(2.8) \qquad {}^*\int_Q f^+ \, d\mu = 0.$$

Da ferner keine in P enthaltene Menge X aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{N}$ fremd zu $\{x: f(x) > 0\}$ sein kann, so wird $\sup_X f > 0$ für jede derartige Menge X, woraus bei beliebigem M aus $P \cap \mathfrak{S}$ die Existenz von ${}^*\int_M f \, d\mu$ und die Gleichung

$$(2.9) \qquad {}^*\int_M f \, d\mu = {}^*\int_M f^+ \, d\mu$$

folgen.

Bedeutet $\overline{\varphi}_0$ die positive Variation von φ_0, so bildet $\varphi(M) = \varphi_0(M \cap Q) + \overline{\varphi}_0(M \cap P)$ wegen (2.7) in $\mathfrak{S}$ eine totaladditive Funktion, die wegen $\varphi_0 \leq \varphi$ die erste Hälfte des Mittelwertsatzes (1.1) erfüllt. Um zu zeigen, daß φ auch die zweite Hälfte von (1.1) erfüllt, genügt es auf Grund des gleichen Schlusses wie in Teil 4 des Beweises zu Satz 2.1, allein die Fälle $M \subseteq Q$ und $M \subseteq P$ zu betrachten. Im ersten Fall ist aber $\varphi(M) = \varphi_0(M)$. Im zweiten Fall gilt für jede in M enthaltene Menge X aus $\mathfrak{S}$ mit $\mu(X) > 0$ die Ungleichung $\sup_X f > 0$, also $\varphi_0(X) \leq \mu(X) \sup_X f \leq \mu(M) \sup_X f \leq \mu(M) \sup_M f$, was natürlich auch im Fall $\mu(X) = 0$ richtig bleibt. Daher ist $\varphi(M) = \overline{\varphi}_0(M) \leq \mu(M) \sup_M f$. Nach Definition von φ_0 muß also $\varphi_0 = \varphi$, d.h. $\varphi_0(P) = \varphi(P) = \overline{\varphi}_0(P)$, insbesondere

$$(2.10) \qquad 0 \leq \varphi_0(P)$$

sein.

Nach Satz 1.2, angewandt auf $P \cap \mathfrak{S}$ statt auf $\mathfrak{S}$, gilt $\varphi_0(M) \leq {}^*\int_M f \, d\mu$ für jedes M aus $P \cap \mathfrak{S}$. Ist ${}^*\int_M f \, d\mu < +\infty$, so wird $\varphi(X) = \varphi_0(X - M) + {}^*\int_{X \cap M} f \, d\mu$ wegen (2.7) wieder totaladditiv in $\mathfrak{S}$, und der gleiche Schluß wie eben zeigt, daß φ auch dem Mittelwertsatz (1.1) genügt. Somit muß $\varphi = \varphi_0$, insbesondere $\varphi(M) = \varphi_0(M)$, d.h. ${}^*\int_M f \, d\mu = \varphi_0(M)$ sein. Daher nimmt die wegen (2.7) und (2.9) in $\mathfrak{S}$ totaladditive Funktion $\varrho(M) = {}^*\int_{M \cap P} f \, d\mu - \varphi_0(M \cap P)$ nur die Werte 0 und $+\infty$ an und es gilt $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_\varrho \subseteq \mathfrak{S}$. Ist λ ein endliches, in $\mathfrak{N}_\varrho$ verschwindendes Maß, so erfüllt $\varphi = \varphi_0 + \lambda$ die zweite Hälfte der Abschätzungen (1.1), aber wegen $\varphi \geq \varphi_0$ natürlich auch die erste, so daß $\varphi = \varphi_0$, d.h. wegen (2.7) und (2.10) $\lambda(P) = 0$ sein muß. Dies kann nach Satz 2.2 nur dann auf jedes derartige λ zutreffen, wenn $P \in \mathfrak{N}_\varrho$, d.h. $\varrho(P) = 0$ und damit wegen (2.9) auch

$$(2.11) \qquad {}^*\int_P f^+ \, d\mu = \varphi_0(P) < +\infty$$

gilt. Aus (2.8) und (2.11) folgt die Existenz von ${}^*\int_E f \, d\mu$.

Der hiermit bewiesene Satz 2.4 läßt sich als eine Rechtfertigung der der HAHNschen Integraldefinition zugrunde gelegten Annahme der Meßbarkeit des Integranden auffassen.

§ 3. Beispiele.

Die folgenden Beispiele sollen erkennen lassen, warum der Hauptsatz dieser Arbeit, der Satz 2.1, in einer so komplizierten Formulierung gegeben wurde, in der gleichzeitig alle $\mathfrak{N}$ enthaltenden BORELschen Ideale in $\mathfrak{S}$ und alle in $\mathfrak{S}$ definierten und in $\mathfrak{N}$ verschwindenden Maße vorkommen. Wir werden zunächst zeigen, daß sich der Satz 1.3 nicht umkehren läßt, d.h. daß bei festem μ mit $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\mu$ die Bedingung:

II'. Zu jedem K aus $\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$ gibt es ein endliches in $\mathfrak{N}$ verschwindendes Maß λ mit $\lambda(K)>0$

zur gewünschten Charakterisierung der oberen Integrale bezüglich μ nicht hinreicht. Sodann werden wir beweisen, daß andererseits die stärkere Bedingung II aus Satz 2.1 bei festem μ nicht notwendig für diese Charakterisierung ist. Schließlich soll dargetan werden, daß die in Satz 2.2 betrachtete Bedingung, es gebe in $\mathfrak{S}$ ein schwach endliches Maß μ mit $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\mu$, wirklich stärker als die Bedingung II ist.

Zur Konstruktion des *ersten Beispiels* nehmen wir zwei zueinander fremde Mengen P und W der Mächtigkeit $\aleph_1$, ein nicht in $P\cup W$ liegendes Element q und eine eineindeutige Abbildung h von P auf W und setzen $E=P\cup W\cup\{q\}$. Es sei $\mathfrak{T}$ der BORELsche Ring aller Teilmengen von $P\cup W$, die sich in der Gestalt $X\cup h(X)$ mit $X\subseteq P$ darstellen lassen, und $\mathfrak{S}$ der BORELsche Ring aller Teilmengen M von E, zu denen es eine Menge T aus $\mathfrak{T}$ gibt, so daß die symmetrische Differenz $M\triangle T$ höchstens abzählbar ist. Offenbar gilt $E\in\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{S}$ enthält alle höchstens abzählbaren Teilmengen von E.

Wir betrachten nun ein endliches in $\mathfrak{S}$ erklärtes Maß $\varkappa$, das auf jeder einelementigen und damit auf jeder abzählbaren Teilmenge von E verschwindet. Sind X und Y zwei zueinander fremde Teilmengen von P, so sind $X\cup h(X)$ und $Y\cup h(Y)$ zwei zueinander fremde und in $\mathfrak{T}$ liegende Teilmengen von E, und infolgedessen bildet die Funktion $\varrho(X)=\varkappa\big(X\cup h(X)\big)$ im Bereich aller Teilmengen von P ein endliches Maß, das auf jeder abzählbaren Teilmenge von P den Wert Null annimmt. Daher folgt nach einem Satz von ULAM [3] aus der Voraussetzung, P habe die Mächtigkeit $\aleph_1$, die Gleichung $\varrho=0$ und damit $\varkappa(T)=0$ für jede Menge T aus $\mathfrak{T}$. Benutzen wir noch einmal, daß $\varkappa$ auf jeder abzählbaren Menge den Wert Null annimmt, so erhalten wir sogar $\varkappa(M)=0$ für jedes M aus $\mathfrak{S}$.

In $\mathfrak{S}$ definieren wir jetzt $\mu(M)=0$, wenn $M\subset P$, und sonst $\mu(M)=+\infty$, so daß $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\mu$ aus allen höchstens abzählbaren Teilmengen von P besteht. Die reelle Funktion

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{wenn} \quad x\in W\\ 1, & \text{wenn} \quad x\in P\\ -1, & \text{wenn} \quad x=q,\end{cases}$$

hat dann kein oberes Integral; einerseits ist nämlich $*\int_E f^- d\mu = \mu(\{q\}) = +\infty$, andererseits $*\int_E f^+ d\mu = +\infty$, weil jede Zerlegung von E wegen $P \notin \mathfrak{S}$ eine Komponente X mit $X \cap P \neq 0$ und $X \cap (E-P) \neq 0$, d.h. $\sup_X (f^+) = 1$ und $\mu(X) = +\infty$ enthält. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ erfüllen die Bedingung II', denn jede Menge K aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{N}$ hat mit $E-P$ mindestens einen Punkt z gemeinsam, und das Maß $\lambda(M) = 0$, wenn $z \notin M$, und $\lambda(M) = 1$, wenn $z \notin M$, ist endlich und verschwindet in $\mathfrak{N}$, aber nicht auf der Menge K.

Dennoch gibt es unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven und die Ungleichung (1.2) erfüllenden Funktionen φ eine größte, nämlich $\varphi_0(M) = 0$, falls $q \notin M$, und $\varphi_0(M) = -\infty$, falls $q \in M$. Zum Beweis nehmen wir an, es existiere eine weitere derartige Funktion φ und eine Menge L aus $\mathfrak{S}$ mit

$$\varphi_0(L) < \varphi(L). \tag{3.1}$$

Aus (1.2) würde dann folgen

$$\varphi(\{q\}) = -\infty, \tag{3.2}$$

so daß L wegen (3.1) das Element q nicht enthalten könnte. Hieraus ergäbe sich $\varphi_0(L) = 0$, d.h. nach (3.1):

$$0 < \varphi(L). \tag{3.3}$$

Daher wäre die obere Variation $\varkappa = \overline{\varphi}$ in $\mathfrak{S}$ ein nicht identisch verschwindendes und wegen (3.2) auch endliches Maß. Aus (1.2) und der Definition von μ und f resultierte überdies $\varphi(M) \leq 0$ und damit $\varkappa(M) = 0$ für jede einelementige Menge M. Ein solches Maß $\varkappa$ kann aber, wie oben gezeigt, nicht existieren.

In unserem *zweiten Beispiel* sei E eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$, $\mathfrak{S}$ das System aller Teilmengen von E und $\mu(X)$ die Mächtigkeit von X, wenn X endlich ist, andernfalls $\mu(X) = +\infty$. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N} = \{0\}$ erfüllen die Bedingung II nicht, denn jedes in $\mathfrak{S}$ erklärte endliche Maß, das im BORELschen Ideal aller höchstens abzählbaren Teilmengen von E verschwindet, ist überall gleich Null (vgl. ULAM [3]). Wir werden nun zeigen, daß es dennoch keine größte totaladditive und (1.2) befriedigende Funktion φ gibt, wenn die in E erklärte reelle Funktion f nicht integrierbar ist.

Wir bemerken zunächst, daß in diesem Fall wegen der Meßbarkeit von f gilt

$$\int_E f^+ d\mu = \int_E f^- d\mu = +\infty. \tag{3.4}$$

Sodann bestimmen wir eine höchstens abzählbare Teilmenge $R = \{p_1, p_2, \ldots\}$ von E mit $0 < f(p_i)$ und $\sum_i f(p_i) = +\infty$. Gäbe es nämlich eine solche Menge nicht, so wäre jede der Mengen $\left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ endlich, d.h. $P = \{x : f(x) > 0\}$ wäre höchstens abzählbar, also auch $\sum_{x \in P} f(x) < +\infty$ im Widerspruch zu (3.4) und zu $\sum_{x \in P} f(x) = \int_E f^+ d\mu$.

Bedeutet jetzt φ irgendeine totaladditive und der Ungleichung (1.2) genügende Funktion, so folgt aus (1.2) und (3.4), daß $\varphi(E) = -\infty$ und damit φ nach oben durch eine endliche Zahl γ beschränkt ist. Es gibt dann eine endliche oder abzählbare Folge (α_i) reeller Zahlen mit

$$(3.5) \qquad 0 < \alpha_i < f(p_i), \qquad \gamma < \sum_i \alpha_i < +\infty.$$

Die Funktion $\varrho(M) = \sum_{p_i \in M} \alpha_i$ ist in $\mathfrak{S}$ totaladditiv und endlich und läßt sich wegen (3.5) durch $\varrho(M) \leq \mu(M \cap R) \sup_{M \in R} f \leq \mu(M \cap R) \sup_M f$ abschätzen. Für jedes M aus $\mathfrak{S}$ gilt außerdem $-\int_{M-R} f^-\, d\mu \leq \mu(M-R) \sup_{M-R} f \leq \mu(M-R) \sup_M f$, so daß $\psi(M) = -\int_{M-R} f^-\, d\mu + \varrho(M)$ ebenfalls totaladditiv ist mit $\psi(M) \leq \mu(M) \sup_M f$. Zugleich folgt aus (3.5) und der Definition von γ die Ungleichung $\psi(R) = \varrho(R) > \gamma \geq \varphi(R)$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß μ ein RADONsches Maß in dem vermöge der diskreten Topologie lokal-kompakten Raum E ist.

Zur Bildung des *dritten Beispiels* verwenden wir eine überabzählbare Menge E, definieren $\mathfrak{S}$ als System aller Teilmengen von E, die entweder höchstens abzählbar sind oder in E eine höchstens abzählbare Komplementärmenge haben, und setzen $\mathfrak{N} = \{O\}$. Es gibt offenbar in $\mathfrak{S}$ kein endliches und infolgedessen auch kein schwach endliches Maß μ mit $\mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}$, weil zu einem solchen Maß nur endlich oder abzählbar viele Elemente x mit $\mu(\{x\}) > 0$ existieren könnten. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ erfüllen aber die Bedingung II. Bedeutet nämlich $\mathfrak{J}$ ein BORELsches Ideal in $\mathfrak{S}$ und K eine nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörige Menge aus $\mathfrak{S}$, so lassen sich die beiden folgenden Fälle unterscheiden:

1. Es gibt ein Element p aus K, so daß $\{p\} \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$.

2. $\mathfrak{J}$ enthält jede einelementige, also auch jede höchstens abzählbare Teilmenge von K.

Im ersten Fall setzen wir, falls $M \in \mathfrak{S}$ ist, $\lambda(M) = 0$, wenn $p \notin M$, und $\lambda(M) = 1$, wenn $p \in M$. Im zweiten Fall enthält $\mathfrak{J}$ nur höchstens abzählbare Mengen, denn gäbe es eine überabzählbare Menge J aus $\mathfrak{J}$, so wäre $E - J$ nach Definition von $\mathfrak{S}$ höchstens abzählbar, also erst recht $K \cap (E - J)$. Nach Voraussetzung gehörte dann $K \cap (E - J)$ zu $\mathfrak{J}$, ebenso natürlich $K \cap J$ als Teilmenge von J, also auch K im Widerspruch zur Annahme $K \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$. Ferner muß K überabzählbar sein. Setzen wir nun $\lambda(M) = 0$, wenn M höchstens abzählbar ist, und $\lambda(M) = 1$, wenn $E - M$ höchstens abzählbar ist, so haben wir wiederum ein endliches in $\mathfrak{J}$ verschwindendes Maß λ mit $\lambda(K) > 0$.

Wir wollen schließlich, um das Operieren mit der Bedingung II zu erleichtern, zwei naheliegende Fälle angeben, in denen sich diese Bedingung über $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ aus der gleichen auf gewisse andere Mengensysteme zutreffenden Bedingung ableiten läßt.

Bedeutet μ ein Maß mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{S}$, ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\mu$ und μ' die Einschränkung von μ auf einen in $\mathfrak{S}$ enthaltenen BORELschen Ring $\mathfrak{T}$, so gilt $\mathfrak{N}_{\mu'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$. Dies motiviert die Formulierung des folgenden Satzes.

Satz 3.1. *$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien* Borelsche *Ringe mit $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$, ferner $\mathfrak{N}$ ein* Borelsches *Ideal in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$. Erfüllen nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ die Bedingung II, so auch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$.*

Beweis. $\mathfrak{J}$ sei ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{T}$, das $\mathfrak{M}$ enthält, und K eine Menge aus $\mathfrak{T} - \mathfrak{J}$. Das System $\mathfrak{J}$ aller zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Teilmengen aller Mengen, die sich in der Gestalt $N \cup J$ mit $N \in \mathfrak{N}$ und $J \in \mathfrak{J}$ darstellen lassen, bildet offenbar ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{J}$ enthält. Wäre nun $K \in \mathfrak{J}$, so gäbe es also eine Menge N aus $\mathfrak{N}$ und eine Menge J aus $\mathfrak{J}$ mit $K \subseteq N \cup J$, d.h. $K = (K \cap (N - J)) \cup (K \cap J)$. Wegen $K \in \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{T}$ wäre $K \cap J \in \mathfrak{T}$, d.h. auch $K \cap (N - J) \in \mathfrak{T}$. Da andererseits $K \cap (N - J)$ eine in $\mathfrak{S}$ liegende Teilmenge von N wäre und damit zu $\mathfrak{N}$ gehörte, gälte sogar $K \cap (N - J) \in \mathfrak{M}$, folglich erst recht $K \cap (N - J) \in \mathfrak{J}$. Aus $K \cap J \in \mathfrak{T}$, $K \cap J \subseteq J$ und $J \in \mathfrak{J}$ ergäbe sich, da $\mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{T}$ bildet, $K \cap J \in \mathfrak{J}$ und damit $K \in \mathfrak{J}$ im Widerspruch zu $K \in \mathfrak{T} - \mathfrak{J}$. Somit ist $K \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$, so daß ein in $\mathfrak{S}$ definiertes endliches Maß λ mit $\lambda(K) > 0$ existiert, das in $\mathfrak{J}$ verschwindet. Die Einschränkung von λ auf $\mathfrak{T}$ ist nun in $\mathfrak{T}$ erklärt, endlich, verschwindet in $\mathfrak{J}$ und erfüllt die Bedingung $\lambda(K) > 0$.

Dem folgenden Satz sei die Bemerkung vorausgeschickt, daß $D \cap \mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $D \cap \mathfrak{S}$ darstellt, wenn $\mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$ und $D \in \mathfrak{S}$ ist.

Satz 3.2. *Die größte Menge E eines* Borelschen *Ringes $\mathfrak{S}$ sei die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen E_i aus $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{N}$ bedeute ein* Borelsches *Ideal in $\mathfrak{S}$. Erfüllen dann $E_i \cap \mathfrak{S}$ und $E_i \cap \mathfrak{N}$ für jedes i die Bedingung II, so auch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{N}$ enthält, und $K \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$, so gibt es i mit $E_i \cap K \in (E_i \cap \mathfrak{S}) - (E_i \cap \mathfrak{J})$, d.h. ein in $E_i \cap \mathfrak{S}$ erklärtes endliches Maß λ' mit $\lambda'(E_i \cap K) > 0$, aber $\lambda'(E_i \cap J) = 0$, falls $J \in \mathfrak{J}$. Das in $\mathfrak{S}$ durch $\lambda(M) = \lambda'(E_i \cap M)$ definierte Maß λ hat nun die verlangten Eigenschaften.

Übrigens ist die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes ein Spezialfall des Satzes 3.1.

Literatur.

[1] Krickeberg, K.: Zur Theorie des oberen und unteren Integrals. Math. Nachr. **9**, 86—128 (1953). — [2] Hahn-Rosenthal: Set functions. Albuquerque 1948. — [3] Ulam, S.: Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fundamenta Math. **16**, 140—150 (1930). [4] Cotlar, M.-Y. Frenkel: Sobre las funciones no-additivas de conjunto y generalización de la descomposición de la Vallée Poussin. Univ. Nac. Tucumán, Revista A. **5**, 227—253 (1946).

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. August 1954.)

RAGAB, F. M.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 386—390 (1955)

New integrals involving Bessel-functions.

By

F. M. RAGAB.

§ 1. Introduction.

In § 3 of this paper, new integrals involving the product of two Bessel-functions as well as the product of three Bessel-functions will be evaluated. The integrals are

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_n(x\lambda^\varepsilon)\, K_m(e^{i\pi} x\lambda^\varepsilon)\, f(\lambda)\, d\lambda$$

where $\varepsilon = \pm 1$ and where $f(\lambda)$ is one of the functions

$$e^{-\lambda},\quad J_1(2\lambda),\quad K_1(2\lambda),\quad e^{-\lambda} I_1(\lambda)$$

subject to the conditions for convergence. Some of these integrals will be evaluated in terms of MACROBERT's E-functions and the rest in terms of ordinary generalized hypergeometric functions. It may be noted that the formulae, expressing the values of the integrals, may serve as a basis for discussion of the asymptotic behavior of the integrals for large values of $|x|$, since the asymptotic expansion of the E-function was given by MACROBERT [1], p. 358 and that of the generalized hypergeometric function has been investigated by several writers (BARNES [2], 68, 83, 115, and MEIJER [3], 1173). The integrals will be evaluated by means of the formula

$$\begin{aligned} K_n(x)\, K_m(e^{i\pi} x) = {} & \frac{\cos\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{m-n}{2}\right)}{2ix\sqrt{\pi}} \times \\ & \times E\left(\frac{1+n+m}{2}, \frac{1+n-m}{2}, \frac{1+m-n}{2}, \frac{1-n-m}{2} : \frac{1}{2} : e^{i\pi} x^2\right) + \\ & + i\,\frac{\cos\pi\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}{2x^2\sqrt{\pi}} \times \\ & \times E\left(\frac{2+m+n}{2}, \frac{2+m-n}{2}, \frac{2+n-m}{2}, \frac{2-n-m}{2} : \frac{3}{2} : e^{i\pi} x^2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Formula (1) will be deduced from (2) below.

§ 2. A product of two E-functions expressed as the sum of two E-functions.

The formula to be proved is

$$(2)\quad \begin{cases} E(\alpha, 1-\alpha :: i\,x)\,E(\beta, 1-\beta :: -i\,x) = \dfrac{\sqrt{\pi}\sin\pi\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}\times \\ \quad \times E\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2} : \frac{1}{2} : \frac{x^2}{4}\right)+ \\ \quad + \dfrac{2i\sqrt{\pi}}{x}\dfrac{\cos\pi\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}\times \\ \quad \times E\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}, \frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2} : \frac{3}{2} : \frac{x^2}{4}\right). \end{cases}$$

The following formulae ([1], p. 353 and [4]) will be required in the proof:

$$(3)\quad \begin{cases} E(p; \alpha_r : q; \varphi_s : x) = \sum_{r=1}^{p} \prod_{s=1}^{p}{}' \Gamma(\alpha_s - \alpha_r)\left\{\prod_{t=1}^{q}\Gamma(\varphi_t - \alpha_r)\right\}^{-1} x^{\alpha_r}\Gamma(\alpha_r)\times \\ \quad \times F(\alpha_r, \alpha_r-\varphi, +1, \ldots, \alpha_r-\varphi_q+1; \alpha_r-\alpha_1+1, \ldots *\ldots, \alpha_r-\alpha_p+1; (-1)^{p-q}x). \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} {}_1F_1(\alpha; 2\alpha; x)\times {}_1F_1(\beta; 2\beta; -x) \\ = {}_2F_3\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1); \alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \alpha+\beta; \frac{x^2}{4}\right]. \end{cases}$$

To prove (2), expand each of the two E-functions on the right hand side R by means of (3), sum any two similar terms, and get

$$\begin{aligned} R = {} & \Gamma(1-2\alpha)\,\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(\alpha-\beta)}\times \\ & \times x^{\alpha+\beta}\,{}_2F_3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \alpha+\beta; -\frac{x^2}{4}\right)+ \\ & + \Gamma(1-2\alpha)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2\beta-1)\,\Gamma(1-\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(\alpha+\beta-1)}\times \\ & \times x^{1+\alpha-\beta}\,{}_2F_3\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}, \frac{2+\alpha-\beta}{2}; 1+\alpha-\beta, \frac{3}{2}-\beta, \frac{1}{2}+\alpha; -\frac{x^2}{4}\right)+ \\ & + \Gamma(2\alpha-1)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(1-\alpha-\beta)}\times \\ & \times x^{1+\beta-\alpha}\,{}_2F_3\left(\frac{1-\alpha+\beta}{2}, \frac{2-\alpha+\beta}{2}; 1+\beta-\alpha, \frac{3}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\beta; -\frac{x^2}{4}\right)+ \\ & + \Gamma(2\alpha-1)\,\Gamma(2\beta-1)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(\beta-\alpha)}\times \\ & \times x^{2-\alpha-\beta}\,{}_2F_3\left(\frac{2-\alpha-\beta}{2}, \frac{3-\alpha-\beta}{2}; \frac{3}{2}-\alpha, \frac{3}{2}-\beta, 2-\alpha-\beta; -\frac{x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Now substitute for each ${}_2F_3$ in the last expression from (4); then (2) is obtained by another application of (3).

To obtain (1), write $(2x)$ for (xi) in (2) and apply the formula [1], p. 351

$$\cos n\pi\, E\left(\tfrac{1}{2}+n, \tfrac{1}{2}-n :: 2x\right) = \sqrt{2\pi x}\, e^{x} K_n(x). \tag{5}$$

§ 3. Integrals involving Bessel-functions.

Formula (1) in combination with the formula

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} E\left(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{\lambda^n}\right) d\lambda = \frac{n^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}} E\left(p+n;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{n^n}\right), \tag{6}$$

([5], p. 131) where $\alpha_{r+\nu+1} = \dfrac{k+\nu}{n}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($n=2$ in this case) gives if $R(k) > -1$ and $R(x) > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) K_m\left(e^{i\pi}\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda = \frac{2^{k-1}}{\pi(xi)} \cos\pi\left(\frac{m+n}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\times \\
&\quad\times E\left(\frac{1+n-m}{2}, \frac{1+m-n}{2}, \frac{1+n+m}{2}, \frac{1-n-m}{2}, \right. \\
&\qquad\qquad \left. \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2} : \frac{1}{2} : \frac{e^{i\pi}x^2}{4}\right) + \\
&+ \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} 2^k}{\pi x^2} \cos\pi\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\times \\
&\quad\times E\left(\frac{2+n-m}{2}, \frac{2+m-n}{2}, \frac{2+n+m}{2}, \frac{2-n-m}{2}, \right. \\
&\qquad\qquad \left. \frac{k+2}{2}, \frac{k+3}{2} : \frac{3}{2} : \frac{e^{i\pi}x^2}{4}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Also (1) in combination with the formula [6] giving the value of the integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} E(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \lambda^2 z)\, d\lambda$$

gives an expression for

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} K_m(e^{i\pi}x\lambda)\, K_n(x\lambda)\, d\lambda,$$

where $R(k \pm m \pm n) > 0$, $R(x) > 0$, in terms of six generalized hypergeometric functions. Again from (1) and the formula

$$4\int_0^\infty \lambda^{m-1} K_n(2\lambda)\, E\left(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{\lambda^2}\right) d\lambda = E(p+2;\alpha_r : q;\varphi_s : x), \tag{8}$$

where

$$R(m \pm n) > 0,\ \alpha_{p+1} = \tfrac{1}{2}(m+n),\ \alpha_{p+2} = \tfrac{1}{2}(m-n),$$

([7], p. 258) one gets if $R(x)>0$, $R(k\pm l+1)>0$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_l(2\lambda)\, K_m\left(e^{i\pi}\frac{x}{\lambda}\right) K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda &= \frac{\cos\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}{8i\sqrt{\pi}\cdot x}\times\\ &\times E\left(\frac{1+m+n}{2}, \frac{1+m-n}{2}, \frac{1+n-m}{2}, \frac{1-n-m}{2},\right.\\ &\qquad \left.\frac{1+k+l}{2}, \frac{1+k-l}{2} : \frac{1}{2} : e^{i\pi}x^2\right) +\\ &+ \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}\cos\pi\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}{8\sqrt{\pi}\cdot x^2}\times\\ &\times E\left(\frac{2+m+n}{2}, \frac{2+m-n}{2}, \frac{2+n-m}{2}, \frac{2-n-m}{2},\right.\\ &\qquad \left.\frac{2+k+l}{2}, \frac{2+k-l}{2} : \frac{3}{2} : e^{i\pi}x^2\right).\end{aligned}\right.$$

From (1) and the formula

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}&4i\pi\int_0^\infty \lambda^{m-1} J_n(2\lambda)\, E\left(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{\lambda^2}\right) d\lambda\\ &= i^{m-n} E(p+2;\alpha_r : q;\varphi_s : x\,e^{-i\pi}) - i^{n-m} E(p+2;\alpha_r : q;\varphi_s : x\,e^{i\pi}),\end{aligned}\right.$$

([5], p. 8) where

$$R(m+n)>0,\quad R\left(\tfrac{3}{2}-m+2\alpha_r\right)>0,\quad r=1,2,3,\ldots,p,$$
$$\alpha_{p+1}=\tfrac{1}{2}(m+n),\quad \alpha_{p+2}=\tfrac{1}{2}(m-n),$$

one gets an expression for

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} J_l(2\lambda)\, K_m\left(\frac{x}{\lambda}e^{i\pi}\right) K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda,$$

where

$$R(x)>0,\quad R\left(\tfrac{3}{2}-k\pm m\pm n\right)>0,\quad R(k\pm l+1)>0,$$

in terms of E-functions.

Again from (1) and the formula

$$(11)\qquad \int_0^\infty \lambda^{k-1} K_n(\lambda)\, E(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \lambda^2 z)\, d\lambda$$

$$2^{k-2}\frac{\pi^2}{\sin\pi\left(\frac{k+n}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{k-n}{2}\right)} E\left(p;\alpha_r : 1-\frac{k+n}{2}, 1-\frac{k-n}{2}, \varphi_1,\ldots,\varphi_q : 4z\right) +$$

$$+\sum_{n,\,-n}\frac{\pi^2\, 2^{-n-2}\, z^{-\frac{k+n}{2}}}{\sin\pi\left(\frac{k+n}{2}\right)\sin(n\pi)} E\left(\begin{matrix}\alpha_1+\frac{k+n}{2},\ldots,\alpha_p+\frac{k+n}{2} : 4z\\ 1+\frac{k+n}{2}, 1+n, \varphi_1+\frac{k+n}{2},\ldots,\varphi_q+\frac{k+n}{2}\end{matrix}\right),$$

([6], p. 52) where

$$R(k \pm n + 2\alpha_r) > 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, p, \quad |\arg z| < \pi,$$

one gets an expression for

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_l(\lambda)\, K_m(e^{i\pi} x\lambda)\, K_n(x\lambda)\, d\lambda,$$

where

$$R(x) > 0, \quad R(k \pm l \pm m \pm n) > 0$$

in terms of six generalized hypergeometric functions.

Finally from (1) and the two formulae [6] which give an expression for the two integrals

$$\int_0^\infty e^{-\mu} I_n(\mu)\, \mu^{m-1} E(p; \alpha_r : q; \varphi_s : \mu^{\pm 2} z)\, d\mu;$$

one gets an expression for

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} I_l(\lambda)\, K_m(x\lambda e^{i\pi})\, K_n(x\lambda)\, d\lambda,$$

where

$$R(x) > 0, \quad R(k + l \pm m \pm n) > 0, \quad R(\tfrac{3}{2} - k) > 0$$

in terms of six ${}_6F_5\left(\ldots; \ldots; \frac{1}{x^2}\right)$, and an expression for

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} I_l(\lambda)\, K_m\left(\frac{x}{\lambda} e^{i\pi}\right) K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda,$$

where

$$R(k + l) > -1, \quad R(\tfrac{1}{2} - k \pm m \pm n) > 0, \quad R(x) > 0$$

in terms of six $E(p; \alpha_r : q; \varphi_s : e^{i\pi} x^2)$ with $p = 8$ and $q = 3$.

References.

[1] MACROBERT, T. M.: Functions of a complex variable, 3rd ed. London 1946. — [2] BARNES, E. W.: Proc. London math. Soc. (2) **5**, 59—116 (1907). — [3] MEIJER, C. S.: Proc. Kon. Akad. Wet., Amsterdam **49**, 1165—1175 (1946). — [4] BAILEY, W. N.: Proc. London math. Soc. (2) **28**, 242—254 (1928). — [5] RAGAB, F. M.: Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 8—9, 129—136 (1953). — [6] RAGAB, F. M.: Proc. Glasgow math. Assoc. **2** (in press). — [7] MACROBERT, T. M.: Philos. Magazine (7) **31**, 254—260 (1941).

Fac. of Science, Ein Shams University, Abbassia, Cairo (Egypt).

(Eingegangen am 3. August 1954.)

LORCH, E. R.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 391—407 (1955)

On the Volume of Smooth Convex Bodies in Hilbert Space.

By

E. R. LORCH[1]).

Introduction.

The problem of introducing the notion of volume into Hilbert space $\boldsymbol{H}$ has received attention before. The commonly accepted formulation of this problem is to take the classic theory of Lebesgue measure and attempt to extend it to $\boldsymbol{H}$. Here the result is quickly obtained that no direct extension is possible. A possible procedure at this juncture is to consider making alterations in the axioms for an abstract measure theory in such a way that the altered axioms allow of a development in $\boldsymbol{H}$. At least one such program has been carried out[2]). There seems to be no resemblance between this earlier work and what is proposed below.

The present paper is a continuation of certain previous endeavors of the author which were devoted to the theory of convex bodies and, in particular, to smooth bodies. In an earlier paper[3]) the author developed a theory of volumes and mixed-volumes for smooth bodies in n-space based on the concepts of positive definite quadratic forms and homeomorphisms. Subsequently[4]), the notion of volume of order r, $1 \leq r \leq \infty$, was introduced. In this context, the classical volume, considered by all authors since the time of Archimedes, corresponds to the value of the parameter: $r = 1$. It was seen in the same note that the case $r = 2$ presents particularly interesting possiblities since in a certain sense it is the self-adjoint case.

In the present work, we extend our previous results to Hilbert space. We define a smooth convex body $\mathfrak{K}$ in $\boldsymbol{H}$ and obtain for such a body a class of positive definite self-adjoint transformations. With these transformations one may define a fundamental homeomorphism in $\boldsymbol{H}$. This leads to the notion of the adjoint body, $\mathfrak{K}^*$. The volume of $\mathfrak{K}^*$ is then expressed by means of an integral of a function $D(x)$ which is the infinite product of the characteristic values of the above self-adjoint transformations. The volume of $\mathfrak{K}^*$ which is calculated is that of order $r = 2$. It is possible to develop a theory of volume

[1]) This paper was written while the author was employed on Contract AF — 18 (600) — 562.

[2]) LÖWNER, KARL: Grundzüge einer Inhaltslehre im HILBERTschen Raume. Ann. of Math. **40**, 816—833 (1939).

[3]) LORCH, E. R.: Differentiable inequalities and the theory of convex bodies. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 243—266 (1951).

[4]) LORCH, E. R.: Su certe estensioni del concetto di volume. Rend. Acc. Naz. Lincei, ser. VIII **16**, 25—29 (1954).

for other of r, but this theory suffers from the defect that the only body for which the volume seems to be defined is the unit sphere. For $r=2$, the possibilities are much more varied.

In the finite dimensional case, the integration is carried out over the surface of the unit sphere. There is no ambiguity here since there is precisely one measure of this sphere which is invariant under rotations. In the case of Hilbert space, the integration is once more carried out over the surface of the unit sphere. For a fairly complete discussion of the nature of this problem we refer the reader to the body of the paper. However, a few words may be said here. The problem of determining a volume applies not to a single body but to a class of bodies. Each body of this class gives rise to an integrand which is a continuous bounded function defined over the unit sphere. This class of functions generates a Banach lattice $\boldsymbol{B}$ and finally an integral of a function in $\boldsymbol{B}$ is defined by means of a bounded linear functional over $\boldsymbol{B}$ which has certain properties—for example, the so-called Daniell property which assures complete additivity of the corresponding measure, and also the property of being invariant under a suitably chosen group of transformations, say, the complete group of rotations. Now, in general, nothing of consequence to our present researches is known concerning either the existence or the uniqueness of such linear functionals. It is known that for certain specific Banach lattices, the desired functional exists and is unique. Thus the problem of finding the volume of ellipsoids in Hilbert space is solved in the present paper. On the other hand, it is known that for the lattice of all continuous functions, the integral does not exist. We have not in the present communication studied the various Banach lattices which could arise and therefore have not attacked the problem of the existence and uniqueness of an integral. We hope to return to this critical question.

The present paper is self-contained; knowledge of the contents of the papers cited in [3]) and [4]) will be found useful to the understanding of this work but is not required to follow its logical structure.

I. The Body.

We consider a real Hilbert space $\boldsymbol{H}$ of vectors $x, y, z, \ldots$. In this space, let $\varphi(x)$ be a real function, $\varphi(x) \geq 0$, positively homogeneous of degree 1, that is, $\varphi(tx) = t\varphi(x)$ for $t \geq 0$. The precise statement of the conditions of continuity and differentiability which are placed on $\varphi(x)$ will follow. The equation $\varphi(x) = 1$ defines a surface. It is the volume bounded by this surface which interests us.

Let r be a real constant, $r > 1$. Instead of dealing with the function $\varphi(x)$, consider the function $G(x)$ defined by $rG(x) = [\varphi(x)]^r$. We shall suppose that $G(x)$ is continuous and possesses continuous derivatives of order 2 defined in the following manner. Let $\psi(\alpha, \beta) = G(x + \alpha y + \beta z)$. Then we require that ψ have continuous derivatives of order 2. The derivative of ψ with respect to α at $\alpha = \beta = 0$ is denoted by $G_y(x)$. Similarly, the second derivative is denoted by $G_{yz}(x)$. More generally, we shall require that the function

$\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = G(x + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)$ have continuous second derivatives. It is clear that $G_{yz}(x) = G_{zy}(x)$, that $G_y(x)$ is positively homogeneous in x of order $r-1$ and that $G_x(x) = rG(x)$. It may also be seen that $G_{yz}(x)$ is bilinear in y and z.

We shall suppose that for $x \neq 0$, $y \neq 0$, $G_{yy}(x) > 0$. As indicated in reference [3], $G_{yy}(x)$ yields a measure of the curvature of the surface $\varphi(x) = 1$. We shall suppose that this curvature is uniformly bounded. That is, there exists a constant M such that for all x and y

$$G_{yy}(x) \leq M \|x\|^{r-2} \|y\|^2. \tag{1}$$

It may now be deduced readily that $|G_{yz}(x)| \leq M \|x\|^{r-2} \|y\| \, \|z\|$. From this it follows that $G_{yz}(x)$ is a bounded bilinear functional and since $G_{yx}(x) = (r-1) G_y(x)$, we see that $G_y(x)$ is also a bounded linear functional in y. The fact that $G_y(x)$ and $G_{yz}(x)$ are bounded may be deduced without hypothesis (1) as has been shown [5].

Since $G_{yz}(x)$ is bilinear symmetric and bounded in y and z, it is well known that there is a self-adjoint transformation $\mathcal{G}(x)$ such that $G_{yz}(x) = (\mathcal{G}(x) y, z)$, where the parenthesis denotes the inner product in the space $\boldsymbol{H}$. Thus the function $G(x)$ gives rise to a self-adjoint transformation $\mathcal{G}(x)$ defined for each x such that $(\mathcal{G}(x) x, x) = r(r-1) G(x)$. The conditions of differentiability on $G(x)$ lead to the following property for $\mathcal{G}(x)$:

$$\lim_{t \to 0} \left(t^{-1} [\mathcal{G}(x + tz) - \mathcal{G}(x)] y, x\right) = (r-2) \left(\mathcal{G}(x) y, z\right). \tag{2}$$

Proof. Since $G(x)$ is twice differentiable, we have

$$\begin{aligned} t^{-1} \left(G_{yx}(x + tz) - G_{yx}(x)\right) &= t^{-1} \left(G_{yx+tz}(x + tz) - G_{yx}(x)\right) - t^{-1} G_{ytz}(x + tz) \\ &= t^{-1}(r-1) \left(G_y(x + tz) - G_y(x)\right) - G_{yz}(x + tz) \to (r-1) G_{yz}(x) - G_{yz}(x) \\ &= (r-2) G_{yz}(x). \end{aligned}$$

We have used the continuity of the second derivative of $G(x)$ in deriving $\lim_{t \to 0} G_{yz}(x + tz) = G_{yz}(x)$.

We shall now establish a converse proposition:

Theorem 1. *Let $\mathcal{G}(x)$ be a bounded self-adjoint transformation defined for each $x \neq 0$ in Hilbert space $\boldsymbol{H}$ with the following properties:*

a) *$\mathcal{G}(x)$ is positively homogeneous of order $r-2$ where $r > 1$.*

b) *$\mathcal{G}(x)$ is continuous in the sense that the norm (or bound) $\|\mathcal{G}(x + y) - \mathcal{G}(x)\|$ is small when $\|y\|$ is small.*

c) *There is a constant K such that for all x*

$$\|\mathcal{G}(x)\| \leq K \|x\|^{r-2}.$$

d) *Equation (2) is satisfied.*

---

[5] Lorch, E. R.: A curvature study of convex bodies in Banach spaces. Annali di Mat. Pura ed Appl., ser. IV **34**, 105—112 (1953). See in particular pp. 108, 109.

Then the function $G(x)$ defined by $r(r-1)G(x) = (\mathcal{G}(x)x, x)$ is twice continuously differentiable and for the second derivative one has $G_{yz}(x) = (\mathcal{G}(x)y, z)$.

Proof. Consider the calculation of the first derivative. We have

$$(\mathcal{G}(x+ty)[x+ty], x+ty) - (\mathcal{G}(x)x, x) = ([\mathcal{G}(x+ty) - \mathcal{G}(x)]x, x) + \\ + 2t(\mathcal{G}(x+ty)x, y) + t^2(\mathcal{G}(x+ty)y, y).$$

Dividing by t and allowing t to approach zero, we see that: the first term on the right side approaches $(r-2)(\mathcal{G}(x)x, y)$ by virtue of condition d) of the theorem. The second term approaches $2(\mathcal{G}(x)x, y)$ by virtue of b). The third term approaches zero by virtue of c). Hence the first derivative of $G(x)$ exists and equals $(r-1)^{-1}(\mathcal{G}(x)x, y)$.

We turn to the second derivative. We have

$$(\mathcal{G}(x+tz)[x+tz], y) - (\mathcal{G}(x)x, y) = ([\mathcal{G}(x+tz) - \mathcal{G}(x)]x, y) + \\ + t(\mathcal{G}(x+tz)z, y).$$

Dividing by t and allowing t to approach zero, we see that: the first term on the right approaches $(r-2)(\mathcal{G}(x)y, z)$ by virtue of d) and also using the fact that $\mathcal{G}(x)$ is self-adjoint. The second term on the right approaches $(\mathcal{G}(x)z, y) = (\mathcal{G}(x)y, z)$ by b). Thus the second derivative of $G(x)$ exists and equals $(\mathcal{G}(x)y, z)$. It is clear that this function is continuous in x, y, and z. The theorem is proved.

This theorem and the discussion preceding it show that the notion of smooth surface and that of a family of self-adjoint transformations satisfying adequate conditions of differentiability and continuity, are equivalent. In our development, we may proceed from either point of view. Since the theory of self-adjoint transformations is highly developed, it is natural that one should prefer to phrase matters in terms of these transformations. It should be added that it is the above mentioned equivalence which makes the entire development of this theory possible.

II. Fundamental Hypotheses.

Consider a convex surface defined as above by means of the self-adjoint transformations $\mathcal{G}(x)$. In the work cited earlier [3]), we have shown that in the n-dimensional case, the volume contained by the surface is given by an integral over the unit sphere of the space, in which the integrand is a determinant whose value is precisely the product of the characteristic roots of $\mathcal{G}(x)$. In going over to the infinite dimensional situation, it seems reasonable to demand that $\mathcal{G}(x)$ have a pure point spectrum and that the product of the characteristic values of $\mathcal{G}(x)$ should be convergent. Thus most of these values should be close to 1. As is natural in situations concerning infinite products, the problems are transformed into ones involving infinite sums. Consider therefore the transformation $\mathcal{G}(x) - I$. Let its characteristic values

be $\alpha_x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$. We require that $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$ be convergent. This insures the absolute convergence of the infinite product $\prod_{i=1}^{\infty} (1+\alpha_x^{(i)})$ where the numbers $1+\alpha_x^{(i)}$ represent the characteristic numbers of $G(x)$. These hypotheses imply also that $G(x)-I$ is completely continuous.

We shall desire that the integrand of the previous paragraph be bounded over the unit sphere. Thus $\prod_{i=1}^{\infty} (1+\alpha_x^{(i)})$ should be bounded for $||x||=1$. The formulation we choose for this is that $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$ should be uniformly bounded in x. Since the norm of $G(x)$ equals the maximum of the numbers $|1+\alpha_x^{(i)}|$, this means that $||G(x)||$ is bounded over the unit sphere. Furthermore, in order to insure continuity at several points in the argument, we shall stipulate that $G(x)$ is continuous in the uniform topology.

Up to the present, we have made no assumption about the number r except that it be fixed and larger than 1. As mentioned in the introduction, the theory of volumes has substance only in the case $r=2$. From this point forward, we shall assume that $r=2$. This implies, for instance, that $G(x)$ is homogeneous of degree zero and that the right hand member of equation (2) is 0.

We are now ready to state the precise nature of our hypotheses.

We postulate the existence for each $x \neq 0$ in the real Hilbert space **H** *of a bounded self-adjoint transformation $G(x)$. This transformation is to have the following properties*:

(a) *$G(x)$ is positively homogeneous of degree zero: for $t>0$, $G(tx)=G(x)$.*

(b) *There exist constants $L>0$ and $M>0$ such that for all $x \neq 0$ and y*

$$L||y||^2 \leq (G(x)y, y) \leq M||y||^2. \tag{3}$$

(c) *$G(x)$ is continuous in the uniform topology; that is, $||y|| \to 0$ implies $||G(x+y)-G(x)|| \to 0$.*

(d) *The transformation $G(x)-I$ is completely continuous. Furthermore, the sum of the absolute values of the characteristic values of $G(x)-I$ is convergent. If we write $|||G(x)-I|||$ for this sum, there exists a constant K such that $|||G(x)-I||| \leq K$. The function of x, $|||G(x)-I|||$, is continuous.*

(e) *For each $x \neq 0$, y, and z in* **H**, *we have*

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} ([G(x+tz)-G(x)]y, x) = 0. \tag{4}$$

We consider in the sequel, sets of transformations $G(x)$, $\mathcal{H}(x)$, etc., each of which satisfy these conditions. It is understood that the constants L, M, and K depend on the given family and may be distinct for $G(x)$ and $\mathcal{H}(x)$. We shall show that the class of sets $G(x)$ which satisfy (a) to (e) is convex, that is, if $G(x)$ and $\mathcal{H}(x)$ satisfy (a) to (e), then so does $\lambda G(x)+(1-\lambda)\mathcal{H}(x)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$. This fact is of importance if one wishes to consider the theory of mixed volumes.

Suppose then that $\mathcal{G}(x)$ and $\mathcal{H}(x)$ are two families of self-adjoint transformations which satisfy (a) to (e). If $0 \leq \lambda \leq 1$, it is easy to see that $\lambda \mathcal{G}(x) + (1-\lambda)\mathcal{H}(x)$ satisfies (a), (b), (c) and (e). Let us consider (d). It is obvious that $\lambda \mathcal{G}(x) + (1-\lambda)\mathcal{H}(x) - I$ is completely continuous.

We shall show that if A and B are transformations such that $|||A||| \leq k$ and $|||B||| \leq k$, then $|||A+B||| \leq 6k$. To that effect write $C = A + B$. Let the positive characteristic numbers of A, B, C in order of decreasing magnitude (with repetitions for multiplicities) be represented by a_n^+, b_n^+, c_n^+, $n = 1, 2, \ldots$. Similarly, let a_n^-, b_n^-, c_n^- represent the negative characteristic values in order of increasing magnitude. Note that $|||A||| = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$. Suppose that the number of positive and negative characteristic values of A and B is infinite. Then according to a theorem of H. WEYL and R. COURANT[6]), for any positive p and q, $c_{p+q-1}^+ \leq a_p^+ + b_q^+$ and $c_{p+q-1}^- \geq a_p^- + b_q^-$. Thus in particular we have $c_{2p-1}^+ \leq a_p^+ + b_p^+$ and hence $\sum_p c_{2p-1}^+ \leq \sum_p a_p^+ + \sum_p b_p^+$. In the same way we have $\sum_p c_{2p}^+ \leq \sum_p a_p^+ + \sum_p b_{p+1}^+$. Hence $\sum_p c_p^+ \leq 2\left(\sum_p a_p^+ + \sum_p b_p^+\right)$. We have also $\sum_p c_p^- \geq 2\left(\sum_p a_p^- + \sum_p b_p^-\right)$. Combining these inequalities, we obtain finally $|||C||| \leq 2|||A||| + 2|||B||| \leq 4k$.

Suppose now that the number of positive characteristic numbers of B is finite, say, N. Then according to[6]) we have $c_{p+N}^+ \leq a_p^+$. Since by what we have said previously, $c_1^+ + \cdots + c_N^+ \leq 2\left(\sum_p a_p^+ + \sum_p b_p^+\right)$ we have $\sum_p c_p^+ \leq 3\sum_p a_p^+ + 2\sum_p b_p^-$. A similar argument applies for the negative characteristic values. Hence in all cases we have $|||C||| \leq 3|||A||| + 3|||B||| \leq 6k$. This argument shows that $f(x) = |||\lambda \mathcal{G}(x) + (1-\lambda)\mathcal{H}(x) - I||| \leq 6k$. To complete the proof of d) we must demonstrate the continuity of $f(x)$. We shall first prove a

Lemma. *Let $\mathcal{G}(x)$ satisfy the fundamental hypotheses and let $\alpha_x^{(i)}$ be the characteristic values of $\mathcal{G}(x) - I$. Then given any x and $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ and an integer n such that $\|y - x\| < \delta$ implies $\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| < \varepsilon$.*

Proof. If n is arbitrary, we have

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| \leq \left|\sum_1^{\infty} (|\alpha_y^{(i)}| - |\alpha_x^{(i)}|)\right| + \left|\sum_1^{n} (|\alpha_x^{(i)}| - |\alpha_y^{(i)}|)\right| + \sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|.$$

Let $\varepsilon > 0$ be fixed. The first term on the right of the inequality is precisely $|(|||\mathcal{G}(y) - I||| - |||\mathcal{G}(x) - I|||)|$. Since by d) $|||\mathcal{G}(x) - I|||$ is a continuous function of x, this term may be made smaller than $\varepsilon/3$ in a suitable neighborhood of x. Next, since $\sum_1^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$ is convergent, we may choose an n such that the last expression on the right is less than $\varepsilon/3$.

[6]) The proof of this theorem is given in the book by RIESZ and SZ. NAGY: Lecons d'analyse fonctionelle, sec. éd., p. 236. Budapest: Akadémiai Kiadó 1953.

With this value of n, it is now possible to make the middle term less than $\varepsilon/3$ by suitably restricting the neighborhood of x. This is done as follows: For a fixed i, $i=1, \ldots, n$, one may, according to a theorem of F. RELLICH [7], choose a neighborhood of x in such a way that for all y in that neighborhood $|\alpha_y^{(i)} - \alpha_x^{(i)}| < \varepsilon/(3n)$. Thus in particular $|(|\alpha_y^{(i)}| - |\alpha_x^{(i)}|)| < \varepsilon/(3n)$. If we choose a single neighborhood of x of radius δ for which all our conditions are satisfied, we obtain the result of the lemma.

We return now to the proof of the continuity of the function $f(x)$ defined above our lemma. Let $A(x)$, $B(x)$, and $C(x) = A(x) + B(x)$ be three families of self-adjoint transformations of which $A(x)$ and $B(x)$ satisfy the fundamental hypotheses. Let $\alpha_x^{(i)}, \beta_x^{(i)}$ and $\gamma_x^{(i)}$ be the corresponding sets of characteristic numbers. Then for any n,

$$|(|||C(x)||| - |||C(y)|||)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_x^{(i)}| - \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_y^{(i)}|\right|$$

$$\leq \left|\sum_{1}^{2n} (|\gamma_x^{(i)}| - |\gamma_y^{(i)}|)\right| + \sum_{2n+1}^{\infty} |\gamma_x^{(i)}| + \sum_{2n+1}^{\infty} |\gamma_y^{(i)}|.$$

Now, given an $\varepsilon > 0$, we may find a suitable neighborhood of x and an integer n such that in this neighborhood $\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| < \varepsilon$ and $\sum_{n+1}^{\infty} |\beta_y^{(i)}| < \varepsilon$. Hence $\sum_{2n+1}^{\infty} |\gamma_y^{(i)}|$ is small by the type of argument which precedes the lemma. With this fixed value of n, and restricting the neighborhood of x suitably, one has by virtue of RELLICH's theorem [7] that $\left|\sum_{1}^{2n} (|\gamma_x^{(i)}| - |\gamma_y^{(i)}|)\right| < \varepsilon$. This argument proves the continuity of $|||C(x)|||$. We recapitulate these results in

Theorem 2. *The set of families of self-adjoint transformations which satisfy the fundamental hypotheses is convex. That is, if $G(x)$ and $H(x)$ are in the set, then so is $\lambda G(x) + (1-\lambda) H(x)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$.*

III. The Continuity of the Characteristic Values.

Given a point x, consider the positive characteristic values of $G(x) - I$. Suppose that in decreasing order of magnitude and counting multiplicities (which are necessarily of finite order), they are $\alpha_x^{(1)}, \alpha_x^{(2)}, \ldots$. The number of these may be finite (including zero) or denumerably infinite. Let C_x denote the number of positive characteristic values of $G(x) - I$. Let C be the cardinal which is the least upper bound of all C_x. Then C is either an integer or equals Aleph null. We define C functions of x, which we shall denote with $\alpha_x^{(i)}$ as follows: If at x there are C positive characteristic values of $G(x) - I$, then $\alpha_x^{(i)}$ is the i^{th} such value. If at x there are fewer than C positive

[7] Loc. cit. [6]), p. 369. A more detailed application of this theorem is given in the proof of theorem 3.

characteristic values, then the C functions at x are defined to be those values followed by a suitable number of zeros. In this way, $\alpha_x^{(i)}$ is well defined for each x and for each index i. We may proceed in a similar way with the negative characteristic values. We obtain in this way a denumerable number of functions of x which for convenience we denote by $\alpha_x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$. Any characteristic value of $G(x)-I$ not taken into account by this scheme must be zero.

This definition of the functions $\alpha_x^{(i)}$ may seem somewhat arbitrary. For example, if the $\alpha_x^{(i)}$ were locally analytic, our definition would give piece-wise analytic functions rather than analytic functions. For our purposes however, it is the sum $\sum|\alpha_x^{(i)}|$ and product $\prod(1+\alpha_x^{(i)})$ which is of importance and the possible strain caused by our definition disappears since the order of summation or multiplication is immaterial.

We shall show that the functions $\alpha_x^{(i)}$ are continuous. Let x be fixed and let $\{x_n\}$ be a sequence such that $x_n \to x$. Let $E(\lambda)$ and $E_n(\lambda)$ be the resolutions of the identity of $G(x)-I$ and $G(x_n)-I$ respectively. Then since $\|G(x_n)-G(x)\| \to 0$, $E_n(\lambda)$ tends to $E(\lambda)$ in a certain way which will be described [theorem of F. RELLICH[7]]. Let ε be a positive number not in the spectrum of $G(x)-I$. Let δ be an interval extending from $\lambda=\varepsilon$ sufficiently far to the right to cover all points in the spectrum of $G(x)-I$ to the right of $\lambda=\varepsilon$. Then $E(\delta)$ is a projection associated with the interval δ and is necessarily on a manifold of finite dimension. According to RELLICH's theorem, there exists an integer n_0 such that $n>n_0$ implies that the dimensionality of $E_n(\delta)$ is the same as that associated with $E(\delta)$. Furthermore, the points in the spectrum of $E_n(\lambda)$ which are situated in the interval δ approach the corresponding points in the spectrum of $E(\lambda)$ as $n \to \infty$. Let us suppose that there are r such points (including multiplicities). Then we have shown that the (positive) function $\alpha_x^{(i)}$ is continuous at x for $i=1, 2, \ldots, r$. Now δ is an interval whose left end point is at $\lambda=\varepsilon$. Since ε is arbitrary, we see that all $\alpha_x^{(i)}$ which are positive at x are continuous at x. In a similar fashion one may show that if $\alpha_x^{(i)}$ is negative at x, it is continuous there.

Suppose now that the index i is such that at x, $\alpha_x^{(i)}=0$. According to our definition of the function, we have for all y either $\alpha_y^{(i)} \geq 0$ or $\alpha_y^{(i)} \leq 0$. Let us treat the former case. If for all x_n, $\alpha_{x_n}^{(i)}=0$, then continuity at x is obvious. If $\alpha_{x_n}^{(i)} \neq 0$ for some n, then, by the preceding discussion, we may take n_0 so large that $n>n_0$ implies that $\alpha_{x_n}^{(i)}$ falls outside the interval δ and hence $\alpha_{x_n}^{(i)} < \varepsilon$. This implies continuity. We thus have

Theorem 3. *Let $G(x)$ satisfy the fundamental hypotheses. Then it is possible to define for all $x \neq 0$ continuous functions $\alpha_x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$, such that these functions represent the non-zero characteristic values of $G(x)-I$, multiplicities being taken into consideration. The integers i may be divided into two classes so that the functions $\alpha_x^{(i)}$ of one class form a descending sequence of non-negative functions and the functions $\alpha_x^{(i)}$ of the second class form an ascending sequence of non-positive functions.*

IV. The Continuity of the Infinite Product.

As has been indicated before, the computation of volumes involves the infinite product of the characteristic values of $G(x)$. In this infinite product, we may introduce or eliminate the factor 1 as often as we wish without changing the value of the product. Thus we are considering the product $D(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+\alpha_x^{(i)})$ where $\alpha_x^{(i)}$ are the functions introduced in the preceding section. This product converges absolutely since condition d) of the fundamental hypothesis insures the convergence of $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_x^{(i)}|$.

We shall show that $D(x)$ is a bounded continuous function of x.

First, suppose that $\{\beta_n\}$ is a sequence of real numbers such that $\sum|\beta_i|=\beta<1$. Then clearly, $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\beta_i)\leq\prod_{i=1}^{\infty}(1+|\beta_i|)\leq\exp(\beta)$. Similarly, $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\beta_i)\geq\prod_{i=1}^{\infty}(1-|\beta_i|)\geq 1-\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i|$. This latter inequality is immediately established by induction for a product with n factors and follows by continuity in the infinite case.

Let us now consider the function $D(x)$. Let ε, $1>\varepsilon>0$, be given and let x be fixed. By the lemma preceding theorem 2, we may find a $\delta>0$ and an integer n such that $\|y-x\|<\delta$ implies $\sum_{n+1}^{\infty}|\alpha_y^{(i)}|<\varepsilon$. Now we have $1-\varepsilon\leq\prod_{n+1}^{\infty}(1+\alpha_y^{(i)})\leq\exp(\varepsilon)$. We may write $D(y)=\prod_{1}^{n}(1+\alpha_y^{(i)})\cdot\prod_{n+1}^{\infty}(1+\alpha_y^{(i)})$. The $\alpha_y^{(i)}$ are continuous functions of y by theorem 3. Thus in a suitable neighborhood of x, $\prod_{1}^{n}(1+\alpha_y^{(i)})$ differs little from $\prod_{1}^{n}(1+\alpha_x^{(i)})$. From these various facts it is easy to deduce the continuity of $D(x)$.

One may also see that $D(x)$ is bounded. This may be seen from the inequalities $|D(x)|=\left|\prod_{1}^{\infty}(1+\alpha_x^{(i)})\right|\leq\prod_{1}^{\infty}(1+|\alpha_x^{(i)}|)\leq\exp\left(\sum_{1}^{\infty}|\alpha_x^{(i)}|\right)\leq\exp(K)$. We have therefore proved

Theorem 4. *The function* $D(x)=\prod_{1}^{\infty}(1+\alpha_x^{(i)})$ *is a bounded and continuous function of* x.

V. On the Inverse Transformation.

We shall now prove a theorem of great importance to our development. This result was obtained by the author for Banach spaces under conditions which are both more general and more restrictive than the ones which we use here[8]). Since many of the phenomena we deal with are special to this situation we give the proof in full.

We have seen that given the family of self-adjoint transformations $G(x)$, one may introduce the function $G(x)$ defined by $2G(x)=(G(x)\,x,\,x)$. Further-

[8]) Loc. cit. [5]).

more, $G(x)$ is twice differentiable and for its derivatives we have $G_y(x) = (\mathcal{G}(x)x, y)$ and $G_{yz}(x) = (\mathcal{G}(x)y, z)$. For a fixed x, $G_y(x)$ represents a linear functional on the Hilbert space $\boldsymbol{H}$; according to a theorem of Fréchet this linear functional is generated by the inner product with y of a fixed element in $\boldsymbol{H}$; this fixed element is $\mathcal{G}(x)x$. In the above cited paper we have shown that the mapping $x \to G_x(x)$ is a homeomorphism of the given Banach space onto its conjugate space. We shall show now that the mapping

$$x \to x^* = \mathcal{G}(x)x \tag{5}$$

is a homeomorphism of Hilbert space into itself (we define the image of 0 to be 0).

We start by showing that the map (5) is one-to-one. In the first place, for $x \neq 0$ and $t > 0$, it is impossible that $\mathcal{G}(tx)tx = \mathcal{G}(-x)(-x)$. For such an equality implies that $t(\mathcal{G}(x)x, x) + (\mathcal{G}(-x)x, x) = 0$ which is impossible since by the fundamental hypothesis b), $(\mathcal{G}(x)x, x) > 0$ and $(\mathcal{G}(-x)x, x) > 0$.

Now suppose that for some $x \neq 0$ and for some z, $\mathcal{G}(x+z)(x+z) = \mathcal{G}(x)x$. Let us write this equality in the form $G_y(x+z) = G_y(x)$. By the law of the mean of the differential calculus one has for $0 < \vartheta < 1$

$$G_y(x+z) = G_y(x) + G_{yz}(x+\vartheta z).$$

Since by hypothesis $G_y(x+z) = G_y(x)$, we have $G_{yz}(x+\vartheta z) = 0$ and in particular for $y = z$, $G_{zz}(x+\vartheta z) = 0$. We have seen immediately above that $x + \vartheta z \neq 0$. Thus from our assumptions on $\mathcal{G}(x)$ it follows that $z = 0$. Hence the map (5) is one-to-one.

To prove that the range of the map $x \to x^*$ coincides with the Hilbert space we shall prove three lemmas.

Lemma. *Let $f(y)$ be a non-zero bounded linear functional and suppose that* $\text{l.u.b.}_{\varphi(y)=1} f(y) = \lambda$. *If there is a point x for which $\varphi(x) = 1$ (where $\varphi^2(x) = 2G(x)$) and such that $f(x) = \lambda$, then $f(y) = \lambda G_y(x)$.*

We note in passing that since $L\|y\|^2 \leq \varphi^2(y) \leq M\|y\|^2$, every functional $f(y)$ is bounded on $\varphi(y) = 1$. Suppose first that $\lambda = 1$. Then we have $f(x) = \varphi(x)$; $f(x \pm \alpha y) \leq \varphi(x \pm \alpha y)$. Now if $\alpha > 0$,

$$\frac{\varphi(x-\alpha y) - \varphi(x)}{-\alpha} \leq \frac{f(x-\alpha y) - f(x)}{-\alpha} = f(y)$$

$$= \frac{f(x+\alpha y) - f(x)}{\alpha} \leq \frac{\varphi(x+\alpha y) - \varphi(x)}{\alpha}.$$

Letting $\alpha \to 0$ and noting that $\varphi^2(x) = 2G(x)$ we see that

$$f(y) = d/d\alpha\,[2G(x+\alpha y)]_{\alpha=0}^{\frac{1}{2}} = \varphi^{-1}(x)G_y(x) = G_y(x).$$

This proves the lemma if $\lambda = 1$ and the general case is an obvious consequence of the homogeneity of $\varphi(y)$.

We shall say that the surface $\varphi(x) = 1$ is uniformly convex if for two vectors x, y such that $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$, the inequality $\varphi(x-y) \geq \varepsilon$ implies that $\varphi(x+y) \leq 2 - \delta$ where δ is a function of ε only. We now prove the

Lemma. *The surface* $\varphi(x)=1$ *is uniformly convex.*

Applying the law of the mean to the function of t:

$$G(z+tw)+G(z-tw),$$

we have

$$G(z+w)+G(z-w)=2G(z)+\tfrac{1}{2}[G_{ww}(z+\vartheta w)+G_{ww}(z-\vartheta w)],\quad 0<\vartheta<1.$$

This gives, using the fundamental hypothesis,

$$\varphi^2(z+w)+\varphi^2(z-w)\geq 2\varphi^2(z)+2L\,||w||^2.$$

Write $x=z+w$, $y=z-w$. Then since $\varphi(x)=\varphi(y)=1$ by hypothesis, and using the fundamental hypothesis once more, we have

$$1-\varphi^2(z)\geq L||w||^2\geq L\,M^{-1}\varphi^2(w).$$

Since $\varphi(x-y)>\varepsilon$ by hypothesis we have $4-LM^{-1}\varepsilon^2\geq\varphi^2(x+y)$, which implies uniform convexity.

Lemma. *If* $f(y)$ *is a non-zero bounded linear functional and if* $\text{l.u.b.}_{\varphi(y)=1} f(y)=\lambda$, *then there is an* x *with* $\varphi(x)=1$ *such that* $f(x)=\lambda$.

Let $\{x_n\}$ be any sequence such that $\varphi(x_n)=1$ and $f(x_n)\to\lambda$. We note that $\lim_{n,m\to\infty}||x_n-x_m||=0$ if and only if $\lim_{n,m\to\infty}\varphi(x_n-x_m)=0$. Now to prove that $\{x_n\}$ is a convergent sequence, let us suppose that for some $\varepsilon>0$ and for two indices n,m, $\varphi(x_n-x_m)\geq\varepsilon$. Then by uniform convexity, $\varphi(x_n+x_m)\leq 2-\delta(\varepsilon)$ and hence $f(x_n+x_m)\leq\lambda(2-\delta)$. This argument shows that $\{x_n\}$ is a convergent sequence and if it converges to x, obviously, $\varphi(x)=1$ and $f(x)=\lambda$.

It may be seen that the mapping $x\to x^*$ is continuous for we have

$$\begin{aligned}||G(x)x-G(y)y||&=||G(x)x-G(x)y+G(x)y-G(y)y||\\&\leq||G(x)||\,||x-y||+||G(x)-G(y)||\,||y||,\end{aligned}$$

and the quantity $||G(x)-G(y)||$ is by hypothesis small when $||x-y||$ is small.

We show now that if $\{G(z_n)z_n\}$ is a fundamental sequence then $\{z_n\}$ also is a fundamental sequence. For this purpose we write $G_{\cdot}(z_n)$ instead of $G(z_n)z_n$. We have by the law of the mean with $0<\vartheta<1$

$$G_{z_n-z_m}(z_n)=G_{z_n-z_m}(z_m+[z_n-z_m])=G_{z_n-z_m}(z_m)+G_{z_n-z_m\,z_n-z_m}(z_m+\vartheta[z_n-z_m]).$$

Hence, denoting with $||G_{\cdot}(z_n)-G_{\cdot}(z_m)||$ the norm of the linear functional $G_y(z_n)-G_y(z_m)$ we may write

$$||z_n-z_m||\,||G_{\cdot}(z_n)-G_{\cdot}(z_m)||\geq|G_{z_n-z_m\,z_n-z_m}(z_m+\vartheta[z_n-z_m])|\geq L\,||z_n-z_m||^2$$

and therefore $||G_{\cdot}(z_n)-G_{\cdot}(z_m)||\geq L||z_n-z_m||$. Since the quantity on the left approaches zero with $n,m\to\infty$, so does $||z_n-z_m||$, that is, $\{z_n\}$ is a fundamental sequence.

The above argument allows us to conclude that the mapping $x^* \to x$ is continuous, for if $G(z_n)z_n \to G(z)z$, then $z_n \to z$. Thus we have completed the proof of

Theorem 5. *If $G(x)$ satisfies the fundamental hypotheses, the mapping $x \to x^* = G(x)x$ is a homeomorphism of the Hilbert space $\boldsymbol{H}$.*

We now turn to a consideration of the transformation inverse to $G(x)$. Since $L\|y\|^2 \leq (G(x)y, y) \leq M\|y\|^2$, it is clear that $G^{-1}(x)$ exists, is a bounded linear positive definite self-adjoint transformation and satisfies $M^{-1}\|y\|^2 \leq (G^{-1}(x)y, y) \leq L^{-1}\|y\|^2$. Let us write

$$G^{-1}(x) = \mathcal{H}(x^*) \tag{6}$$

where $x^* = G(x)x$. Since the relation $x \to x^*$ is a homeomorphism, (6) is unambiguous. We proceed to consider the conditions (a) to (e) of the fundamental hypotheses for the transformations $\mathcal{H}(x^*)$.

Since $G(x)$ is homogeneous of degree zero, $x^* = G(x)x$ implies for $t > 0$ that $(tx)^* = G(tx)tx = tG(x)x = tx^*$. Thus $\mathcal{H}(x^*) = G^{-1}(x) = G^{-1}(tx) = \mathcal{H}(tx)^* = \mathcal{H}(tx^*)$, that is, $\mathcal{H}(x^*)$ is positively homogeneous of degree zero. This proves (a).

The proof of (b) has been given above.

Suppose x^* and y' are vectors in $\boldsymbol{H}$. In this paragraph we represent the homeomorphic map by $x \leftrightarrow x^*$ to distinguish it from convergence, say, $x \to 0$. Let $y' \to 0$, that is, $x^* + y' \to x^*$. Suppose that under the homeomorphism (5) we have $x \leftrightarrow x^*$ and $x + y \leftrightarrow x^* + y'$, that is $(x+y)^* = x^* + y'$. Then by the continuity of the homeomorphism, $y' \to 0$ implies $y \to 0$.

We shall show that $\lim_{y' \to 0} \|\mathcal{H}(x^* + y') - \mathcal{H}(x^*)\| = 0$; that is, we shall show that $\lim_{y \to 0} \|G^{-1}(x+y) - G^{-1}(x)\| = 0$. By (c), $G(x)$ is continuous in this sense; we have to show that $G^{-1}(x)$ has that property. Thus to prove our contention, it is sufficient to show that if $\{A_n\}$ is a sequence of transformations converging uniformly to A, and if A_n^{-1} and A^{-1} exist, then $\{A_n^{-1}\}$ converges uniformly to A^{-1}. Now from the identity $A_n^{-1} - A^{-1} = A_n^{-1}(A - A_n)A^{-1}$ we obtain $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A_n^{-1}\| \, \|A - A_n\| \, \|A^{-1}\|$ and this proves our contention. Thus $\mathcal{H}(x^*)$ enjoys property (c).

Let us examine (d). It is obvious that since $G(x)$ has a pure point spectrum with $\lambda = 1$ as the only possible limit point, $G^{-1}(x)$ has the same property and thus $\mathcal{H}(x^*) - I$ is completely continuous. If $1 + \alpha_x^{(i)}$ is a characteristic value of $G(x)$ then $L \leq 1 + \alpha_x^{(i)}$. The corresponding characteristic value of $G^{-1}(x)$ is $1 + \beta_x^{(i)} = (1 + \alpha_x^{(i)})^{-1}$. Thus $\beta_x^{(i)} = -\alpha_x^{(i)}(1 + \alpha_x^{(i)})^{-1}$ and $\sum_1^\infty |\beta_x^{(i)}| \leq L^{-1} \sum_1^\infty |\alpha_x^{(i)}| \leq L^{-1}K$ since $\sum_1^\infty |\alpha_x^{(i)}| \leq K$ by hypothesis.

We now prove the continuity of $|||\mathcal{H}(x^*)|||$. Since $x \to x^*$ is a homeomorphism, it will suffice to prove the continuity in x of $|||G^{-1}(x)|||$. Choose a neighborhood of x and an integer n so that for y in this neighborhood $\sum_{n+1}^\infty |\alpha_y^{(i)}| < \varepsilon < 1/2$ where ε is a preassigned positive number. This is possible

by virtue of the lemma which precedes theorem 2. Then

$$\sum_{n+1}^{\infty}|\beta_y^{(i)}| = \sum_{n+1}^{\infty}|\alpha_y^{(i)}|\,(1+\alpha_y^{(i)})^{-1} \leq 2\sum_{n+1}^{\infty}|\alpha_y^{(i)}| < 2\varepsilon.$$

Also

$$\left|\left(\sum_{1}^{\infty}|\beta_y^{(i)}| - \sum_{1}^{\infty}|\beta_x^{(i)}|\right)\right| \leq \left|\left(\sum_{1}^{n}|\beta_y^{(i)}| - \sum_{1}^{n}|\beta_x^{(i)}|\right)\right| + \sum_{n+1}^{\infty}|\beta_y^{(i)}| + \sum_{n+1}^{\infty}|\beta_x^{(i)}|.$$

The last two terms are each less than 2ε and the first term on the right may be made less than ε by appropriately restricting the neighborhood of x. This proves the continuity of $|||\mathcal{G}^{-1}(x)|||$ and hence of $|||\mathcal{H}(x^*)|||$ and therefore establishes (d) for $\mathcal{H}(x^*)$.

It would seem that the validity of (e) for $\mathcal{G}(x)$ in the presence of the other conditions of the hypothesis, would imply the validity of (e) for $\mathcal{H}(x^*)$. That is, the existence of a certain number of derivatives for the transformation should yield approximately an equal for the inverse transformation. For purposes of symmetry in our treatment, we specify the existence for $\mathcal{H}(x^*)$ of the differentiability property given in (4). That is, *we extend our fundamental hypothesis to include the condition on* $\mathcal{G}(x)$ *that*

(f) *For every* $x^* \neq 0$, y^*, *and* z^* *in* $\boldsymbol{H}$,

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}([\mathcal{H}(x^* + t z^*) - \mathcal{H}(x^*)]\, y^*, z^*) = 0. \tag{7}$$

Now it is an easy matter to prove that $\mathcal{H}(x^*)$ satisfies both (4) and (7). The statement that $\mathcal{H}(x^*)$ satisfies (4) is given by (7). We shall show that the condition on $\mathcal{H}(x^*)$ that (7) be satisfied is given by (4).

Indeed, the transformation $x \to x^* = \mathcal{G}(x)\,x$ is an involution. This is so, since $x^* \to x^{**} = \mathcal{H}(x^*)\,x^*$ but $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}(x)$ and $x^* = \mathcal{G}(x)\,x$, hence $x^{**} = \mathcal{G}^{-1}(x)\,\mathcal{G}(x)\,x = x$. Thus if $\mathcal{J}(x^{**})$ is the family of self-adjoint transformations associated with x^{**} by means of $\mathcal{J}(x^{**}) = \mathcal{H}^{-1}(x^*)$, we have $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(x^{**}) = \mathcal{H}^{-1}(x^*) = \mathcal{G}(x)$. This concludes the proof that condition (7) for $\mathcal{H}(x^*)$ is given by (4). We summarize these results in

Theorem 6. *Let* $\mathcal{G}(x)$ *be a family of self-adjoint transformations which satisfy the hypotheses* (a) *to* (f) *inclusive. Let* $\mathcal{H}(x^*)$ *be defined by* $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}(x)$ *where* x^* *is given by the homeomorphism of* $\boldsymbol{H}$ *into itself*: $x \leftrightarrow x^* = \mathcal{G}(x)\,x$. *Then the family* $\mathcal{H}(x^*)$ *also satisfies the conditions* (a) *to* (f).

VI. The Adjoint (Polar) Body.

Let $\mathcal{G}(x)$ be a family of self-adjoint transformations which satisfies the fundamental hypotheses. We have seen that we may define a body $\mathfrak{K}$ by means of the inequality $2G(x) \leq 1$ where $G(x)$ is given by $2G(x) = (\mathcal{G}(x)\,x, x)$. The body $\mathfrak{K}$ has been shown to be convex[9]). Proceeding from $\mathcal{G}(x)$ to $\mathcal{H}(x^*)$ we may introduce a body $\mathfrak{K}^*$ defined by the inequality $2H(x^*) \leq 1$ where $H(x^*)$ is given by $2H(x^*) = (\mathcal{H}(x^*)\,x^*, x^*)$. The body $\mathfrak{K}^*$ is called the adjoint

[9]) Loc. cit. [3]), p. 247.

or polar body of $\mathfrak{R}$. We have seen in the preceding section that the homeomorphism $x \to x^*$ is of period two and that the passage from $\mathcal{H}(x^*)$ to $\mathcal{J}(x^{**})$ yields $\mathcal{G}(x)$ once more. Thus $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$.

VII. Preliminary Definition of Volume.

We shall give now a preliminary discussion of the definition of volume. The question of the definition of the integral will be deferred to the next section. We begin with the finite dimensional case.

Let $\boldsymbol{H}$ be a space of dimension n and let $G(x)$, $\mathcal{G}(x)$, $\mathcal{H}(x^*)$, $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}^*$ be as before except that the value of the exponent r is not to be fixed at $r = 2$. In this situation we have given a formula for the volume of $\mathfrak{R}^*$ which is as follows[10]):

$$V(\mathfrak{R}^*) = \lim_{r \to 1} 1/[n(r-1)] \int_{\Omega} D(x)\, d\Omega .$$

Here Ω represents the surface of the unit sphere in n-space and $d\Omega$ is the element of area on the surface (hypersurface) of the sphere. The function $D(x)$ is usually written in the form of a determinant—the determinant of the matrix associated with the transformation $\mathcal{G}(x)$. The order of definition of the various quantities above is as follows: First, $\mathfrak{R}$ is defined by means of an inequality $\varphi(x) \leq 1$ where $\varphi(x)$ is positively homogeneous of order 1. Then $r > 1$ is chosen and $G(x)$ is defined by $rG(x) = [\varphi(x)]^r$. This leads in turn to the definition of the transformations $\mathcal{G}(x)$ and $\mathcal{H}(x^*)$ in the way we have already indicated.

The concept of volume has been extended by us to that of the "volume of order r" for a fixed r, $1 \leq r \leq \infty$[11]). This is done as follows for the cases $1 < r < \infty$. Choose $\mathfrak{R}$ defined by $\varphi(x) \leq 1$ as above and choose a fixed value of r in the given range. Then with $G(x)$, $\mathcal{G}(x)$, $\mathcal{H}(x^*)$ defined as in the preceding paragraph we define the volume of order r of $\mathfrak{R}^*$, $V_r(\mathfrak{R}^*)$, by the equation

$$V_r(\mathfrak{R}^*) = \left[1/[n(r-1)] \int_{\Omega} D(x)\, d\Omega\right]^{1/r}. \tag{8}$$

For various reasons, the question of volumes in Hilbert space seems interesting principally for the case $r = 2$. Thus our entire development is based on this value of the parameter. We shall define the volume of order 2 of the body $\mathfrak{R}^*$ using the formula (8) as a guide. We state forthwith that the factor $1/n$ arises in the n-dimensional case only because finite dimensional integration theory has an inductive structure; that is, there are relations between an integration in n dimensions and one in fewer than n dimensions (e.g. — Fubini's theorem). In Hilbert space, no such relation seems a priori desirable or, for that matter, feasible. Thus in contructing our formula for

---

[10]) Loc. cit. [3]), pp. 261, 262.

[11]) Loc. cit. [4]), p. 27.

Hilbert space, we suppress the factor $1/n$. We introduce therefore our definition of the volume or order 2 of the body $\mathfrak{K}^*$ by means of

$$V_2(\mathfrak{K}^*) = \left[\int_{\Omega} D(x)\, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

In this formula, $D(x)$ is the bounded continuous function whose existence has been proved in IV. $\mathfrak{K}^*$ is the polar body whose existence and definition were considered in V and VI. Ω represents the surface of the unit sphere. It remains to consider the very critical question of the interpretation to be given to the integration.

VIII. Integrands and Integrals.

Prior to defining an integral, one must have a precise notion of the structure of the class of functions to be integrated, the integrands. In general, there is considerable division of opinion on the desirable structure of the class of integrands and also on the notion of integral over such a class. However, the coming discussion will suggest that there is much more uniformity in view-points on the latter than on the former question. It should be stated further that the present definitions are not being proposed to the exclusion of others. Rather they are being put forward because they are convenient for our purposes. Furthermore, the definitions are definitely tentative since there is required a thorough study of various problems before anything of a more definitive nature can be enunciated. The nature of some of these problems will be seen.

The functions which we shall wish to integrate will be, by assumption, continuous and bounded over the Hilbert unit sphere. The class $\boldsymbol{B}$ of integrable functions will be assumed to constitute a real vector space. Furthermore, we shall introduce into this class a simple topology, that of uniform convergence, and we shall require that $\boldsymbol{B}$ be complete in this (metric) topology. Thus $\boldsymbol{B}$ is assumed to be a Banach space in which the norm of $f(x)$ is defined by $||f|| = \underset{x\in\Omega}{\text{l.u.b.}} |f(x)|$.

In addition, $\boldsymbol{B}$ is also required to be a lattice under this natural ordering of functions. Thus if $f(x)$ and $g(x)$ are in $\boldsymbol{B}$, so are $f(x) \vee (x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$ and $f(x) \wedge g(x) = \min\big(f(x), g(x)\big)$. This is equivalent to requiring that $\boldsymbol{B}$ contain along with $f(x)$ the function $|f(x)|$.

We shall wish to define integrals which are invariant under certain transformations. For that reason, we introduce a group of transformations of Ω into itself. The nature of this group will have a strong influence on the type of integral one wishes to define. There is no a priori reason for choosing one particular group before all others. Furthermore, the difficulties to be encountered will depend greatly on the complexity of this group. For the sake of definiteness, let us assume that the group to be chosen is the group $\mathcal{R}$ of all rotations of the space $\boldsymbol{H}$ into itself. The relation of $\mathcal{R}$ and $\boldsymbol{B}$ is the following. We assume that if $f(x) \in \boldsymbol{B}$, and if $R \in \mathcal{R}$, then $f(Rx) \in \boldsymbol{B}$. Thus "$\boldsymbol{B}$ is closed under the operators in $\mathcal{R}$".

Now let us consider the nature of an integral. In the first place, an integral over $\boldsymbol{B}$ will be a bounded linear functional F. We shall suppose that F is normalized, that is, $\|F\| = 1$. Furthermore, F will be assumed positive, that is, $f(x) \geq 0$ implies $Ff \geq 0$. (We do not discuss at this point whether F should be strictly positive, that is, whether $f \neq 0$ and $f(x) \geq 0$ imply $Ff > 0$.) The existence of such functionals in abundance is given by the Hahn-Banach theorem.

It will also be assumed that F is $\mathcal{R}$-invariant. This means that if $f(x) \in \boldsymbol{B}$ and $R \in \mathcal{R}$, then $Ff(x) = Ff(Rx)$. The existence of $\mathcal{R}$ invariant functionals has received some attention from various authors recently. The possible application to the present situation of the results here obtained will be considered on another occasion.

Finally, we shall introduce a condition of F which corresponds to that of a completely additive measure. We use the extremely important work of DANIELL in order to accomplish this. We shall assume that if $\{f_n(x)\}$ is a monotone increasing sequence of non-negative functions in $\boldsymbol{B}$ which converges to a function $f(x)$ also in $\boldsymbol{B}$, then $Ff_n \to Ff$. This will be written in the form

$$f_n(x) \uparrow f(x) \quad \text{implies} \quad Ff_n \to Ff. \tag{10}$$

This condition will be called the "Daniell condition". It results from DANIELL's theory that a functional which satisfies (10) gives rise to a completely additive integral[12]).

Given a space $\boldsymbol{B}$ of the type we have defined, the question of the existence and uniqueness of invariant integrals over $\boldsymbol{B}$ is in general unanswered. If $\boldsymbol{B}$ consists of the constant functions only, the question has a simple affirmative answer (see the next section). On the other hand, if $\boldsymbol{B}$ is the space of all continuous functions over Ω, no invariant integral exists.

Let us return now to the problem of the determination of volumes. If the body is given, call it $\mathfrak{K}^*$, whose volume is to be found, we have set up a mechanism for computing the integrand $D(x)$. Now the problem of finding volumes always involves not one body $\mathfrak{K}^*$ but a class of bodies $\mathfrak{K}_\iota^*$, where ι ranges over some suitable set. Each such body yields a function $D_\iota(x)$. These functions $D_\iota(x)$ generate a space $\boldsymbol{B}$ of continuous functions closed under the transformations of the group $\mathcal{R}$. For this space one solves the integration problem: One determines whether there exists an invariant integral F and whether it is unique. If such is the case, one obtains the volume of the bodies $\mathfrak{K}_\iota^*$ by means of formula (9).

This introduces the question as to how suitably to define a "natural class" of bodies $\mathfrak{K}_\iota^*$. One or two classes of bodies seem to deserve to be called natural, for example, the class of ellipsoids. In the next section we give the simple but interesting solution of the volume problem for this particular class.

---

[12]) DANIELL, P. J.: A general form of integral. Ann. of Math. **19**, 279—294 (1917/18).

IX. The Volume of Ellipsoids.

We consider as an application of the preceding theory, the problem of determining the volume of an ellipsoid in Hilbert space $\boldsymbol{H}$. Consider an ellipsoid $\mathfrak{K}$ with semi-axes $a_1, a_2, \ldots$. Let $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ represent a complete orthonormal set in $\boldsymbol{H}$ in the direction of the principal axes. If x is an arbitrary vector in $\boldsymbol{H}$, let $(x_1, x_2, \ldots)$ represent the coordinates of x in this orthonormal set. We may write for the defining equation of the ellipsoid $2G(x) = 1$ where

$$2G(x) = (x_1^2/a_1^2) + (x_2^2/a_2^2) + \cdots.$$

It is quickly seen that for the vector $y = (y_1, y_2, \ldots)$ we have

$$G_y(x) = (x_1 y_1)/a_1^2 + (x_2 y_2)/a_2^2 + \cdots,$$

and that the transformation $\mathcal{G}(x)$ is given by $\mathcal{G}(x)\varphi_n = (1/a_n^2)\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Write $(1/a_n^2) = 1 + \alpha_n$ (previously written $\alpha_x^{(n)}$). Note that α_n is independent of x. Suppose that $\sum_1^\infty |\alpha_n| < \infty$. It is easy to verify that the conditions (a) to (e) of the fundamental hypotheses are satisfied. Furthermore we see that the basic homeomorphism $x \to x^* = \mathcal{G}(x)\,x$ is given by a linear transformation: $(x_1, x_2, \ldots) \to ([x_1/a_1^2], [x_2/a_2^2], \ldots)$. Thus, since $\mathcal{G}(x)$ is independent of x here, $\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}$, $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}$ is independent of x^*. For the conjugate body $\mathfrak{K}^*$ of $\mathfrak{K}$ we have the equation $2H(x^*) = (\mathcal{H}(x^*)\,x^*, x^*) = 1$ where

$$2H(x^*) = a_1^2 x_1^{*2} + a_2^2 x_2^{*2} + \cdots.$$

Thus $\mathfrak{K}^*$ is an ellipsoid with semi-axes $1/a_1, 1/a_2, \ldots$.

Let us now consider the class of all ellipsoids for which $\sum_1^\infty |\alpha_n| < \infty$. This class is convex, closed under the formation of adjoints, and closed under rotations of the space. For any ellipsoid of the class, the function $D(x) = \prod_1^\infty (1 + \alpha_n) = \prod_1^\infty a_n^{-2}$ is a constant and hence the Banach lattice $\boldsymbol{B}$ generated by all $D(x)$ is the space of all constants. On $\boldsymbol{B}$, there is precisely one positive linear functional of norm 1, and it is also an invariant integral. Finally, for the volume of order 2 of $\mathfrak{K}^*$ we obtain

$$V_2(\mathfrak{K}^*) = \left[\int_\Omega D(x)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_1^\infty a_n\right)^{-1}$$

Since the semi-axes of $\mathfrak{K}^*$ are the numbers $1/a_n$, we see that the volume is equal to the product of the semi-axes.

Note that although the volume is of order 2 (and not of order 1 as in the classical case) the result is precisely the same, up to a constant factor and except for dimensionality, as that which would be obtained by standard methods for an ellipsoid in n dimensions.

Columbia University, New York City.
Università di Roma.

(Eingegangen am 10. August 1954.)

JACOBS, K.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 408—428 (1955)

Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertschen Raum.

Von
KONRAD JACOBS.

Einleitung.

Die allgemeine Ergodentheorie beschäftigt sich mit den Mittelwerts- und Periodizitätseigenschaften von Gruppen oder auch Halbgruppen $\mathfrak{G}$ linearer Transformationen in linearen topologischen Räumen $\mathfrak{H}$. Als Instrumentarium benützte man anfangs vor allem die Spektraltheorie (vgl. HOPF [*10*]). Inzwischen hat man gelernt, das Mittelwertproblem unabhängig von der Spektraltheorie zu behandeln (BIRKHOFF [*3*], ALAOGLU-BIRKHOFF [*1*], EBERLEIN [*8*], DAY [*7*], JACOBS [*11*]). In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß man auch die Periodizitätsprobleme unabhängig von der Spektraltheorie behandeln kann.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{G}$ eine beschränkte Gruppe in $\mathfrak{H}$ ist. Man kann ohne weiteres zeigen, daß die unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ einen abgeschlossenen invarianten Teilraum $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ bilden. Unser Ziel ist es, den Raum $\mathfrak{P}$ aus dem Raum $\mathfrak{H}$ abzuspalten, d.h. einen zweiten invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ zu finden, derart, daß $\mathfrak{H}$ direkt in die Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ zerfällt.

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ unitär ist, kann man für $\mathfrak{F}$ einfach das orthogonale Komplement von $\mathfrak{P}$ nehmen. Dies Verfahren hat jedoch drei Mängel:

1. Man erhält keine kennzeichnende Eigenschaft für die Vektoren aus $\mathfrak{F}$.

2. Es läßt sich für beschränkte Gruppen nicht mehr anwenden, da das orthogonale Komplement eines invarianten Raums im allgemeinen nicht mehr invariant sein wird.

3. Es läßt sich nicht auf allgemeinere Räume, in denen der Begriff der Orthogonalität nicht mehr erklärt ist, übertragen.

Wir versuchen daher, einen zu $\mathfrak{P}$ komplementären, invarianten Teilraum als die Menge $\mathfrak{F}$ aller Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ mit einer passenden Eigenschaft Φ zu erhalten. Die Eigenschaft Φ soll dabei auch für allgemeinere Räume sinnvoll sein und im Gegensatz zur Fastperiodizität stehen.

Zu diesem Zweck definieren wir: Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn es eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ gibt, derart, daß $x_\nu h$ schwach gegen 0 konvergiert (§ 2, Definition 7). Die Menge aller Fluchtvektoren nennen wir $\mathfrak{F}$. Dann gilt der folgende

Satz. *Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gestattet genau eine Darstellung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{1}$$

Die beiden Komponenten p, f hängen linear, stetig und invariant von h ab (§ 2, *Hauptsatz*).

Wir können das auch so ausdrücken: $\mathfrak{H}$ zerfällt direkt in die beiden invarianten Teilräume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$. Ein ähnlicher Satz wurde für unitäre Gruppen von GODEMENT bewiesen (GODEMENT [9]).

Das Kernstück des Beweises für die Existenz einer Zerlegung (1) bildet die Aussage: Die Menge aller Minimalpunkte einer nichtleeren schwachabgeschlossenen invarianten Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist nichtleer und besteht aus lauter fastperiodischen Vektoren (§ 3, Satz 1). Beim Beweis dieser Aussage benötigen wir nur die gleichmäßige Konvexität von $\mathfrak{H}$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit ziehen wir die adjungierte Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ heran (§ 4, vgl. auch JACOBS [11]). Dementsprechend läßt sich das Ergebnis unserer Untersuchungen auf duale Paare gleichmäßig-konvexer Banachräume $\left(\text{also z. B. } L^p, L^{p'}, \text{ wobei } p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ verallgemeinern. Dies ist im Anhang II näher ausgeführt.

Der § 5 enthält eine Charakterisierung der fastperiodischen Vektoren. Die im Anhang I angegebene Charakterisierung der Fluchtvektoren scheint mir — was die Methode angeht — illustrativ für die Verhältnisse im Hilbertraum zu sein. Leider ist es mir nicht gelungen, die Methode auch auf gleichmäßigkonvexe Räume zu übertragen, und ich habe die betreffenden Ausführungen deshalb nur als Anhang beigefügt.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen.

Wir betrachten einen abstrakten Hilbertraum $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$. Wie üblich wird in $\mathfrak{H}$ durch die Festsetzung $|h| = \sqrt{(h, h)}$ eine Norm erklärt. Die zugehörige Topologie wird auch die starke Topologie in $\mathfrak{H}$ genannt. $\mathfrak{H}$ ist vollständig bezüglich der starken Topologie.

In $\mathfrak{H}$ wirke eine beschränkte Gruppe $\mathfrak{G} = \{x, y, \ldots\}$ von linearen Transformationen. Es gibt also eine Zahl $\Gamma > 0$ derart, daß stets

$$|xh| \leq \Gamma |h| \text{ [1]}$$

gilt. Hieraus folgt, daß $\Gamma \geq 1$ ist, und daß auch die umgekehrte Abschätzung gilt:

$$|xh| \geq \frac{1}{\Gamma} |h|. \tag{1}$$

Für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(h)$ die stark-abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\}$. $\mathfrak{K}(h)$ ist stets eine invariante Menge: Für jedes $x \in \mathfrak{G}$ gilt $x\,\mathfrak{K}(h) \subseteq \mathfrak{K}(h)$. Wie ich in einer früheren Arbeit [11] gezeigt habe, enthält jede Menge $\mathfrak{K}(h)$ genau einen unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fixen Punkt h_0, welcher der *Fixpunkt des Punktes* h genannt wird.

[1] Hierbei bedeutet xh den aus h durch Anwendung der Transformation x entstehenden Vektor.

In diesem ersten Paragraphen bringen wir einige vorbereitende Aussagen, die unter den gemachten Annahmen gelten. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ kommt dabei nur insoweit zur Geltung, als sie Anlaß zur Einführung einer neuen Norm in $\mathfrak{H}$ gibt (Abschnitt C und D).

A. Totalbeschränkte Mengen.

Definition 1. *Eine Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ heißt totalbeschränkt, wenn man sie beliebig fein endlich überdecken kann, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Punkte $h_1, \ldots, h_n$ in $\mathfrak{H}$ gibt, deren ε-Umgebungen zusammen $\mathfrak{M}$ überdecken: Zu jedem $h \in \mathfrak{M}$ gibt es ein ν derart, daß $|h - h_\nu| < \varepsilon$ gilt* (vgl. ALEXANDROFF-HOPF [2], S. 104).

Beispiel 1. Jede endliche Menge ist totalbeschränkt.

Beispiel 2. Jede nichtbeschränkte Menge in $\mathfrak{H}$ ist auch nicht totalbeschränkt. Ist also $h \in \mathfrak{H}$, $h \neq 0$, so ist die Menge $\{n\,h \mid n = 1, 2, \ldots\}$ nichttotalbeschränkt in $\mathfrak{H}$.

Beispiel 3. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein endlichdimensionaler Teilraum von $\mathfrak{H}$, so ist jede beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{H}_0$ totalbeschränkt. Dagegen muß sich eine totalbeschränkte Teilmenge von $\mathfrak{H}$ nicht notwendig in einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathfrak{H}$ einbetten lassen. Sei z.B. $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension, und sei $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ (δ_{ik} bedeutet das Kroneckersymbol). Dann überzeugt man sich leicht, daß die Menge $\left\{\frac{1}{n} e_n \mid n = 1, 2, \ldots\right\}$ zwar totalbeschränkt, aber in keinem endlichdimensionalen Teilraum von $\mathfrak{H}$ enthalten ist.

Dagegen findet man: Eine beschränkte Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann totalbeschränkt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen endlichdimensionalen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ gibt, in dessen ε-Umgebung $\mathfrak{M}$ enthalten ist: Zu jedem $h \in \mathfrak{M}$ gibt es ein $g \in \mathfrak{H}_0$ derart, daß $|h - g| < \varepsilon$ gilt.

Beispiel 4. Ist $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension und $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{H}$ mit $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$, so ist die Menge $\mathfrak{M} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ nichttotalbeschränkt in $\mathfrak{H}$. Es gilt ja $|e_i - e_k| = \sqrt{2}$ für $i \neq k$. Daraus folgt, daß man z.B. für $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ die Definition 1 nicht erfüllen kann.

Wir fassen einige einfache Aussagen über totalbeschränkte Mengen zusammen als

Satz 1.1. *a) Die Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann totalbeschränkt, wenn jede unendliche Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ ($i = 1, 2, \ldots$) eine in $\mathfrak{H}$ konvergente Teilfolge besitzt. Ist $\mathfrak{M}$ eine nicht-totalbeschränkte Menge, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ derart, daß $|h_i - h_k| > \varepsilon$ für $i \neq k$ gilt.*

b) Zugleich mit der Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist auch jede Teilmenge von $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt.

c) Ist die Menge $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt und α eine komplexe Zahl, so ist auch die Menge $\alpha\,\mathfrak{M}$ totalbeschränkt.

d) Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ totalbeschränkte Mengen in $\mathfrak{H}$, so ist auch die Menge $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ totalbeschränkt.

e) Ist die Menge $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt in $\mathfrak{H}$ und ist t eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, so ist auch die Menge $t\mathfrak{M}$ totalbeschränkt.

Aus Satz 1.1 b) und Beispiel 4 folgt: In einem unendlichdimensionalen Hilbertraum ist die Einheitskugel $\{h \mid |h| \leq 1\}$ nicht totalbeschränkt.

B. Die schwache Topologie in $\mathfrak{H}$.

Bekannt ist die

Definition 2. *Eine Folge $h_i \in \mathfrak{H}$ heißt schwach-konvergent gegen den Limes $h \in \mathfrak{H}$, in Zeichen*

$$h_i \to h \quad (\textit{schwach})$$

oder

$$\lim_{i\to\infty} h_i = h \quad (\textit{schwach}),$$

wenn $(h_i, f) \to (h, f)$ für jedes $f \in \mathfrak{H}$ gilt (vgl. Nagy [16], S. 10).

Man kann eine entsprechende Definition auch allgemeiner für Filter (vgl. Bourbaki [4]) anstatt Folgen treffen. Wir beschränken uns auf Folgen, um späterhin schärfere Ergebnisse zu erzielen.

Beispiel 5. Jede stark-konvergente Folge ist auch schwach-konvergent mit demselben Limes: Aus $h_i \to h$ folgt $h_i \to h$ (schwach).

Wir schreiben gelegentlich zur besseren Unterscheidung auch $h_i \to h$ (stark) anstatt $h_i \to h$.

Beispiel 6. Ist $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension und $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{H}$, für welche $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ gilt, so ist $e_i \to 0$ (schwach). Denn für ein beliebiges $f \in \mathfrak{H}$ gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, f)|^2 \leq |f|^2,$$

woraus sofort $(e_i, f) \to 0 = (0, f)$ folgt. Wir werden später sehen (Anhang I, Satz 1), daß diese Folge e_i gewissermaßen den Prototyp einer schwach-konvergenten Folge im Hilbertraum darstellt.

Wir fassen einige bekannte Aussagen über schwach-konvergente Folgen zusammen als

Satz 1.2. *a) Der Limes einer schwach-konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt und hängt linear von der Folge ab. Insbesondere ist also $h_i \to h$ (schwach) äquivalent mit $h_i - h \to 0$ (schwach).*

b) Jede Teilfolge einer schwach-konvergenten Folge ist wieder schwach-konvergent mit demselben Limes.

c) Jede schwach-konvergente Folge ist beschränkt.

Für die Beweise vgl. Nagy [16], S. 10f.

Satz 1.3. *Jede schwach-konvergente Folge von Punkten einer totalbeschränkten Menge ist stark-konvergent mit demselben Limes.*

Beweis. Sei $h_i \to h$ (schwach) und $\{h_i\}$ eine totalbeschränkte Menge. Angenommen, die Aussage $h_i \to h$ (stark) ist falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge k_j der Folge h_i derart, daß stets

$$|k_j - h| \geq \varepsilon \tag{2}$$

gilt. Wegen der Totalbeschränktheit können wir gleich annehmen (Teilfolge!), daß die Folge k_j stark konvergiert: $k_j \to k$ (stark). Dann gilt wegen (2) sicher

$$|k - h| \geq \varepsilon. \tag{3}$$

Nun ist nach Beispiel 5 $k_j \to k$ (schwach). Andererseits folgt aus Satz 1.2 b), daß $k_j \to h$ (schwach) gilt. Somit ist wegen Satz 2 a) $k = h$, was mit (3) im Widerspruch steht, q.e.d.

Beispiel 7. Jede schwach-konvergente Folge von Punkten eines endlichdimensionalen Teilraums $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ ist auch stark-konvergent mit demselben Limes. Hierzu beachte man Beispiel 3.

Der Inhalt der beiden folgenden Sätze 1.4 und 1.5 ist bekannt (vgl. PETTIS [*18*], S. 249, EBERLEIN [*8*], S. 218f. und ALEXANDROFF-HOPF [*2*], S. 85). Wir geben zwei einfache, auf unseren Fall zugeschnittene Beweise an.

Satz 1.4. *Ist* $\mathfrak{K}_1 \supseteq \mathfrak{K}_2 \supseteq \cdots$ *eine absteigende Folge von nichtleeren beschränkten abgeschlossenen konvexen Mengen in* $\mathfrak{H}$, *so ist der Durchschnitt* $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{K}_\nu$ *nichtleer.*

Beweis. Sei

$$\alpha_\nu = \inf_{f \in \mathfrak{K}_\nu} |f|.$$

Dann ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Sei

$$\alpha = \lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu.$$

Sei nun $f_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$ derart gewählt, daß

$$|f_\nu| < \alpha + \frac{1}{\nu}$$

gilt ($\nu = 1, 2, \ldots$). Dann ist die Folge $f_1, f_2, \ldots$ stark-konvergent. Aus der bekannten Identität

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^2 + \left|\frac{f-g}{2}\right|^2 = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2}$$

folgt nämlich für beliebige μ, ν

$$\frac{1}{4}|f_\mu - f_\nu|^2 = \frac{|f_\mu|^2 + |f_\nu|^2}{2} - \left|\frac{f_\mu + f_\nu}{2}\right|^2$$

Es sei etwa $\mu \geq \nu$. Dann ist $f_\mu, f_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$, also auch $\frac{f_\mu + f_\nu}{2} \in \mathfrak{K}_\nu$, und somit

$$\left|\frac{f_\mu + f_\nu}{2}\right| \geq \alpha_\nu.$$

Andererseits ist

$$|f_\mu| < \alpha + \frac{1}{\nu}, \qquad |f_\nu| < \alpha + \frac{1}{\nu}.$$

Daraus ergibt sich

$$|f_\mu - f_\nu| \leq 2\sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{\nu}\right)^2 - \alpha_\nu^2}$$

und das geht gegen 0. Somit konvergiert die Folge $f_1, f_2, \ldots$ stark gegen einen Punkt f, der wegen der starken Abgeschlossenheit der $\mathfrak{K}_\nu$ in jedem $\mathfrak{K}_\nu$ enthalten sein muß.

Satz 1.5. *Ist $h_1, h_2, \ldots$ eine Folge in $\mathfrak{H}$, derart, daß für jedes $f \in \mathfrak{H}$ die Folge (h_ν, f) konvergiert, und ist $\mathfrak{K}_n$ die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{h_n, h_{n+1}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so enthält $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{K}_\nu$ genau einen Punkt h und es gilt $h_\nu \to h$ (schwach).*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{K}_1 \supseteq \mathfrak{K}_2 \supseteq \cdots$. Nach Satz 1.4 enthält $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{K}_\nu$ mindestens einen Punkt h. Man überlegt sich sofort, daß jeder Punkt aus $\bigcap_\nu \mathfrak{K}_\nu$ ein schwacher Limes der Folge $h_1, h_2, \ldots$ ist. Aus Satz 1.2 a) (Eindeutigkeit des schwachen Limes) folgt daher die Behauptung.

Bekannt ist der

Satz 1.6. *a) Zu jeder beschränkten Folge $h_i \in \mathfrak{H}$ gibt es abzählbarviele $g_\nu \in \mathfrak{H}$, derart, daß für jede Teilfolge k_j der Folge h_i aus dem Vorhandensein der Limites*

$$\lim_{j \to \infty} (k_j, g_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

schon die Existenz eines $k \in \mathfrak{H}$ mit

$$k_j \to k \ (schwach)$$

folgt. (Man kann $g_\nu = h_\nu$ wählen.)

b) Jede beschränkte Folge $h_i \in \mathfrak{H}$ besitzt eine schwach-konvergente Teilfolge. Dies folgt aus a) (vgl. NAGY [16], S. 10).

Definition 3. *Wir nennen eine Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ schwach-abgeschlossen, wenn der Limes jeder schwach-konvergenten Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ wieder in $\mathfrak{M}$ liegt.*

Anmerkung. Aus Satz 1.5 folgt sofort: Jede konvexe stark-abgeschlossene Menge ist auch schwach-abgeschlossen (EBERLEIN [8], S. 218).

Es ist klar, daß der Durchschnitt eines Systems schwach-abgeschlossener Mengen wieder schwach-abgeschlossen ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 4. *Die kleinste schwach-abgeschlossene Obermenge $\overline{\mathfrak{M}}$ einer Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ heißt die schwache Hülle von $\mathfrak{M}$.*

Nichttrivial ist nun der

Satz 1.7. *Die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ einer Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist die Menge aller Punkte $h \in \mathfrak{H}$, zu denen es jeweils eine Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ gibt, derart, daß $h_i \to h$ (schwach) gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}'$ die Menge aller Limites von schwach-konvergenten Folgen aus $\mathfrak{M}$. Jedenfalls ist $\mathfrak{M}' \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}'$ schon schwach-abgeschlossen ist. Sei also h_i eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{M}'$ und $h \in \mathfrak{H}$ derart,

daß $h_i \to h$ (schwach) gilt. Es ist $h \in \mathfrak{M}'$ nachzuweisen. Nun gibt es zu jedem i eine Folge $h_{i1}, h_{i2}, \ldots \in \mathfrak{M}$ derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} h_{ik} = h_i \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Wir werden zwei Indexfolgen i_μ, k_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$) derart bestimmen, daß

$$\lim_{\mu\to\infty} h_{i_\mu k_\mu} = h \quad \text{(schwach)} \tag{4}$$

gilt. Damit ist dann $h \in \mathfrak{M}'$ bewiesen.

Nach Satz 1.6 a) gibt es eine Folge $g_\nu \in \mathfrak{H}$ derart, daß aus

$$\lim_{\mu\to\infty} (h_{i_\mu k_\mu} - h, g_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

schon die erwünschte Beziehung (4) folgt. Wir bestimmen nun zu jeder natürlichen Zahl μ

1. eine natürliche Zahl i_μ derart, daß

$$|(h_{i_\mu} - h, g_\nu)| < \frac{1}{2\mu}$$

für alle $\nu \leq \mu$ gilt, und nunmehr bestimmen wir

2. eine natürliche Zahl k_μ derart, daß

$$|(h_{i_\mu k_\mu} - h_{i_\mu}, g_\nu)| < \frac{1}{2\mu}$$

für alle $\nu \leq \mu$ gilt.

Für die so erhaltene Folge $h_{i_\mu k_\mu}$ ergibt sich nun leicht die Gültigkeit von (5), q.e.d.

C. Einführung einer neuen Norm.

Wir betrachten nunmehr die in $\mathfrak{H}$ wirkende beschränkte Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Norm $|h|$ ist im allgemeinen nicht invariant unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ (vgl. JACOBS [*11*]). Durch die Festsetzung

$$\|h\| = \sup_{x\in\mathfrak{G}} |xh|$$

erhält man jedoch in $\mathfrak{H}$ eine unter $\mathfrak{G}$ invariante Norm $\|h\|$, von deren Eigenschaften die folgenden hervorgehoben seien:

Satz 1.8. *a) Stets gilt* $\|xh\| = \|h\|$ ($x \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{H}$).

b) $\|h\|$ *ist eine stetige Funktion von h (bezüglich der starken Topologie in* $\mathfrak{H}$*).*

c) Stets gilt $|h| \leq \|h\| \leq \Gamma|h|$. *Die neue Normtopologie ist also zur alten äquivalent.*

d) Stets gilt

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$
$$\|\alpha g\| = |\alpha| \cdot \|g\|$$

($f, g \in \mathfrak{H}$, α *eine komplexe Zahl).*

e) Für beliebige $f, g \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{2} - \Delta \cdot |f-g|^2,$$

wobei $\Delta = \frac{1}{4\Gamma^2} > 0$ *ist.*

Beim Beweis der Ungleichung e) haben wir die Abschätzung (1) der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach unten zu benützen (vgl. JACOBS [11]).

D. Der Minimalteil einer schwach-abgeschlossenen Menge.

Aus Satz 1.5 und Satz 1.8 d) gewinnen wir sofort den

Satz 1.9. *Wenn $h_i \to h$ (schwach) gilt, so ist*

$$\|h\| \leq \inf_n [\sup \{\|h_n\|, \|h_{n+1}\|, \ldots\}].$$

Beweis. Sei $\mathfrak{K}_n$ die konvexe abgeschlossene Hülle der Menge $\{h_n, h_{n+1}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Die Punkte der Form

$$f = \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} h_{i_\mu},$$

wobei $i_1, \ldots, i_m$ natürliche Zahlen $\geq n$ sind, liegen dicht in $\mathfrak{K}_n$. Für sie gilt nach Satz 1.8 d)

$$\|f\| \leq \frac{1}{m} \sum_{\mu} \|h_{i_\mu}\| \leq \sup_{i \geq n} \{\|h_i\|\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Norm $\|h\|$ [Satz 1.8 b)] gilt diese Abschätzung sogar für alle $f \in \mathfrak{K}_n$. Da nach Satz 1.5 insbesondere h in $\mathfrak{K}_n$ liegt, ist der Satz bewiesen.

Definition 5. *Ist $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{H}$ eine nichtleere Menge und ist $\alpha = \inf_{f \in \mathfrak{M}} \|f\|$, so heißt die Menge*

$$\mathfrak{M}_0 = \{f | f \in \mathfrak{M}, \ \|f\| = \alpha\}$$

der Minimalteil von $\mathfrak{M}$.

Satz 1.10. *Der Minimalteil $\mathfrak{M}_0$ einer nichtleeren schwach-abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{H}$ ist nichtleer und totalbeschränkt.*

Beweis. I. $\mathfrak{M}_0$ ist nichtleer. Denn da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, gibt es eine Folge $f_i \in \mathfrak{M}$ mit $\|f_i\| \to \alpha$. Nach Satz 1.6 b) können wir die Folge f_i als schwach-konvergent annehmen (Teilfolge!): $f_i \to f$ (schwach).

Da $\mathfrak{M}$ schwach-abgeschlossen ist, ist $f \in \mathfrak{M}$. Nun ist

$$\inf_n \left[\sup_{i \geq n} \{\|f_i\|\}\right] = \alpha.$$

Nach Satz 1.9 ist also $\|f\| \leq \alpha$. Da wegen $f \in \mathfrak{M}$ das $<$-Zeichen nicht in Frage kommt, ist $\|f\| = \alpha$.

II. $\mathfrak{M}_0$ ist totalbeschränkt. Denn wäre $\mathfrak{M}_0$ nicht totalbeschränkt, so gäbe es nach Satz 1.1 a) eine Folge $h_i \in \mathfrak{M}_0$ und ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $|h_i - h_k| \geq \varepsilon$

für $i \neq k$ gilt. Nach Satz 1.6 b) können wir annehmen (Teilfolge!), daß $h_i \to h$ (schwach) gilt. Da $\mathfrak{M}$ schwach-abgeschlossen ist, muß $h \in \mathfrak{M}$ sein. Es ist also

$$\|h\| \geq \alpha. \tag{6}$$

Wir bilden nun die Folge

$$p_n = \tfrac{1}{2}(h_{2n-1} + h_{2n}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man überzeugt sich sofort, daß wiederum

$$p_n \to h \quad \text{(schwach)} \tag{7}$$

gilt. Aus Satz 1.8 e) folgt nun

$$\|p_n\|^2 \leq \frac{\|h_{2n-1}\|^2 + \|h_{2n}\|^2}{2} - \Delta \cdot |h_{2n-1} - h_{2n}|^2$$

$$\leq \alpha^2 - \Delta \cdot \varepsilon^2.$$

Aus Satz 1.9 und (7) ergibt sich

$$\|h\| \leq \sqrt{\alpha^2 - \Delta \cdot \varepsilon^2} < \alpha,$$

was mit (6) nicht verträglich ist. Also ist die Menge $\mathfrak{M}_0$ totalbeschränkt.

§ 2. Fastperiodische Vektoren und Fluchtvektoren. Formulierung des Hauptsatzes.

A. Fastperiodische Vektoren.

Definition 6. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ heißt fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn die Menge $\{xh,\ x \in \mathfrak{G}\}$ totalbeschränkt ist* (vgl. MAAK [13], S. 152). *Die Menge aller unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$.*

Nahezu trivial ist die Bemerkung: Ist $h \in \mathfrak{H}$ ein unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischer Vektor, so ist für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion $\varphi(x) = (xh, g)$ auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodisch (im v. Neumannschen Sinne; vgl. MAAK [13], S. 152).

Beispiel 8. Der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ ist stets fastperiodisch. Jeder unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fixe Punkt ist fastperiodisch. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein endlichdimensionaler invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$, so ist jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}_0$ fastperiodisch. Ist $\mathfrak{H}$ direkte Summe von endlichdimensionalen invarianten Teilräumen, so ist jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch. Im allgemeinen werden aber, falls $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension ist, auch nicht-fastperiodische Vektoren auftreten (vgl. das Beispiel 9 im Abschnitt B dieses Paragraphen).

Satz 2.1. *Die Menge $\mathfrak{P}$ aller unter der beschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $h \in \mathfrak{G}$ ist ein linearer, abgeschlossener, invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Die Linearität folgt aus Satz 1.1 c), d). $\mathfrak{P}$ ist auch abgeschlossen. Denn sei h_0 ein Häufungspunkt von $\mathfrak{P}$. Zu einem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ bestimmen wir nun a) ein $h \in \mathfrak{P}$ mit

$$|h - h_0| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma},$$

wobei $\Gamma \geq 1$, wie immer, eine Schranke der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet;

b) endlichviele Punkte $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{H}$ derart, daß es zu jedem $x \in \mathfrak{G}$ ein ν gibt, für welches

$$|x h - f_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Für dasselbe x und dasselbe ν gilt nun

$$|x h_0 - f_\nu| \leq |x h_0 - x h| + |x h - f_\nu|$$
$$< \Gamma \cdot \frac{\varepsilon}{2\Gamma} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist die Definition 1 auch für die Menge $\{x h_0 | x \in \mathfrak{G}\}$ erfüllt.

$\mathfrak{P}$ ist ferner invariant. Denn ist $h \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{G}$ beliebig, so ist

$$\{x(a h) | x \in \mathfrak{G}\} = \{x h | x \in \mathfrak{G}\}.$$

Also gilt auch $a h \in \mathfrak{P}$.

Den Raum $\mathfrak{P}$ der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren kann man nun mittels der bekannten Methoden aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen behandeln (vgl. MAAK [*14*]). Man kann die Existenz und Eindeutigkeit eines Mittelwerts (d.h. Fixpunkts; vgl. § 1) nach einem von der Birkhoffschen Minimalmethode grundverschiedenen Verfahren gewinnen, vor allem durch Anwendung des sog. Verheiratungssatzes (vgl. MAAK [*13*], S. 234f.). Nach dem Hauptsatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen zerfällt $\mathfrak{H}$ in endlichdimensionale invariante irreduzible Teilräume.

B. Fluchtvektoren.

Definition 7. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn es eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ gibt, derart, daß $x_\nu h \to 0$ (schwach) gilt. Die Menge aller Fluchtvektoren unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$.*

Beispiel 9. Der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ ist unter jeder Gruppe ein Fluchtvektor. Ist $\mathfrak{H}$ von abzählbarer Dimension und

$$\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots$$

eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}$, so ist durch die Festsetzung $t e_\nu = e_{\nu+1}$ in $\mathfrak{H}$ eine unitäre Transformation t definiert, welche eine unendliche zyklische unitäre Gruppe $\mathfrak{G} = \{t^\nu | \nu = 0, \pm 1, \ldots\}$ erzeugt. Hier ist jedes $h = e_n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$) ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$. Denn wählt man $x_\nu = t^\nu \in \mathfrak{G}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), so ist $x_\nu h = t^\nu e_n = e_{n+\nu}$. Nach § 1 Beispiel 6 gilt nun $x_\nu h \to 0$ (schwach). Man kann leicht beweisen, daß $\mathfrak{H}$ überhaupt nur aus Fluchtvektoren besteht. Dies folgt auch aus dem später zu beweisenden Satz 4.3.

Satz 2.2. *Ein von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedener Fluchtvektor ist nie fastperiodisch, d.h. es ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{H}$ ein fastperiodischer Fluchtvektor unter der Gruppe $\mathfrak{G}$. Es gibt also eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ derart, daß $x_\nu h \to 0$ (schwach) gilt. Die Folge $x_\nu h$ verläuft in der totalbeschränkten Menge $\{x h | x \in \mathfrak{G}\}$. Nach § 1 B, Satz 1.3 gilt also auch $x_\nu h \to 0$ (stark), d.h.

$$|x_\nu h| \to 0. \tag{1}$$

Andererseits ist stets

$$|x_\nu h| \geq \frac{1}{\Gamma}|h|, \tag{2}$$

wobei $\Gamma \geq 1$ die Schranke von $\mathfrak{G}$ bedeutet. (1) und (2) vertragen sich aber nur, wenn $h = 0$ ist.

Anmerkung. Nach Satz 2.2 ist Beispiel 9 ein Beispiel für das Auftreten nicht-fastperiodischer Vektoren in $\mathfrak{H}$.

Aus Satz 1.5 und aus der im Anschluß an die Definition 3 gemachten Bemerkung ergibt sich sofort der Beweis für den

Satz 2.3. *Jeder Fluchtvektor hat den Fixpunkt* $0 \in \mathfrak{H}$. (Vgl. § 1, auch Anhang I.)

Natürlich können auch fastperiodische, von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedene Vektoren den Fixpunkt 0 haben. Die Fluchtvektoren haben aber den Fixpunkt 0 offenbar in ausgezeichneter Weise.

Es wird sich später herausstellen, daß die Menge $\mathfrak{F}$ genau so wie die Menge $\mathfrak{P}$ ein linearer, abgeschlossener, invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist (Satz 4.3). Diese Aussage wird für unsere Zwecke von besonderer Bedeutung sein. Die Invarianz und die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{F}$ ist leicht direkt zu zeigen. Dagegen stoßen wir bei der Linearität auf folgende Schwierigkeit: Angenommen, f und g sind Fluchtvektoren, und x_ν, y_ν sind zwei Folgen aus $\mathfrak{G}$ derart, daß $x_\nu f \to 0$ (schwach) und $y_\nu g \to 0$ (schwach) gilt. Wie soll man eine Folge $z_\nu \in \mathfrak{G}$ bestimmen, derart, daß $z_\nu(f+g) \to 0$ (schwach) gilt?

Eine Methode, welche diese Schwierigkeit umgeht, werden wir in § 4 angeben. Die Invarianz und die Abgeschlossenheit der Menge $\mathfrak{F}$ wird sich dabei von selbst ergeben. Wir verzichten daher hier auf einen unmittelbaren Beweis dieser Tatsachen.

C. Formulierung des Hauptsatzes.

Das Ziel unserer Untersuchungen ist der folgende

Hauptsatz. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *läßt sich auf genau eine Weise in der Form*

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P}, \qquad f \in \mathfrak{F} \tag{3}$$

darstellen. Die Vektoren p *und* f *hängen linear, starkstetig und invariant von* $h \in \mathfrak{H}$ *ab.*

Wir werden in § 3 die Existenzaussage dieses Satzes beweisen: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ läßt sich auf mindestens eine Weise in der Form (3) darstellen; dabei ist stets $p \in \mathfrak{R}(h)$ (Satz 3.2). Hinsichtlich der Eindeutigkeit beachten wir zunächst den folgenden

Satz 2.4. *Ist* $\mathfrak{F}$ *subtraktiv abgeschlossen, d.h. ist*

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F},$$

so ist für jedes $h \in \mathfrak{H}$ *die Zerlegung* (3) *eindeutig bestimmt (unabhängig davon, ob die Existenzaussage des Hauptsatzes richtig ist).*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}$ subtraktiv abgeschlossen. Daß $\mathfrak{P}$ subtraktiv abgeschlossen ist, wissen wir bereits aus Satz 2.1. Seien

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F},$$
$$h = p' + f', \qquad p' \in \mathfrak{P},\ f' \in \mathfrak{F}$$

zwei Zerlegungen desselben Vektors $h \in \mathfrak{H}$. Dann folgt durch Subtraktion

$$p - p' = f' - f \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}.$$

Nach Satz 2.2 ist in $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}$ nur der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ enthalten, also ist

$$p - p' = f' - f = 0,$$

d.h. die beiden Zerlegungen stimmen überein.

Wir werden in § 4 die folgende Aussage beweisen: $\mathfrak{F}$ ist ein abgeschlossener invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ (Satz 4.3). Damit wird der Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung (3) vollendet sein. Beim Beweis jener Aussage werden wir von der Richtigkeit der Existenzaussage des Hauptsatzes Gebrauch machen. Die restlichen Aussagen des Hauptsatzes werden sich dann leicht ergeben (Satz 4.5).

§ 3. Existenz der Zerlegung.

Wir denken uns einen Vektor $h \in \mathfrak{H}$ fest gewählt. Wir wollen beweisen, daß er eine Zerlegung

(1) $$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}$$

besitzt. Hierzu müssen wir einen passenden fastperiodischen Vektor p angeben. Ein fastperiodischer Vektor p ist passend für unsere Zwecke, wenn für eine geeignete Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$

(2) $$x_\nu(h - p) \to 0 \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Wir werden später sehen, daß man im wesentlichen fertig ist, sobald man einen fastperiodischen Vektor p_0 gefunden hat, für den man

$$x_\nu h \to p_0 \quad \text{(schwach)}$$

erreichen kann. Wir stehen also vor der Aufgabe, in der schwachen Hülle der Menge $\{x\,h \mid x \in \mathfrak{G}\}$ einen fastperiodischen Vektor p_0 aufzufinden.

Zur Lösung dieser Aufgabe bedienen wir uns des in § 1 D eingeführten Begriffs des Minimalteils einer schwach-abgeschlossenen Menge in $\mathfrak{H}$ (und damit auch der in § 1 C eingeführten, unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ invarianten Norm $\|h\|$).

Satz 3.1. *Der Minimalteil $\mathfrak{M}_0$ einer nichtleeren, schwach-abgeschlossenen invarianten Menge $\mathfrak{M}$ ist nichtleer und invariant und besteht aus lauter fastperiodischen Vektoren.*

Beweis. $\mathfrak{M}_0$ ist nichtleer und totalbeschränkt (Satz 1.10). Wegen der Invarianz der Norm $\|h\|$ (Satz 1.8a) ist die Menge $\mathfrak{M}_0$ invariant unter $\mathfrak{G}$.

Ist p ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{M}_0$, so ist die Menge $\{xp \mid x \in \mathfrak{G}\}$ wegen der Invarianz von $\mathfrak{M}_0$ ganz in $\mathfrak{M}_0$ enthalten und als Teilmenge einer totalbeschränkten Menge wieder totalbeschränkt (Satz 1.1 b). Also ist p ein unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischer Vektor.

Satz 3.2. *Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ läßt sich auf mindestens eine Weise in der Form*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}$$

darstellen. Man kann dabei $p \in \mathfrak{K}(h)$ wählen.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}(h)$ die schwache Hülle der Menge $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\}$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{S}(h)$ ist nichtleer und invariant. Es ist nur die Invarianz zu beweisen. Sei also $g \in \mathfrak{S}(h)$ beliebig gewählt. Nach Satz 1.7 gibt es eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$x_\nu h \to g \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Sei nun $a \in \mathfrak{G}$ beliebig. Dann gilt für $y_\nu = a x_\nu \in \mathfrak{G}$

$$y_\nu h \to a g \quad \text{(schwach)}.$$

Ist nämlich $k \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt, so gilt

$$(y_\nu h - a g, k) = (x_\nu h - g, a^* k),$$

wobei a^* die zur Transformation a adjungierte Transformation bedeutet. Voraussetzungsgemäß konvergiert aber die rechte Seite gegen 0. Also gilt

$$(y_\nu h - a g, k) \to 0.$$

Damit ist $a g \in \mathfrak{S}(h)$ gezeigt. $\mathfrak{S}(h)$ ist also invariant.

2. Nach Satz 3.1 gibt es im Minimalteil $\mathfrak{S}_0(h)$ von $\mathfrak{S}(h)$ einen fastperiodischen Vektor p_0. Wegen $p_0 \in \mathfrak{S}(h)$ gibt es eine Folge $t_\nu \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$t_\nu h - p_0 \to 0 \quad \text{(schwach)} \tag{4}$$

gilt. Das ist noch nicht ganz das, was wir wünschen [vgl. (2)]. Wir bringen jetzt noch eine Korrektur an. Wir betrachten die Folge $t_\nu^{-1} p_0$. Da sie innerhalb der totalbeschränkten Menge $\{xp_0 \mid x \in \mathfrak{G}\}$ verläuft, können wir annehmen (Teilfolge!), daß sie stark konvergiert:

$$t_\nu^{-1} p_0 \to p \quad \text{(stark)}.$$

Nach Satz 2.1 ist wieder $p \in \mathfrak{P}$. Der Übergang zu einer Teilfolge zerstört die Beziehung (4) nicht. Nunmehr gilt aber

$$t_\nu p \to p_0 \quad \text{(stark)}. \tag{5}$$

Denn es gilt

$$|t_\nu p - p_0| \leq \Gamma \cdot |t_\mu^{-1}(t_\nu p - p_0)|. \tag{6}$$

Bestimmen wir nun zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ zunächst eine Zahl $N > 0$ derart, daß für $\mu > N$

$$|p - t_\mu^{-1} p_0| < \frac{\varepsilon}{\Gamma}$$

gilt, so gilt für $\nu > N$, wenn wir in (6) $\mu = \nu$ setzen:

$$|t_\nu p - p_0| < \varepsilon.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich nun die erwünschte Beziehung

$$t_\nu (h - p) \to 0 \quad \text{(schwach)}$$

und wir haben nur $h - p = f$ zu setzen, um die behauptete Zerlegung zu erhalten.

3. Bei der Konstruktion von p sind wir innerhalb von $\mathfrak{S}(h)$ geblieben. Wie im Anschluß an die Definition 3 in § 1 B bemerkt wurde, ist jede konvexe stark-abgeschlossene Menge auch schwach-abgeschlossen. Daraus folgt sofort $\mathfrak{S}(h) \subseteq \mathfrak{K}(h)$ und damit $p \in \mathfrak{K}(h)$.

§ 4. Eindeutigkeit der Zerlegung.

In diesem Paragraphen wollen wir vor allem die folgende Aussage beweisen: Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Fluchtvektoren unter der beschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein invarianter, abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$ (Satz 4.3; vgl. § 2).

Um die hier vorliegende, in § 2 B angedeutete Schwierigkeit zu umgehen, betrachten wir neben der beschränkten Gruppe $\mathfrak{G} = \{x, y, \ldots\}$ die adjungierte Gruppe $\mathfrak{G} = \{x^*, y^*, \ldots\}$. Dabei ist, wie bekannt, x^* die der Transformation x eineindeutig durch die Relation

$$(x g, h) = (g, x^* h) \quad \text{(für alle } g, h \in \mathfrak{H})$$

zugeordnete Transformation (vgl. NAGY [16], S. 12). $\mathfrak{G}^*$ hat dieselbe Schranke $\Gamma \geq 1$ wie $\mathfrak{G}$ und man kann alle Betrachtungen, die wir in den vorangehenden Paragraphen über die Gruppe $\mathfrak{G}$ angestellt haben, auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ übertragen. Die zur Gruppe $\mathfrak{G}^*$ adjungierte Gruppe ist die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}^*$ die Menge aller unter $\mathfrak{G}^*$ fastperiodischen Vektoren aus $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{P}^*$ ist ein abgeschlossener, linearer, unter der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$.

Ebenso bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}^*$ die Menge aller Fluchtvektoren unter der Gruppe $\mathfrak{G}^*$.

Satz 4.1. *Für jedes $f \in \mathfrak{F}$ und jedes $g \in \mathfrak{P}^*$ gilt $(f, g) = 0$.*

Beweis. Sei $f \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt. Wir betrachten auf der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ die Funktion

$$\varphi(x^*) = (f, x^* g),$$

wobei g ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{P}^*$ sein möge. Da g unter $\mathfrak{G}^*$ fastperiodisch ist, ist $\varphi(x^*)$ eine fastperiodische Funktion auf der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ (vgl. § 2, Anmerkung nach Definition 6). Die Funktion $|\varphi(x^*)|$ ist also ebenfalls

fastperiodisch auf $\mathfrak{G}^*$. Sei α ihr Mittelwert. Es gibt also zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $a_1^*, \ldots, a_n^* \in \mathfrak{G}^*$ derart, daß für beliebige $x^* \in \mathfrak{G}^*$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varphi(x^* a_\nu^*)| - \alpha \right| < \varepsilon$$

gilt; es ist also

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |(f, x^* a_\nu^* g)| - \alpha \right| < \varepsilon,$$

d.h. es gilt

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |(x f, a_\nu^* g)| - \alpha \right| < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $x \in \mathfrak{G}$. Nun ist f Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$. Läßt man also x eine passende Folge $x_\iota \in \mathfrak{G}$ durchlaufen, so gilt

$$|(x_\iota f, a_\nu^* g)| \to 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $|\alpha| \leq \varepsilon$, und, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, $\alpha = 0$. Nach einem bekannten Satz über fastperiodische Funktionen (MAAK [13], S. 42) ist dann

$$\varphi(x^*) = 0 \quad \text{für alle} \quad x^* \in \mathfrak{G}^*.$$

Für $x^* = 1^* \in \mathfrak{G}^*$ ergibt sich die Behauptung.

Satz 4.2. *a) Zu jedem von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedenen Vektor $p \in \mathfrak{P}$ gibt es einen Vektor $p^* \in \mathfrak{P}^*$ derart, daß $(p, p^*) \neq 0$ ist.*

b) Zu jedem von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedenen Vektor $f \in \mathfrak{F}$ gibt es einen Vektor $f^* \in \mathfrak{F}^*$ derart, daß $(f, f^*) \neq 0$ ist.

Beweis. a) Sei $p \in \mathfrak{P}$ beliebig gewählt. Wenden wir Satz 3.2 auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ an, so erhalten wir für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ eine Zerlegung

$$h = p^* + f^*, \quad p^* \in \mathfrak{P}^*, \quad f^* \in \mathfrak{F}^*.$$

Wenden wir Satz 4.1 auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ an, so folgt $(p, f^*) = 0$, also gilt stets $(p, h) = (p, p^*)$. Angenommen, p ist zu jedem Vektor aus $\mathfrak{P}^*$ orthogonal, so ist $(p, h) = 0$. Dies gilt für jedes $h \in \mathfrak{H}$, also ist $p = 0$.

b) Der Beweis für die andere Hälfte des Satzes erfolgt analog.

Satz 4.3. *Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Fluchtvektoren bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein invarianter, abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{F}$ besteht genau aus allen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$, die $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$ erfüllen.*

Beweis. Sei $\overline{\mathfrak{F}}$ die Menge aller Vektoren $h \in \mathfrak{H}$, die $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$ erfüllen. Dann ist $\overline{\mathfrak{F}}$ ein linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$. Er ist als Durchschnitt von Hyperräumen schwach-abgeschlossen, also erst recht stark-abgeschlossen. Ferner ist $\overline{\mathfrak{F}}$ unter $\mathfrak{G}$ invariant. Denn wenn $h \in \overline{\mathfrak{F}}$ und $a \in \mathfrak{G}$ ist, dann gilt für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$

$$(a h, g) = (h, a^* g) = 0,$$

letzteres, weil $\mathfrak{P}^*$ unter $\mathfrak{G}^*$ invariant ist. Also ist $\overline{\mathfrak{F}}$ unter $\mathfrak{G}$ invariant. Nach Satz 4.1 ist nun $\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$. Es gilt aber sogar das Gleichheitszeichen. Sei $h \in \overline{\mathfrak{F}}$ beliebig gewählt. Nach Satz 3.2 läßt sich h in der Form

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}$$

darstellen, wobei $p \in \mathfrak{R}(h)$ gewählt werden kann. Da $\overline{\mathfrak{F}}$ invariant und abgeschlossen ist, ist $\mathfrak{R}(h) \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$, also $p \in \overline{\mathfrak{F}}$. Somit gilt $(p, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$. Daraus folgt aber nach Satz 4.2, daß $p = 0$ und somit $h = f \in \mathfrak{F}$ ist.

Ganz analog beweist man den

Satz 4.4. *Der Raum $\mathfrak{P}$ besteht genau aus allen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$, für die $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{F}^*$ gilt.*

Mit dem Satz 4.3 ist die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes bewiesen: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ läßt sich auf genau eine Weise in der Form

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F} \tag{3}$$

darstellen. Insbesondere ist stets $p \in \mathfrak{R}(h)$.

Satz 4.5. *Die Komponenten p, f der Zerlegung (3) von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.*

Beweis. Aus der Linearität der Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$, sowie der Eindeutigkeit der Zerlegung (3) folgt ohne weiteres deren Linearität. Ebenso folgt aus der Invarianz der Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ die Invarianz der Darstellung (3):

$$x h = x p + x f, \quad x p \in \mathfrak{P},\ x f \in \mathfrak{F}$$

für jedes $x \in \mathfrak{G}$. Wegen der Linearität braucht die Stetigkeit nur noch an der Stelle $0 \in \mathfrak{H}$ nachgewiesen zu werden. Wegen $p \in \mathfrak{R}(h)$ gilt stets

$$|p| \leq \Gamma |h|.$$

Also hängt p stetig von h ab. Daraus folgt aber, daß auch $f = h - p$ stetig von h abhängt.

Anmerkung. Wegen der völligen Symmetrie im Auftreten von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ bleiben sämtliche Ergebnisse bestehen, wenn man $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ vertauscht. Insgesamt haben wir also die Aussagen:

$\mathfrak{F}$ ist der zu $\mathfrak{P}^*$ orthogonale Raum.	$\mathfrak{F}^*$ ist der zu $\mathfrak{P}$ orthogonale Raum.
$\mathfrak{P}$ ist der zu $\mathfrak{F}^*$ orthogonale Raum.	$\mathfrak{P}^*$ ist der zu $\mathfrak{F}$ orthogonale Raum.

§ 5. Eine Kennzeichnung der fastperiodischen Vektoren.

Satz 5.1. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion*

$$\varphi(x) = (x h, g)$$

fastperiodisch auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist (im Sinne von Maak [13], S. 142).

Beweis. Daß die Bedingung notwendig ist, ist klar. Sei nun h ein Vektor aus $\mathfrak{H}$, für den für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion $\varphi(x) = (x\,h, g)$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ ist. Jedenfalls existiert eine Zerlegung

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}.$$

Wählen wir $g \in \mathfrak{F}^*$, so gilt nach Satz 4.1

$$\varphi(x) = (x\,f, g).$$

Mit $\varphi(x)$ ist auch $|\varphi(x)|$ eine fastperiodische Funktion auf $\mathfrak{G}$. Nun können wir genau so wie im Beweise des Satzes 4.1 schließen, daß der Mittelwert von $|\varphi(x)|$ verschwindet, was das identische Verschwinden von $\varphi(x)$ zur Folge hat. Für $x = 1 \in \mathfrak{G}$ erhält man $(f, g) = 0$. Dies gilt für jedes beliebige $g \in \mathfrak{F}^*$. Nach Satz 4.2 muß dann aber $f = 0$ sein. Es ist somit der Vektor $h = p$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$.

Anhang I. Eine Kennzeichnung der Fluchtvektoren im Hilbertraum.

Zunächst beweisen wir eine Aussage über schwach-konvergente Folgen im Hilbertraum.

Satz 1. *Wenn $h_i \to 0$ (schwach) gilt, so gibt es eine Teilfolge h_{i_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ der Folge h_i und ferner eine Folge $k_\nu \in \mathfrak{H}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, derart, daß*

$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu$$
$$|h_{i_\nu} - k_\nu| \to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty$$

gilt.

Beweis. Wir konstruieren h_{i_ν} und k_ν durch vollständige Induktion. Zunächst sei $i_1 = 1$, $k_1 = h_1$. Angenommen, die Elemente h_{i_ν}, k_ν sind für $\nu < n$ $(n > 1)$ schon bestimmt, derart, daß

$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu, \quad 1 \leq \mu,\ \nu < n$$
$$|h_{i_\nu} - k_\nu| < \frac{1}{\nu}$$

und $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}$ gilt. Dann sei $\mathfrak{H}_{n-1}$ der von $k_1, \ldots, k_{n-1}$ aufgespannte Teilraum endlicher Dimension von $\mathfrak{H}$ und Ph_i die Projektion von h_i auf $\mathfrak{H}_{n-1}$. Bekanntlich gilt nun $|Ph_i| \to 0$. Wir können also $i_n > i_{n-1}$ so bestimmen, daß

$$|Ph_{i_n}| < \frac{1}{n}$$

gilt. Wir setzen $k_n = h_{i_n} - Ph_{i_n}$. Dann gilt

$$|h_{i_n} - k_n| < \frac{1}{n},$$
$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,\ 1 \leq \mu,\ \nu \leq n.$$

Die so entstehenden Folgen h_{i_ν}, k_ν haben die gesuchten Eigenschaften.

Satz 2. *Sind $k_1, \ldots, k_n$ Elemente von $\mathfrak{H}$, für welche*

$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,\ 1 \leq \mu,\ \nu \leq n$$

und — mit passendem $A>0$ —

$$|k_\nu|<A \qquad (\nu=1,\dots,n)$$

gilt, so gilt für jedes $g\in\mathfrak{H}$ *die „Besselsche Ungleichung"*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|(g,k_\nu)|^2\leq A^2|g|^2$$

(vgl. NAGY [16], S. 4).

Nunmehr erhalten wir den

Satz 3. *Ein Vektor* $h\in\mathfrak{H}$ *ist dann und nur dann Fluchtvektor unter der Gruppe* $\mathfrak{G}=\{x,y,\dots\}$, *wenn für jedes* $g\in\mathfrak{H}$ *die Funktion*

$$\varphi(x)=|(xh,g)|^2$$

auf $\mathfrak{G}$ *linksergodisch* (vgl. MAAK [15], S. 36) *mit dem Mittelwert* 0 *ist.*

Beweis. I. Sei $h\in\mathfrak{H}$ Fluchtvektor unter der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir bestimmen eine Folge $x_\nu\in\mathfrak{G}$ derart, daß $x_\nu h\to 0$ (schwach) gilt. Nach Satz 1 können wir gleich annehmen (Teilfolge!), daß es eine Folge $k_\nu\in\mathfrak{H}$ gibt, derart, daß

$$|x_\nu h-k_\nu|\to 0 \tag{1}$$

und

$$(k_\mu,k_\nu)=0 \quad \text{für} \quad \mu\neq\nu$$

gilt. Wegen der Beschränktheit der schwach-konvergenten Folge $x_\nu h$ gibt es ein $A>0$ derart, daß $|k_\nu|<A$ für $\nu=1,2,\dots$ gilt. Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig gegeben. Wir wählen $n>\frac{2A^2|g|^2\Gamma^2}{\varepsilon}$. Ferner bestimmen wir $N>0$ derart, daß für $\nu>N$ und beliebiges $x^*\in\mathfrak{G}^*$

$$\big|\,|(x_\nu h,x^*g)|^2-|(k_\nu,x^*g)|^2\big|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

gilt. Wegen $|x^*g|\leq\Gamma|g|$ und (1) ist das stets möglich. Nun haben wir für jedes $x\in\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\nu=N+1}^{N+n}\varphi(x\,x_\nu)&=\frac{1}{n}\sum|(x_\nu h,x^*g)|^2\\&<\frac{1}{n}\sum|(k_\nu,x^*g)|^2+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{(nach (2))}\\&\leq\frac{1}{n}A^2|x^*g|^2+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{(nach Satz 2)}\\&\leq\frac{1}{n}A^2|g|^2\Gamma^2+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Dies ist aber der Ausdruck für die Tatsache, daß $\varphi(x)$ linksergodisch mit dem Mittelwert 0 ist (vgl. MAAK [15], S. 36). Es ist übrigens nicht schwer, mit Hilfe der adjungierten Gruppe $\mathfrak{G}^*$ zu beweisen, daß $\varphi(x)$ auch rechtsergodisch mit dem Mittelwert 0 ist.

II. Sei h ein Vektor aus $\mathfrak{H}$ derart, daß für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion

$$\varphi(x) = |(xh, g)|^2$$

auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ linksergodisch mit dem Mittelwert 0 ist. Wählen wir insbesondere $g \in \mathfrak{P}^*$, so ist die Funktion

$$\psi(x^*) = |(h, x^* g)|^2$$

fastperiodisch auf $\mathfrak{G}^*$. Aus $\psi(x^*) = \varphi(x)$ schließt man sofort auf die Fastperiodizität von $\varphi(x)$ auf $\mathfrak{G}$. Nach einem bekannten Satze über fastperiodische Funktionen folgt aus dem Verschwinden ihres Mittelwertes ihr identisches Verschwinden. Also ist insbesondere

$$|(h, g)|^2 = \varphi(1) = 0,$$

d. h. $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$. Nach § 4, Satz 3 ist also h Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$.

Anmerkung. Mit Satz 3 ist der Anschluß unserer Ergebnisse an die Arbeiten von GODEMENT [9] und MAAK [15] hergestellt.

Anhang II. Verallgemeinerung auf gleichmäßig-konvexe Räume.

Die Ergebnisse der §§ 1 bis 5 lassen sich wie folgt verallgemeinern:

Sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein (komplexer) Banachraum. Unter dem zum Raum $\mathfrak{H}$ dualen Raum $\mathfrak{H}^*$ versteht man bekanntlich den (komplexen) linearen Raum aller stetigen Linearformen $f^*, g^*, h^*, \ldots$ auf $\mathfrak{H}$. Die durch Anwendung der Linearform $h^* \in \mathfrak{H}^*$ auf den Vektor $h \in \mathfrak{H}$ entstehende Zahl bezeichnen wir mit (h, h^*). Man führt in $\mathfrak{H}^*$ durch die Festsetzung

$$|h^*| = \sup_{|h| \leq 1} |(h, h^*)| \tag{1}$$

eine Norm ein. Dadurch wird $\mathfrak{H}^*$ zu einem Banachraum gemacht. (h, h^*) ist nun eine in beiden Variablen simultan stetige Bilinearform, bei der die erste Variable in $\mathfrak{H}$, die zweite in $\mathfrak{H}^*$ läuft.

Es gilt bekanntlich (nach dem Satz von Hahn-Banach; vgl. BOURBAKI [5], S. 110) für jedes $h \in \mathfrak{H}$

$$|h| = \sup_{|h^*| \leq 1} |(h, h^*)|. \tag{2}$$

Anmerkung. Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum, so sind alle genannten Voraussetzungen erfüllt. Bekanntlich kann man $\mathfrak{H}$ dann mit seinem dualen Raum $\mathfrak{H}^*$ identifizieren (NAGY [16], S. 9).

Setzen wir nun voraus, daß der Banachraum $\mathfrak{H}$ gleichmäßig-konvex sei (vgl. CLARKSON [6]), so gelten sämtliche Ergebnisse der §§ 1 bis 3 auch für diesen Fall. Einige Schwierigkeiten bereitet lediglich der Satz 1.6. Um ihn auch für gleichmäßig-konvexe Räume zu beweisen, kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Man kann Satz 1.4 allgemein für eine beschränkte Filterbasis $K = \{\mathfrak{K}\}$ (BOURBAKI [4], S. 8) von nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Mengen $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ beweisen: Zu $\mathfrak{K}_1 \in K$, $\mathfrak{K}_2 \in K$ gebe es stets ein $\mathfrak{K}_3 \in K$ mit $\mathfrak{K}_3 \subseteq \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$. Dann

ist $\bigcap_{\Re \in K} \Re$ nichtleer. Entsprechend verallgemeinert man nun Satz 1.5 auf Cauchy-Filterbasen (BOURBAKI [4], S. 10) bezüglich der schwachen Topologie in $\mathfrak{H}$. Das ist ganz leicht. Man erhält: Jede Cauchyfilterbasis bezüglich der schwachen Topologie ist schwach-konvergent (d.h. $\mathfrak{H}$ ist schwach-vollständig) und der Limes liegt in der stark-abgeschlossenen konvexen Hülle einer jeden Menge der Filterbasis.

Daraus folgt: Jede beschränkte Filterbasis in einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ gestattet eine schwach-konvergente Verfeinerung, deren Limes notwendig in $\mathfrak{H}_0$ liegen muß.

2. Unter Benutzung eines Gedankenganges von KREIN-ŠMULIAN ([12], S. 571) gehen wir nun weiter vor: In $\mathfrak{H}$ sei eine beschränkte Folge h_i gegeben. Sie spannt einen abgeschlossenen separablen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ auf. Sei f_ν eine in $\mathfrak{H}_0$ stark-dichte Punktfolge. Wegen (2) gibt es zu jedem f_ν ein $g_\nu^* \in \mathfrak{H}^*$, derart, daß

$$|g_\nu^*| \leq 1, \qquad |(f_\nu, g_\nu^*)| \geq \tfrac{1}{2}|f_\nu|$$

gilt. Es gilt nun: Ist $f \in \mathfrak{H}_0$ derart, daß $(f, g_\nu^*) = 0$ für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ ist, so ist $f = 0$.

3. Sei nun k_j eine Teilfolge der Folge h_i und für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ sei der Limes

$$\lim_{j \to \infty} (k_j, g_\nu^*) = \varkappa_\nu$$

vorhanden. Zunächst kann man das der Folge k_j entsprechende Frèchetfilter F (BOURBAKI [4], S. 8) zu einem schwach-konvergenten Filter $\bar{F}$ verfeinern (BOURBAKI [4], S. 9), dessen Limes k nach Nr. 1 in $\mathfrak{H}_0$ liegen muß. Man folgert sofort, daß $(k, g_\nu^*) = \varkappa_\nu$ gilt, und nach Nr. 2 ist k durch diese Gleichungen schon eindeutig festgelegt.

Würde nun die Folge k_j nicht schwach gegen k konvergieren, so könnte man zum Filter F noch eine andere schwach-konvergente Verfeinerung finden, deren Limes von k verschieden ist. Das steht zu der Eindeutigkeit von k im Widerspruch. Also gilt $k_j \to k$ (schwach). Damit ist Satz 1.6 auf unseren allgemeinen Fall übertragen. Die übrigen Ergebnisse der §§ 1 bis 3 übertragen sich ohne Schwierigkeit.

Im § 4 kommt die duale Gruppe $\mathfrak{G}^*$ mit ins Spiel: Man kann jeder beschränkten linearen Transformation x in $\mathfrak{H}$ genau eine lineare Transformation x^* in $\mathfrak{H}^*$ (mit derselben Schranke) zuordnen, derart, daß für alle $f \in \mathfrak{H}$, $f^* \in \mathfrak{H}^*$

$$(x f, f^*) = (f, x^* f^*)$$

gilt. Durchläuft x die beschränkte Gruppe $\mathfrak{G}$, so durchläuft x^* die duale Gruppe $\mathfrak{G}^*$.

Da wir in § 4 die für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gewonnenen Ergebnisse auch für $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ benötigen, so müssen wir voraussetzen, daß auch der Raum $\mathfrak{H}^*$ gleichmäßig-konvex metrisiert werden kann. Dann lassen sich auch sämtliche Ergebnisse der §§ 4 und 5 übertragen.

Sämtliche Ergebnisse der §§ 1 bis 5 sind also auf den Fall beschränkter Gruppen in dualen Paaren gleichmäßig-konvexer Räume übertragbar. Dieser Fall liegt z.B. für die Raumpaare L^p, $L^{p'}$ $\left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ vor (vgl. NAGY [16], S. 9).

Hier taucht die Frage auf: Unter welchen Voraussetzungen kann man den dualen Raum $\mathfrak{H}^*$ eines gleichmäßig-konvex metrisierbaren Raumes $\mathfrak{H}$ ebenfalls gleichmäßig-konvex metrisieren? In gewissem Maße gibt hierüber ein Satz von NAKANO ([17], S. 124) Auskunft: Die durch die Vorschrift (1) in $\mathfrak{H}^*$ eingeführte Norm ist dann und nur dann gleichmäßig-konvex, wenn die Norm in $\mathfrak{H}$ „gleichmäßig-flach" ist, d.h. wenn es zu jedem $\gamma > 0$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, derart, daß für $\varepsilon \leq |f| \leq \gamma$, $\varepsilon \leq g \leq \gamma$, $|f - g| \leq \delta$ stets

$$\left|\frac{f+g}{2}\right| \geq \frac{|f|+|g|}{2} - \varepsilon \cdot |f-g|$$

gilt.

Literatur.

[1] ALAOGLU-BIRKHOFF: General ergodic theorems. Ann. of Math. **41**, 293—309 (1940). — [2] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [3] BIRKHOFF, G.: An ergodic theorem for general semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **25**, 625—627 (1939). — [4] BOURBAKI, N.: Topologie générale (fascicule des résultats). Paris 1953. — [5] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [6] CLARKSON: Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 393—414 (1936). — [7] DAY, M. M.: Means for bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 276—291 (1950). — [8] EBERLEIN, W. F.: Abstract ergodic theorems and weakly almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 217—240 (1949). — [9] GODEMENT, R.: Les fonctions de type positif. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948). — [10] HOPF, E.: Ergodentheorie. Berlin 1937. — [11] JACOBS, K.: Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im HILBERTschen Raum. Math. Ann. **128**, 340—349 (1954). — [12] KREIN-ŠMULIAN: On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. Ann. of Math. **41**, 556—583 (1940). — [13] MAAK, W.: Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950. — [14] MAAK, W.: Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum. Math. Ann. **122**, 157—166 (1950). — [15] MAAK, W.: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine u. angew. Math. **190**, 34—48 (1952). — [16] SZEGED-NAGY, B. v.: Spektraldarstellungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Berlin 1942. — [17] NAKANO: Modulared linear spaces. J. Fac. Sci. Tokyo **6**, 85—131 (1951). — [18] PETTIS: A proof that every uniformly convex space is reflexive. Duke Math. J. **5**, 249—253 (1939).

München, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Oktober 1954.)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 429—434 (1955)

Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen.

Von
MARTIN KNESER.

Einleitung. G sei eine additive abelsche Gruppe, in der jeder Teilmenge A eine reelle Maßzahl $m(A)$ zugeordnet ist. Für verschiedene G und m sind in letzter Zeit Sätze folgender Art aufgestellt worden: A und B seien zwei nicht leere Teilmengen von G und $A+B$ ihre Summe (die aus allen Elementen $a+b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ besteht); dann gilt mit einem näher bestimmbaren Restglied $r(A, B)$ die Ungleichung

$$m(A+B) \geq \min\big(m(G), m(A)+m(B)-r(A,B)\big). \tag{1}$$

Am bekanntesten ist in dieser Richtung die „$(\alpha+\beta)$-Hypothese" (siehe z.B. [1] im Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit), wo G die ganzen rationalen Zahlen und m die SCHNIRELMANNsche Dichte bedeuten und $r(A, B)=0$ behauptet wird. Für die asymptotische Dichte gilt eine entsprechende Aussage [4], nur ist hier nicht immer $r(A, B)=0$; nämlich dann nicht, wenn es eine Untergruppe H von G gibt derart, daß alle genügend großen Zahlen aus $A+B+H$ schon in $A+B$ liegen; und zwar ist $r(A, B)=m(H)$ wenn H maximal gewählt ist. Weitere Beispiele finden sich in [6], [7] und [8], wo G eine beliebige endliche abelsche Gruppe und $m(A)$ die Anzahl der Elemente von A ist.

Im folgenden werden zwei weitere Ergebnisse dieser Art angegeben. Das erste (§ 1) bezieht sich auf den zuletzt genannten Fall, daß $m(A)$ die Anzahl der Elemente von A ist, und besagt in Analogie zu [4], daß $r(A, B)=m(H)$ ist, wo H die größte Untergruppe von G mit der Eigenschaft $A+B+H=A+B$ ist (das bedeutet, daß $A+B$ aus vollen Restklassen modulo H besteht). Ähnliche aber schwächere Aussagen finden sich schon bei MANN [6], [7]. Das zweite (§ 2) behandelt die n-dimensionale Torusgruppe und den inneren JORDANschen Inhalt; hier ist wieder $r(A, B)=0$[1]).

Die Ähnlichkeit der angeführten Aussagen beschränkt sich nicht auf die äußere Form, sondern ist auch in den Beweisen zu finden: Alle diese Sätze werden mit Hilfe der e-Transformationen (s. [1]) bewiesen; nur im Falle der Torusgruppe kommt noch eine Überlegung hinzu, die den Übergang vom Diskontinuierlichen zum Kontinuierlichen gestattet.

[1]) *Zusatz bei der Korrektur (20. 12. 54):* Inzwischen wurde mir bekannt, daß der Inhalt von § 2, insbesondere der Satz 3 mit einem dem hier gegebenen ganz ähnlichen Beweis in einer Arbeit von A. M. MACBEATH enthalten ist: On measure of sum sets II. The sum-theorem for the torus. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 40—43 (1953).

Das Ergebnis aus § 2 erlaubt schließlich Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen (§ 3). Es ergeben sich einfache Beweise, Verschärfungen und Verallgemeinerungen bekannter Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen homogenen und inhomogenen diophantischen Approximationen (vgl. [2], [3], [9], [10]).

Ein kurzer Bericht über die Ergebnisse dieser Arbeit ist in den Proceedings des Internationalen Mathematiker-Kongresses 1954 erschienen [5].

§ 1. Ein Satz über abelsche Gruppen.

In diesem Abschnitt sei G eine beliebige (nicht notwendig endliche) abelsche Gruppe, A und B endliche Teilmengen von G mit $n(A)$ bzw. $n(B)$ Elementen. Aus dem Hauptergebnis der Arbeit [4] folgt[2]) für endliche zyklische Gruppen der

Satz 1. *Zu irgend zwei endlichen Teilmengen A und B von G gibt es eine Untergruppe H von G so, daß $A+B+H=A+B$ ist und die Ungleichung*

$$n(A+B) \geq n(A)+n(B)-n(H)$$

gilt[3]).

Dieser Satz läßt sich auch für beliebige abelsche Gruppen beweisen. Das läuft aber nur auf eine Übertragung (mit einigen Vereinfachungen) der Beweise aus [4] (insbesondere S. 464—470) hinaus und soll daher hier nicht durchgeführt werden. Dagegen läßt sich die folgende schwächere Aussage leichter beweisen, und da sie die Grundlage für alles Weitere bildet, führe ich das kurz aus. Übrigens kann man einen Beweis auch der Note [7] entnehmen.

Satz 2. *Für irgend zwei nicht leere endliche Teilmengen A und B von G gilt*

$$(2) \qquad A+B=G \qquad \text{falls} \quad n(A)+n(B)>n(G),$$

$$(3) \qquad n(A+B)\geq n(A)+n(B)-n(H) \qquad \text{falls} \quad n(A)+n(B)\leq n(G);$$

dabei ist H eine echte endliche Untergruppe von G.

Beweis. Ist $n(A)+n(B)>n(G)$ und c ein beliebiges Element aus G, so haben die beiden Mengen A und $c-B$ zusammen mehr Elemente als G; also gibt es ein gemeinsames Element $a=c-b$, und das bedeutet $c=a+b\in A+B$, also, da c beliebig war, $A+B=G$. Ist aber $n(A)+n(B)\leq n(G)$, so wenden wir Induktion nach $n(B)$ an. Besteht B nur aus einem Element, so setzen wir $H=\{0\}$. Anderenfalls unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:

1. Für alle Elementepaare (b_1, b_2) aus B liegt $A+b_2-b_1$ in A. Dann gilt auch $A+K\subseteq A$, wo K die von den Differenzen b_2-b_1 erzeugte Untergruppe ist. Ist $K=G$, so folgt $A=G$, also auch $A+B=G$; wegen der Voraussetzung von (3) gilt dann $n(A+B)\geq n(A)+n(B)$, also erst recht die Ungleichung (3) mit $H=\{0\}$. Ist aber $K\neq G$, so zeigt bei festem $a\in A$ die Abbildung von $k\in K$ auf $a+k\in A$, daß K endlich ist, und bei festem $b_1\in B$ die Abbildung von $b\in B$ auf $b-b_1\in K$, daß $n(B)\leq n(K)$ ist. Daraus folgt $n(A+B)\geq n(A)\geq n(A)+n(B)-n(K)$; das ist die Ungleichung (3) mit $H=K$.

[2]) Vgl. den Schluß der Einleitung von [4].

[3]) Der Fall $n(A)+n(B)>n(G)$ ist hierin mit $H=G$ enthalten.

2. Es gibt Elemente $a \in A$ und $b_1, b_2 \in B$ so, daß $a + b_2 - b_1$ nicht in A liegt. Dann ersetzen wir zunächst A und B durch die Mengen $A - a$ und $B - b_1$ die beide das Nullelement enthalten. Wegen $n(A-a) = n(A)$, $n(B-b_1) = n(B)$ und $n\big((A-a)+(B-b_1)\big) = n\big((A+B)-(a+b_1)\big) = n(A+B)$ ändert das nichts an der Behauptung; außerdem ist $b_2 - b_1$ zwar in $B - b_1$ aber nicht in $A - a$ enthalten. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß die Null in A und B liegt und daß B nicht ganz in A enthalten ist. Nun bilden wir die Mengen $A' = A \cup B$ und $B' = A \cap B$. Dann gilt ersichtlich $n(A') + n(B') = n(A) + n(B) \leq n(G)$ und $A' + B' \subseteq A + B$; außerdem ist $n(B') < n(B)$ und A' und B' enthalten beide die Null, sind also nicht leer. Die Induktionsannahme liefert dann $n(A' + B') \geq n(A') + n(B') - n(H)$, also nach dem eben Gesagten $n(A + B) \geq n(A) + n(B) - n(H)$ wie behauptet.

§ 2. Die n-dimensionale Torusgruppe.

Für das Folgende seien

R^n der n-dimensionale reelle Vektorraum,

$i(A)$ der innere JORDANsche Inhalt einer Menge $A \subset R^n$,

I ein von n linear unabhängigen Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ aufgespanntes Gitter mit der Determinante $d = d(I)$,

$T = R^n/I$ die n-dimensionale Torusgruppe,

φ die kanonische Abbildung von R^n auf T.

Den inneren JORDANschen Inhalt $i(A)$ einer Menge A aus T erklären wir so: Ist W ein Fundamentalparallelotop des Gitters I, so sei $i(A) = i\big(W \cap \varphi^{-1}(A)\big)$, insbesondere also $i(T) = i(W) = d(I)$[4]. Aus dem Satz 2 folgt dann durch einen Grenzübergang der

Satz 3[1]). *Sind A und B zwei nicht leere Teilmengen von T, so gilt*

(4) $\qquad A + B = T \qquad$ *falls* $\quad i(A) + i(B) > i(T)$[5]),

(5) $\qquad i(A + B) \geq i(A) + i(B) \quad$ *falls* $\quad i(A) + i(B) \leq i(T)$[6]).

Beweis. Im Falle (4) gilt für ein beliebiges Element $c \in T$ die Ungleichung $i(A) + i(c - B) = i(A) + i(B) > i(T)$; A und $c - B$ müssen also einen Punkt $a = c - b$ gemeinsam haben, und das bedeutet $c = a + b \in A + B$, also $A + B = T$. Ist im Falle (5) $i(A) = 0$, so sind wir wegen $i(A + B) \geq i(B) = i(A) + i(B)$ fertig. Wir können also $i(A)$ und $i(B)$ ungleich 0 voraussetzen. Dann sei p eine natürliche Zahl, $I_p = p^{-1} I$ das Gitter, das von den Vektoren $p^{-1} e_1, \ldots, p^{-1} e_n$ aufgespannt wird und T_p die Faktorgruppe I_p/I mit der Ordnung p^n. Jedem

[4]) Eleganter aber weniger elementar wäre es natürlich, die Theorie des HAARschen Maßes heranzuziehen.

[5]) Hier wie in den folgenden Sätzen kann man das $>$ in der Voraussetzung durch $\geq$ ersetzen, falls die auftretenden Mengen kompakt (d. h. in T abgeschlossen, in R^n abgeschlossen und beschränkt) sind.

[6]) Dieser Satz gilt wörtlich genau so, wenn man statt des JORDANschen Inhalts $i(A)$ das innere LEBESGUEsche Maß $l(A)$ zugrunde legt. Die Aussage (5) kann man sogar zu $i(A + B) \geq l(A) + l(B)$ verschärfen, wenn $l(A)$ und $l(B)$ beide positiv sind. Für die folgenden Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen ist das aber unwesentlich.

Vektor $x=\sum_i x_i e_i$ aus I_p ordnen wir den Würfel $W_p(x)$ der Vektoren $y=\sum_i y_i e_i$ mit $x_i \leq y_i < x_i + p^{-1}$ und jedem Element $a=\varphi(x)$ aus T_p die Menge $W_p(a) = \varphi\left(W_p(x)\right)$ zu. Jetzt sei A_p die Menge der $a \in T_p$ für die $W_p(a)$ in A liegt. Dann gilt $n(A_p)\, p^{-n} i(T) \leq i(A)$ und der Grenzwert der linken Seite für $p \to \infty$ ist gleich $i(A)$; entsprechendes gilt für die analog gebildeten Mengen B_p und $(A+B)_p$. Insbesondere folgt $n(A_p) > 0$ und $n(B_p) > 0$ für genügend großes p sowie $n(A_p) + n(B_p) \leq n(T_p)$, so daß die Formel (3) aus Satz 2 anwendbar ist. Wir erhalten $n(A_p + B_p) \geq n(A_p) + n(B_p) - n(H_p)$ mit einer echten Untergruppe H_p von T_p. Wir setzen jetzt voraus, daß p eine Primzahl ist, was $n(H_p) \leq p^{n-1}$ zur Folge hat. Beachten wir, daß $(A+B)_p$ die Summe $A_p + B_p$ umfaßt, so ergibt sich, da es beliebig große Primzahlen p gibt

$$i(A+B) = \lim_{p\to\infty} n\left((A+B)_p\right) p^{-n} i(T) \geq \lim_{p\to\infty} \left(n(A_p) + n(B_p) - p^{n-1}\right) p^{-n} i(T)$$
$$= \lim_{p\to\infty} n(A_p)\, p^{-n} i(T) + \lim_{p\to\infty} n(B_p)\, p^{-n} i(T) = i(A) + i(B),$$

wie behauptet.

Dieser Satz läßt sich natürlich sofort durch Induktion auf mehr als zwei Summanden verallgemeinern und gibt so insbesondere den

Satz 4. *Sind $A_1, \ldots, A_r$ nicht leere Teilmengen der Torusgruppe T und ist $\sum_k i(A_k) > i(T)$, so gilt $\sum_k A_k = T$.*

§ 3. Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen.

Wir brauchen jetzt die Ergebnisse des vorigen Abschnitts nur in Aussagen über den Vektorraum R^n zu übersetzen um Sätze aus der Geometrie der Zahlen zu erhalten. Ist A eine Menge des R^n und gibt es in A keine $k+1$ inneren Punkte, die modulo I kongruent sind, so gilt $i(A) \leq k \cdot i\left(\varphi(A)\right)$. Aus Satz 4, angewandt auf die Mengen $\varphi(A_j) \subseteq T$ folgt also der

Satz 5. *Enthält für $j=1, \ldots, r$ die Menge $A_j \subset R^n$ nicht mehr als k_j modulo I kongruente Punkte im Inneren und ist $\sum_j k_j^{-1} i(A_j) > d(I)$, so gibt es zu jedem Vektor $x \in R^n$ einen Gittervektor $g \in I$ derart, daß $x-g$ in $\sum_j A_j$ liegt. Die Mengen $\sum_j A_j + g$ $(g \in I)$ überdecken also den ganzen Raum.*

Diese Aussage läßt sich noch verschärfen zu einer Abschätzung der Anzahl der Vektoren g mit der genannten Eigenschaft; z. B. für $r=2$ zu

Satz 6. *Es sei $0 < k \leq k+h \leq l$; die Menge $A \subset R^n$ enthalte nicht mehr als k, die Menge $B \subset R^n$ nicht mehr als l innere Punkte, die modulo I kongruent sind. Ist dann $(1 - h\, l^{-1})\, k^{-1} i(A) + l^{-1} i(B) > d(I)$, so gibt es zu jedem Vektor $x \in R^n$ mindestens $k+h$ Gittervektoren $g \in I$ derart, daß $x-g$ in $A+B$ liegt.*

Für $h=0$, $k=l$ sind hierin Sätze von HLAWKA ([2] S. 304) und SCHNEIDER [10] enthalten.

Beweis. Es sei $\bar{A}_j$ die Menge der Elemente aus T, die bei der Abbildung φ Bild von mindestens j Punkten aus A sind. Dann gilt $\bar{A}_1 \supseteq \bar{A}_2 \supseteq \cdots \supseteq \bar{A}_k$ und $i(A) = i(\bar{A}_1) + \cdots + i(\bar{A}_k)$. Entsprechend seien die Mengen $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_l$ erklärt.

Die vorausgesetzte Ungleichung läßt sich umschreiben zu $k^{-1}i(A)+(l-h)^{-1}\left(i(B)-h\,d(I)\right)>d(I)$. Wegen $i(\overline{B}_j)\leq i(T)=d(I)$ folgt $i(B)=\sum_{j=1}^{l} i(\overline{B}_j)\leq h\,d(I)+\sum_{j=h+1}^{l} i(\overline{B}_j)$, also $k^{-1}\sum_{j=1}^{k} i(\overline{A}_j)+(l-h)^{-1}\sum_{j=h+1}^{l} i(\overline{B}_j)>d(I)$. Nun bilden die Zahlen $i(\overline{B}_1), i(\overline{B}_2), \ldots$ eine monoton fallende Folge; wegen $l-h\geq k$ folgt $(l-h)^{-1}\sum_{j=h+1}^{l} i(\overline{B}_j)\leq k^{-1}\sum_{j=h+1}^{h+k} i(\overline{B}_j)$ und daher $\sum_{j=1}^{k} i(\overline{A}_j)+\sum_{j=h+1}^{h+k} i(\overline{B}_j)>k\,d(I)$. Also muß mindestens eine der k Summen $i(\overline{A}_{k-j+1})+i(\overline{B}_{h+j})$ $(j=1,\ldots,k)$ größer als $d(I)$ sein, und es folgt $\overline{A}_{k-j+1}+\overline{B}_{j+h}=T$. Nun sei $x\in R^n$ beliebig und $\overline{a}\in\overline{A}_{k-j+1}$, $\overline{b}\in\overline{B}_{j-h}$ so, daß $\varphi(x)=\overline{a}+\overline{b}$ ist. Weiter sei $\overline{a}=\varphi(a_1)=\cdots=\varphi(a_{k-j+1})$ und $\overline{b}=\varphi(b_1)=\cdots=\varphi(b_{j+h})$. Unter den Summen a_r+b_s gibt es nach Satz 2 mindestens $k+h$ verschiedene; da die Vektoren $x-a_r-b_s$ in I liegen — es ist $\varphi(x-a_r-b_s)=\varphi(x)-\overline{a}-\overline{b}=0$ — erfüllen sie die Behauptung des Satzes.

Für eine weitere Anwendung führen wir einige Bezeichnungen ein: A sei ein beschränkter abgeschlossener konvexer Körper, tA der im Verhältnis $1:t$ ähnlich vergrößerte Körper und $a(t)=i\left(\varphi(tA)\right)$. Diese Funktion spiegelt wichtige Eigenschaften des Körpers A wieder. So ist $a(t)=t^n i(A)$ für genügend kleine t, und die obere Grenze dieser t ist bei symmetrischem A gleich $m_1/2$, wo m_1 das erste Minimum von A bezüglich I ist. Die Gleichung $a(t)=d(I)$ ist wegen der Abgeschlossenheit von A gleichbedeutend damit, daß es zu jedem Vektor aus R^n einen modulo I kongruenten Vektor in tA gibt, daß also $tA+I=R^n$ ist; die untere Grenze dieser t können wir jetzt leicht nach oben abschätzen. Dazu wenden wir Satz 3 auf $\varphi(sA)$ und $\varphi(tA)$ an; wegen der Konvexität von A ist $sA+tA=(s+t)A$ und daher ergibt sich die Ungleichung $a(s+t)\geq\min\left(d(I), a(s)+a(t)\right)$ und allgemeiner durch mehrfache Anwendung $a\left(\sum_i t_i\right)\geq\min\left(d(I), \sum_i a(t_i)\right)$. Bezeichnen wir mit $[q]$ das größte Ganze von q und außerdem mit $\langle q\rangle$ den Rest von q modulo eins, also $q=[q]+\langle q\rangle$, so gilt der

Satz 7. *Enthält tA nicht mehr als k modulo I kongruente Punkte im Innern, so gibt es für $s\geq\left([q]+\langle q\rangle^{1/n}\right)t$, $q=d(I)\,k t^{-n} i(A)^{-1}$ zu jedem Vektor $x\in R^n$ einen Gittervektor $g\in I$ derart, daß $x-g$ in sA liegt; die Mengen $sA+g$ $(g\in I)$ überdecken also den ganzen Raum.*

Beweis. Wegen $a(t)=i\left(\varphi(tA)\right)\geq k^{-1}i(tA)=k^{-1}t^n i(A)$ gilt

$$a(s)\geq\min\left(d(I), \sum_{i=1}^{[q]} a(t)+a\left(\langle q\rangle^{1/n}t\right)\right)\geq\min\left(d(I), ([q]+\langle q\rangle)\,k^{-1}t^n\,i(A)\right)=d(I),$$

und das hat, wie eben festgestellt, die Behauptung des Satzes zur Folge.

Setzt man insbesondere $k=1$, $t=m_1/2$, so muß für s die Ungleichung $s\geq([q]+\langle q\rangle^{1/n})\cdot m_1/2$ mit $q=2^n\cdot d(I)\cdot m_1^{-n} i(A)^{-1}$ erfüllt sein. Das stimmt bis auf eine geringe Verbesserung mit einem Ergebnis von Hlawka überein ([3], S. 190). Daß sich dies ohne weitere Kenntnis über A nicht mehr wesentlich verbessern läßt, sieht man an dem folgenden Beispiel, wo schon die Ungleichung $s\geq q\,m_1/2=d(I)\,(m_1/2)^{1-n} i(A)^{-1}$ für die Gültigkeit der Behauptung

des Satzes nicht mehr ausreicht[7]). I sei das Gitter der Vektoren in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten x, y, A sei der durch $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|x| + |y| \leq 3/2$ definierte Bereich. Es ist $d(I) = 1$, $i(A) = 7/2$, $m_1 = 1$, $q\, m_1/2 = 4/7$; der Körper $\frac{1}{7}A$ enthält aber keinen Vektor $(1/2 - x, 1/2 - y)$ mit ganzen x und y. Dagegen läßt sich wie in der Arbeit von HLAWKA die Aussage verschärfen, wenn man noch die höheren Minima heranzieht, doch machen die schärfsten so erhältlichen Aussagen Fallunterscheidungen über die Größenverhältnisse von $m_1, \ldots, m_n$, $d(I)$ und $i(A)$ nötig. Außerdem läßt sich Satz 7 ähnlich wie Satz 5 zu einer Abschätzung der Anzahl der Gittervektoren g verschärfen.

Literatur.

[1] CORPUT, J. G. VAN DER: On sets of integers I, II, III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 252—261, 340—350, 429—435 (1947). — [2] HLAWKA, E.: Zur Geometrie der Zahlen. Math. Z. **49**, 285—312 (1943). — [3] HLAWKA, E.: Zur Theorie des Figurengitters. Math. Ann. **125**, 183—207 (1952). — [3a] Referat über [3] von J. W. S. CASSELS: Zbl. Math. **47**, 50 (1953). — [4] KNESER, M.: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Z. **58**, 459—484 (1953). — [5] KNESER, M.: Anwendung eines Satzes von Mann auf die Geometrie der Zahlen. Proc. Int. Congr. of Math. 1954 Amsterdam, **2**, 32. — [6] MANN, H. B.: An addition theorem for sets of elements of abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 423 (1953). — [7] MANN, H. B.: On products of sets of groups elements. Canad. J. Math. **4**, 64—66 (1952). — [8] SCHERK, P., and J. H. B. KEMPERMAN: Complexes in abelian groups. Canad. J. Math. **6**, 230—237 (1954). — [9] SCHERK, P.: Convex bodies off center. Arch. d. Math. **3**, 303 (1952). — [10] SCHNEIDER, TH.: Über einen Hlawkaschen Satz aus der Geometrie der Zahlen. Arch. d. Math. **2**, 81—86 (1950).

[7]) Die auf eine noch schärfere Aussage bezügliche Bemerkung in [3a] ist nicht richtig.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 5. November 1954.)

EPHESER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 435—454 (1955)

Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*).

Von
HELMUT EPHESER.

Für die Lösbarkeit von Randwertaufgaben mit Differentialgleichungen der Gestalt $y''=f(x, y, y')$ werden neue hinreichende Bedingungen aufgestellt. — Nach der genauen Formulierung der Aufgaben und Voraussetzungen in § 1 und der Herleitung eines Hilfssatzes in § 2 wird in § 3 aus einem bekannten Existenzsatz ein neuer gewonnen, durch den ein Ergebnis von S. CINQUINI weiter ausgebaut wird. § 4 behandelt den Fall, daß die Funktion f nur in einem gewissen zylindrischen Bereich des Raumes ihrer unabhängigen Variablen definiert ist; anknüpfend an Untersuchungen von G. SCORZA-DRAGONI, M. NAGUMO, S. CINQUINI und G. ZWIRNER wird ein neuer Existenzsatz bewiesen, der allerdings wegen seiner komplizierten Formulierung kaum zur unmittelbaren Anwendung geeignet erscheint. Aus ihm ergeben sich aber in § 5 interessante Existenzsätze für den Fall, daß die Funktion f für alle x des zugrunde liegenden Intervalls und beliebige reelle y und y' erklärt ist. Diese Ergebnisse sind allgemeiner als alle bisher bekannten vergleichbaren Aussagen und stellen in einer gewissen, noch zu präzisierenden Hinsicht die Grenze des Erreichbaren dar.

In einer späteren Arbeit werde ich auf die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit eingehen.

§ 1. Problemstellung und Voraussetzungen.

Es werden Randwertaufgaben betrachtet, die durch eine Differentialgleichung

$$y''=f(x, y, y'), \qquad (a\leq x\leq b), \tag{0}$$

und eines der drei folgenden Randbedingungssysteme gekennzeichnet sind[1]):

$$y(a)=y(b)=0 \qquad \text{(Problem I)}, \tag{1}$$

$$y(a)=y'(b)=0 \qquad \text{(Problem II)}, \tag{2}$$

$$y'(a)=y(b)=0 \qquad \text{(Problem III)}. \tag{3}$$

*) Diese Arbeit ist ein erster, für den Druck gekürzter Auszug aus meiner Abhandlung „Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bei nichtlinearen Randwertaufgaben", die von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Hannover als Habilitationsschrift angenommen wurde. Für die Anregung zu diesen Untersuchungen danke ich Herrn Prof. Dr. L. COLLATZ.

[1]) Die homogene Gestalt der Randbedingungen ist hier gewählt worden, weil sie die Formulierung der späteren Sätze erleichtert. Die entsprechenden inhomogenen Randbedingungen lassen sich stets durch eine lineare Substitution der abhängigen Variablen auf die homogenen zurückführen.

Alle vorkommenden Größen werden als reell vorausgesetzt, und es soll $a<b$ sein.

Anstatt das Bestehen der Differentialgleichung (0) im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ zu verlangen, begnügt man sich zweckmäßigerweise mit der schwächeren Forderung

$$y'(x) - y'(a) = \int_a^x f\big(u, y(u), y'(u)\big)\, du \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b. \tag{4}$$

Dadurch wird es möglich, die grundlegenden Voraussetzungen über die Funktion f zu lockern, sofern die Integration im Lebesgueschen Sinne verstanden wird. Im folgenden wird stets verlangt:

Voraussetzung A. *Die Funktion $f(x, y, y')$ sei in ihrem Definitionsbereich für jedes feste x eine stetige Funktion des Veränderlichenpaares (y, y') und für jedes feste Wertepaar (y, y') eine meßbare Funktion von x.*

Diese auf C. CARATHÉODORY [1][2]) zurückgehende Voraussetzung wurde von G. SCORZA-DRAGONI [16] in die Behandlung der nichtlinearen Randwertaufgaben eingeführt.

In den meisten Fällen erweist es sich als notwendig, weiterhin zu fordern:

Voraussetzung B. *Jedem beschränkten Teilbereich $\mathfrak{D}$ des Definitionsbereiches der Funktion f läßt sich eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion $\mu_{\mathfrak{D}}(x)$ zuordnen, so daß für $(x, y, y') \in \mathfrak{D}$ stets $|f(x, y, y')| \leq \mu_{\mathfrak{D}}(x)$ ist.*

Als Lösung einer so formulierten Randwertaufgabe wird eine Funktion $y(x)$ angesehen, die im Intervall $a \leq x \leq b$ samt ihrer ersten Ableitung totalstetig[3]) ist, der Gl. (4) genügt und die jeweiligen Randbedingungen (1), (2) oder (3) erfüllt. Die ursprüngliche Differentialgleichung (0) gilt dann im allgemeinen nicht mehr für jedes x aus $\langle a, b\rangle$, jedoch immer noch in einem maßgleichen Kern dieses Intervalls.

In §§ 3—5 werden Sätze über die Lösbarkeit der im angegebenen Sinne verstandenen Probleme I, II und III aufgestellt.

§ 2. Herleitung eines Hilfssatzes.

Für die späteren Entwicklungen wird die Aussage benötigt, daß die Funktionen $y(x)$ aus einer gewissen, noch zu charakterisierenden Funktionenmenge $\mathfrak{M}$ gleichmäßig beschränkte erste Ableitungen besitzen. Das Verfahren zur Herleitung dieser Aussage stammt von M. NAGUMO [9]; sein Ergebnis haben T. SATÔ [11] und insbesondere L. TONELLI [19][4]) weiter ausgebaut.

---

[2]) Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[3]) Zu dem von G. VITALI eingeführten Begriff der absoluten Stetigkeit oder Totalstetigkeit vgl. man z. B.: C. CARATHÉODORY [1, Kap. X]. — TONELLI, L.: Fondamenti di calcolo delle variazioni, Bd. 1, S. 62—69. Bologna 1921. — ZORETTI-ROSENTHAL: Encykl. der Math. Wiss., II C Art. 9a), S. 1007 ff.

[4]) Dort findet sich zum erstenmal eine einseitige Beschränkung für y'', die etwa der Formel (6) des folgenden Hilfssatzes entspricht. Die volle Ausnutzung dieser Einseitigkeit ist für die Entwicklungen in den §§ 3—5 wesentlich.

G. SCORZA-DRAGONI [15] bis [18], S. CINQUINI [3] bis [5] und G. ZWIRNER [20], [22], [23] haben die darauf gestützte Beweismethode in mannigfacher Weise auf die Untersuchung des Problems I angewandt und zum Teil noch erweitert. Hier soll die angedeutete Aussage so formuliert werden, daß sie auch für die Behandlung der Probleme II und III verwendbar wird.

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{Y}$ die Menge aller für $a \leq x \leq b$ definierten Funktionen $y(x)$, die den nachstehenden Forderungen a) bis d) genügen:*

a) $y(x)$ ist totalstetig und besitzt eine totalstetige erste Ableitung $y'(x)$[5]*).*

b) $y(x)$ genügt einem der drei Randbedingungssysteme (1), (2) oder (3).

c) Für jedes $y(x) \in \mathfrak{Y}$ ist

$$|y(x)| \leq Y \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b, \tag{5}$$

unter Y eine feste positive Zahl verstanden.

d) Es gibt eine Zahl $h \geq 0$ derart, daß für jedes $y(x) \in \mathfrak{Y}$ fast überall dort, wo $|y'(x)| \geq h$ ist, die Beschränkung

$$y''(x) \cdot \operatorname{sgn} y(x) \geq -\{\psi(y) \cdot \varphi(y') + \chi(x) \cdot \omega(y')\} \tag{6}$$

gilt, in der ψ, φ, χ und ω vorgeschriebene Funktionen mit folgenden Eigenschaften sind:

$\chi(x)$ und $\psi(y)$ sind nichtnegativ und über $\langle a, b\rangle$ bzw. $\langle -Y, Y\rangle$ integrabel;

$\omega(y')$ ist für jedes reelle y' nichtnegativ und stetig;

$\varphi(y')$ ist für jedes reelle y' positiv und stetig und erfüllt außerdem die Bedingungen

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt = +\infty, \qquad \int_0^{-\infty} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt = +\infty; \tag{7}$$

ferner muß entweder

α) eine Konstante $\varkappa > 0$ existieren, so daß für jedes reelle y'

$$\frac{|y'|\,\omega(y')}{\varphi(y')} \leq \varkappa \tag{8}$$

gilt, oder es muß

β) die Funktion $\chi(x)$ mindestens fast überall in $\langle a, b\rangle$ verschwinden.

Dann gilt für alle $y(x) \in \mathfrak{Y}$ die Beschränkung

$$|y'(x)| \leq H, \quad (a \leq x \leq b), \tag{9}$$

in der $H > h$ eine Konstante bedeutet, die allein durch die Zahlen Y und h und die Funktionen ψ, φ, χ und ω bestimmt ist.

---

[5]) Daraus folgt, daß fast überall in $\langle a, b\rangle$ auch eine zweite Ableitung $y''(x)$ vorhanden ist und daß für jedes Teilintervall $\langle x_1, x_2\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ die Beziehung

$$y'(x_2) - y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \dot{y}'(x)\, dx$$

gilt, wenn $\dot{y}'(x)$ eine im Intervall $\langle x_1, x_2\rangle$ definierte Funktion bedeutet, die in einem maßgleichen Kern dieses Intervalls mit $y''(x)$ übereinstimmt und in den übrigen Punkten verschwindet.

Beweis. Es wird eine beliebige Funktion $y(x)$ aus der Menge $\mathfrak{Y}$ herausgegriffen. Dann läßt sich das Intervall $\langle a, b\rangle$ in drei zueinander punktfremde, meßbare Teilmengen $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ zerlegen, so daß

$$y(x)\cdot y'(x)\begin{cases} =0 & \text{für} \quad x\in\mathfrak{E}_0 \\ >0 & \text{für} \quad x\in\mathfrak{E}_1 \\ <0 & \text{für} \quad x\in\mathfrak{E}_2 \end{cases}$$

gilt. Die Menge $\mathfrak{E}_0$ ist abgeschlossen und sicher nicht leer, da sie die Punkte $x=a$ und $x=b$ enthält. Gibt es in $\mathfrak{E}_0$ innere Punkte, so muß in ihnen, wie man leicht einsieht, $y'(x)=0$ sein, die Behauptung (9) trifft dort also zu. Jeder andere Punkt von $\mathfrak{E}_0$ ist Randpunkt von $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$. $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ bestehen je aus höchstens abzählbar unendlich vielen offenen Intervallen. Sei

$\mathfrak{i}_1$: $$\xi_1 < x < \xi_0$$

ein solches Teilintervall, das zu $\mathfrak{E}_1$ gehört. Seine Endpunkte $x=\xi_1$ und $x=\xi_0$ gehören natürlich der Menge $\mathfrak{E}_0$ an. Da $|y(x)|$ in $\mathfrak{i}_1$ mit x monoton wächst, kann ξ_0 keine Nullstelle von $y(x)$ sein, sondern es ist $y'(\xi_0)=0$. Ist nun in $\mathfrak{i}_1$ überall $|y'(x)|\leq h$, so ist (9) dort von selbst erfüllt. Daher wird weiterhin angenommen, es gebe eine Abszisse x mit $\xi_1\leq x<\xi_0$, für die $|y'(x)|>h$ ist. Dann muß es eine weitere Zahl ξ_h mit $x<\xi_h\leq\xi_0$ geben, so daß für $x\leq u<\xi_h$ beständig $|y'(u)|>h$ ist, zugleich aber die Beziehung $y'(\xi_h)=\sigma\cdot h$ besteht, worin

$$\sigma=\operatorname{sgn} y(u)=\operatorname{sgn} y'(u) \qquad (\text{für } u\in\mathfrak{i}_1)$$

gesetzt ist. Nach Voraussetzung d) gilt dann die Beschränkung (6) mit u an Stelle von x fast überall im Intervall $x\leq u<\xi_h$, und durch Multiplikation mit $\frac{|y'(u)|}{\varphi(y'(u))}$ folgt wegen $\operatorname{sgn} y'(u)=\operatorname{sgn} y(u)$ sofort:

$$\frac{y'(u)\cdot y''(u)}{\varphi(y'(u))}\geq -\psi\left(y(u)\right)|y'(u)| - \frac{|y'(u)|\cdot\omega(y'(u))}{\varphi(y'(u))}\chi(u)$$

fast überall im Intervall $\langle x, \xi_h\rangle$. Integriert man diese Beziehung über das genannte Intervall [vgl. Fußnote [5])], so kann man auf der linken Seite und beim ersten Glied der rechten Seite einfache Substitutionen vornehmen und erhält nach Vorzeichenumkehr

$$\int\limits_{\sigma\cdot h}^{y'(x)}\frac{t}{\varphi(t)}\,dt\leq\left|\int\limits_{y(x)}^{y(\xi_h)}\psi(y)\,dy\right|+\int\limits_{x}^{\xi_h}\frac{|y'(u)|\cdot\omega(y'(u))}{\varphi(y'(u))}\chi(u)\,du.$$

Der erste Summand rechts ist $\leq\int\limits_{-Y}^{Y}\psi(y)\,dy$; der zweite hat unter der Voraussetzung d β) den Wert Null und kann unter der Voraussetzung d α) durch $\varkappa\int\limits_{a}^{b}\chi(u)\,du$ nach oben abgeschätzt werden. In beiden Fällen läßt sich also

eine positive Zahl Q angeben, so daß $\int_{\sigma \cdot h}^{y'(x)} \frac{t}{\varphi(t)}\,dt \leq Q$ ist. Nach (7) gibt es andererseits eine Konstante $H > h$, für die mit $\varepsilon > 0$ stets

$$\int_{h}^{H+\varepsilon} \frac{t}{\varphi(t)}\,dt > Q, \qquad \int_{-h}^{-H-\varepsilon} \frac{t}{\varphi(t)}\,dt > Q$$

ist. Daraus folgt unmittelbar die Beschränkung (9) für $\xi_1 \leq x \leq \xi_0$, also für alle inneren Punkte und Randpunkte von $\mathfrak{E}_1$.

Da sich eine entsprechende Betrachtung auch für die Menge $\mathfrak{E}_2$ und ihre Randpunkte anstellen läßt, gilt (9) durchweg für $a < x < b$ und dann aus Stetigkeitsgründen auch für $x = a$ und $x = b$.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich der folgende

Zusatz zum Hilfssatz 1. *Im Hilfssatz 1 ist die Voraussetzung c)* [*mit der Beschränkung* (5)] *entbehrlich, wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy$$

endlich bleibt.

§ 3. Erste Existenzsätze.

Die Grundlage der weiteren Entwicklungen bildet der

Satz 1. *Wenn die Funktion $f(x, y, y')$ für $a \leq x \leq b$ und alle reellen Werte von y und y' der Voraussetzung A aus § 1 unterliegt und wenn*

$$|f(x, y, y')| \leq \mu(x)$$

ist, unter $\mu(x)$ eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion verstanden, dann besitzt jedes der Probleme I, II und III mindestens eine Lösung.

Für Problem I ist dieser Satz wohlbekannt; er findet sich zuerst bei G. Scorza-Dragoni [16]. Die verschiedenen bisher gegebenen Beweise[6]) können mit geringen Änderungen auch auf die Probleme II und III übertragen werden; auf nähere Ausführungen hierüber wird an dieser Stelle verzichtet.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun der folgende Satz bewiesen werden, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von S. Cinquini [3][7]) darstellt:

Satz 2. *Die Funktion $f(x, y, y')$ unterliege in dem Bereich*

$$\mathfrak{E}: \qquad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

[6]) Außer der schon genannten Arbeit vgl. man z. B.: S. Cinquini [3], [4]; G. Zwirner [21]; E. Magenes [8].

[7]) Ein anderer Beweis findet sich bei G. Zwirner [23]. Die hier gegebene Erweiterung besteht erstens in der Einbeziehung der Probleme II und III, zweitens in dem Ersatz einer absoluten Beschränkung der Funktion f durch die einseitige Beschränkung (10) [vgl. Fußnote [4])].

den Voraussetzungen A und B aus § 1, und es sei überall in diesem Bereich die Bedingung

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geq -\{\psi(y) \cdot \varphi(y') + \chi(x) \cdot \omega(y')\} \tag{10}$$

erfüllt, in der $\psi(y)$ für alle reellen y nichtnegativ und über $(-\infty, +\infty)$ integrabel sei und die Funktionen χ, φ und ω den Forderungen der Voraussetzung d) des Hilfssatzes 1 genügen sollen. Dann hat jedes der Probleme I, II und III mindestens eine Lösung.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 samt Zusatz ist den Funktionen ψ, φ, χ und ω (und der Konstanten $h=0$) eine Zahl $H>0$ zugeordnet; mit ihrer Hilfe wird ein beschränkter Teilbereich von $\mathfrak{S}$ konstruiert, nämlich:

$$\mathfrak{Q}: \qquad a \leq x \leq b, \quad |y| \leq H \cdot (b-a), \quad |y'| \leq H.$$

Dann gibt es nach Voraussetzung B eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion $\mu_{\mathfrak{Q}}(x)$, so daß für $(x, y, y') \in \mathfrak{Q}$ stets

$$|f(x, y, y')| \leq \mu_{\mathfrak{Q}}(x)$$

ist. Setzt man nun

$$\tilde{f}(x, y, y') = \begin{cases} f(x, y, y'), & \text{wo} \quad |f(x, y, y')| \leq \mu_{\mathfrak{Q}}(x) \\ \mu_{\mathfrak{Q}}(x), & \text{wo} \quad f(x, y, y') > \mu_{\mathfrak{Q}}(x) \\ -\mu_{\mathfrak{Q}}(x), & \text{wo} \quad f(x, y, y') < -\mu_{\mathfrak{Q}}(x), \end{cases}$$

so genügt auch diese neue Funktion in $\mathfrak{S}$ der Voraussetzung A, und es gilt in diesem ganzen Bereich die Beschränkung $|\tilde{f}(x, y, y')| \leq \mu_{\mathfrak{Q}}(x)$. Nach Satz 1 besitzt dann jedes der Probleme I, II und III mit $\tilde{f}$ an Stelle von f mindestens eine Lösung $y(x)$. Da nun beständig $|\tilde{f}(x, y, y')| \leq |f(x, y, y')|$ ist und $\tilde{f}$ und f nirgends entgegengesetzte Vorzeichen haben, überträgt sich die Beschränkung (10) auf die Funktion $\tilde{f}$. Für $y(x)$ gilt danach fast überall in $\langle a, b\rangle$ die Beziehung (6), so daß aus Hilfssatz 1 die Beschränkung (9) folgt. Diese liefert zusammen mit den Randbedingungen weiter:

$$|y(x)| \leq H \cdot (b-a) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b. \tag{11}$$

(9) und (11) zeigen aber, daß jedes Linienelement $\{x, y(x), y'(x)\}$ der Kurve $y = y(x)$ dem Bereich $\mathfrak{Q}$ angehört, in dem $\tilde{f}$ definitionsgemäß mit f zusammenfällt. Demnach ist $y(x)$ auch eine Lösung des jeweiligen Ausgangsproblems, und Satz 2 ist bewiesen.

§ 4. Der Fall eines zylindrischen Grundbereiches.

Im folgenden braucht die Funktion f nicht in der ganzen Schicht $\mathfrak{S}$ erklärt zu sein, sondern nur in einem Zylinderbereich

$$\mathfrak{Z}: \qquad a \leq x \leq b, \quad \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x), \quad -\infty < y' < +\infty.$$

Für das Problem I ist dieser Fall von G. SCORZA-DRAGONI [12] bis [18], M. NAGUMO [9], S. CINQUINI [2], [3], [5] und G. ZWIRNER [20], [22] behandelt

worden. Eine Erweiterung der von den genannten Autoren gefundenen Ergebnisse[8]) bildet der folgende

Satz 3. *In einem Bereich* $\mathfrak{Z}$ *des eben angegebenen Typs genüge die Funktion* $f(x, y, y')$ *den Voraussetzungen A und B aus* § 1, *und es seien folgende weitere Bedingungen erfüllt*:

a) Die Funktionen $\underline{y}(x)$ *und* $\bar{y}(x)$ *sind für* $a \leq x \leq b$ *samt ihren ersten Ableitungen totalstetig, und es ist* $\underline{y}(x) < 0 < \bar{y}(x)$ *für* $a \leq x \leq b$.

b) Die beiden Differenzen

$$\underline{y}'(x) - \int_a^x f\left(u, \underline{y}(u), \underline{y}'(u)\right) du \quad \text{und} \quad \int_a^x f\left(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\right) du - \bar{y}'(x)$$

sind für $a \leq x \leq b$ *nichtabnehmende Funktionen von* x.

c) Im ganzen Bereich $\mathfrak{Z}$ *ist*

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geq -\{\psi(y) \cdot \varphi(y') + \chi(x) \cdot \omega(y')\}, \tag{12}$$

wobei die Funktionen ψ, φ, χ *und* ω *die in Voraussetzung d) des Hilfssatzes* 1 *geforderten Eigenschaften haben*[9]).

Dann besitzt Problem I mindestens eine Lösung $y(x)$ *mit*

$$\underline{y}(x) \leq y(x) \leq \bar{y}(x) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b. \tag{13}$$

Ist darüber hinaus die Zusatzbedingung

$$\mathrm{d_{II}} \qquad \underline{y}'(b) \leq 0, \quad \bar{y}'(b) \geq 0 \qquad \textit{bzw.}$$

$$\mathrm{d_{III}} \qquad \underline{y}'(a) \geq 0, \quad \bar{y}'(a) \leq 0$$

erfüllt, so hat auch Problem II bzw. III mindestens eine der Eingrenzung (13) *genügende Lösung* $y(x)$.

Beweis. α) Mit den Konstanten

$$\delta_r = \frac{1}{r+2} \operatorname{Min}\left(\bar{y}(x) - \underline{y}(x)\right), \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

werden die beiden Funktionenfolgen

$$\underline{y}_r(x) = \underline{y}(x) + \delta_r, \quad \bar{y}_r(x) = \bar{y}(x) - \delta_r, \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

erklärt, die eine Folge von Teilbereichen

$$\mathfrak{Z}_{(r)}: \quad a \leq x \leq b, \quad \underline{y}_r(x) \leq y \leq \bar{y}_r(x), \quad -\infty < y' < +\infty, \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

des Grundbereiches $\mathfrak{Z}$ festlegen. Dann wird in der nachstehenden Weise eine Funktionenfolge $f_r(x, y, y')$, $(r = 1, 2, \ldots)$ definiert:

1. Im Teilbereich $\mathfrak{Z}_{(r)}$ sei $f_r = f$.

---

[8]) Neu ist auch bei diesem Satz in der Hauptsache die einseitige Beschränkung (12), die an die Stelle einer absoluten Beschränkung tritt [vgl. Fußnote [7])].

[9]) Die positive Konstante Y ist dabei so zu wählen, daß im Intervall $a \leq x \leq b$ beständig $\underline{y}(x) \geq -Y$ und $\bar{y}(x) \leq Y$ gilt.

2. Für jedes Wertepaar (x, y) mit $a \leq x \leq b$, $\underline{y}(x) \leq y < \underline{y}_r(x)$ sei

$$f_r(x, y, y') = f(x, y, y'),$$

wenn entweder

$$y' = \underline{y}'(x) \quad \text{oder} \quad |y' - \underline{y}'(x)| \geq \underline{y}_r(x) - y \quad \text{ist;}$$

in den beiden Intervallen

$$\underline{y}'(x) - (\underline{y}_r(x) - y) \leq y' \leq \underline{y}'(x)$$

und

$$\underline{y}'(x) \leq y' \leq \underline{y}'(x) + (\underline{y}_r(x) - y)$$

sei f_r eine lineare Funktion von y'.

3. Für jedes Wertepaar (x, y) mit $a \leq x \leq b$, $\bar{y}_r(x) < y \leq \bar{y}(x)$ sei

$$f_r(x, y, y') = f(x, y, y'),$$

wenn entweder

$$y' = \bar{y}'(x) \quad \text{oder} \quad |y' - \bar{y}'(x)| \geq y - \bar{y}_r(x)$$

ist; in den beiden Intervallen

$$\bar{y}'(x) - (y - \bar{y}_r(x)) \leq y' \leq \bar{y}'(x)$$

und

$$\bar{y}'(x) \leq y' \leq \bar{y}'(x) + (y - \bar{y}_r(x))$$

sei f_r eine lineare Funktion von y'.

Jede der so erklärten Funktionen $f_r(x, y, y')$ $(r = 1, 2, \ldots)$, genügt in $\mathfrak{Z}$ den Voraussetzungen A und B. Bezeichnet man mit h die größere der beiden Zahlen $\operatorname{Max}|\underline{y}'(x)| + \delta_1$, $\operatorname{Max}|\bar{y}'(x)| + \delta_1$, so folgt aus der Definition der f_r ferner:

(14) $f_r(x, y, y') = f(x, y, y')$, $(r = 1, 2, \ldots)$, für $(x, y, y') \in \mathfrak{Z}$, $|y'| \geq h$.

Für jedes x aus $\langle a, b\rangle$ und jeden beliebigen Index r soll jetzt unter $\lambda_r(x)$ die größte der folgenden fünf Zahlen verstanden werden:

$$\begin{cases} 1; \quad |f(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x) \pm \delta_r) - f(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x))| \cdot \frac{1}{\delta_r}; \\ \qquad |f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x) \pm \delta_r) - f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))| \cdot \frac{1}{\delta_r}. \end{cases}$$

Die so erklärten Funktionen $\lambda_r(x)$ sind nach den Voraussetzungen A und B meßbar und über $\langle a, b\rangle$ integrabel. Aus ihrer Definition folgen ferner die für später wichtigen Abschätzungen:

$$(15) \quad \begin{cases} |f_r(x, \underline{y}(x), y') - f_r(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x))| \leq \lambda_r(x) \cdot |y' - \underline{y}'(x)| \\ \qquad\qquad \text{für} \quad |y' - \underline{y}'(x)| \leq \delta_r \\ |f_r(x, \bar{y}(x), y') - f_r(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))| \leq \lambda_r(x) \cdot |y' - \bar{y}'(x)| \\ \qquad\qquad \text{für} \quad |y' - \bar{y}'(x)| \leq \delta_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Nun sei $H > h$ diejenige Konstante, die nach Hilfssatz 1 den Zahlen Y [Fußnote 9)] und h und den in (12) auftretenden Funktionen ψ, φ, χ und ω zugeordnet ist. Zu dem beschränkten Teilbereich

$$\mathfrak{Z}_H: \qquad a \leq x \leq b, \quad \underline{y}(x) \leq y \leq \bar{y}(x), \quad -H \leq y' \leq H$$

des Zylinders $\mathfrak{Z}$ gehört dann nach Voraussetzung B eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion $\mu_H(x)$, so daß in $\mathfrak{Z}_H$

$$|f(x, y, y')| \leq \mu_H(x)$$

gilt. Dann bestehen auch die Beschränkungen

$$|f_\nu(x, y, y')| \leq \mu_H(x), \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \qquad \text{für} \quad (x, y, y') \in \mathfrak{Z}_H. \tag{16}$$

Hiernach wird nun in $\mathfrak{Z}$ eine neue Funktionenfolge $\{\tilde{f}_\nu(x, y, y')\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ wie folgt erklärt:

$$\tilde{f}_\nu(x, y, y') = \begin{cases} f_\nu(x, y, y'), & \text{wo} \quad |f_\nu(x, y, y')| \leq \mu_H(x) \\ \mu_H(x), & \text{wo} \quad f_\nu(x, y, y') > \mu_H(x) \\ -\mu_H(x), & \text{wo} \quad f_\nu(x, y, y') < -\mu_H(x). \end{cases}$$

Außer den damit unmittelbar gegebenen Beschränkungen

$$|\tilde{f}_\nu(x, y, y')| \leq \mu_H(x), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \qquad \text{in } \mathfrak{Z}$$

folgen aus diesen Definitionen in Verbindung mit (14) und (12) die Beziehungen

$$\begin{cases} \tilde{f}_\nu(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geq -\{\psi(y)\varphi(y') + \chi(x)\omega(y')\} \\ \text{für} \quad (x, y, y') \in \mathfrak{Z}, \quad |y'| \geq h, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{17}$$

Weiter werden die Funktionen $\tilde{f}_\nu$ durch die folgenden Vorschriften[10]) in die ganze Schicht $\mathfrak{S}$ fortgesetzt:

$$\begin{cases} \tilde{f}_\nu(x, y, y') = \tilde{f}_\nu(x, \underline{y}(x), y') + \lambda_\nu(x) \operatorname{tgh}(y - \underline{y}(x)) & \text{für} \quad y < \underline{y}(x) \\ \tilde{f}_\nu(x, y, y') = \tilde{f}_\nu(x, \bar{y}(x), y') + \lambda_\nu(x) \operatorname{tgh}(y - \bar{y}(x)) & \text{für} \quad y > \bar{y}(x), \\ & (\nu = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{18}$$

so daß in $\mathfrak{S}$ die Beschränkungen

$$|\tilde{f}_\nu(x, y, y')| \leq \mu_H(x) + \lambda_\nu(x), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

gelten.

Dann gibt es nach Satz 1 für jedes der Probleme I, II und III mit $\tilde{f}_\nu$ an Stelle von f mindestens eine Lösungsfunktion $y_\nu(x)$, die den jeweiligen Randbedingungen genügt, eine in $\langle a, b\rangle$ totalstetige erste Ableitung besitzt und die Gleichung

$$y_\nu'(x) - y_\nu'(a) = \int_a^x \tilde{f}_\nu(u, y_\nu(u), y_\nu'(u))\, du, \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b \tag{19}$$

erfüllt.

[10]) Die angegebene Fortsetzung ist durchaus nicht die einzig brauchbare; es kommt nur darauf an, daß $\tilde{f}_\nu$ außerhalb des Bereiches $\mathfrak{Z}$ bei festen Werten von x und y' mit y monoton wächst, aber für $y \to \pm\infty$ beschränkt bleibt.

β) Das Kernstück des Beweises bildet nun der Nachweis, daß jede der Funktionen $y_r(x)$ der Eingrenzung

$$\underline{y}(x) \leq y_r(x) \leq \bar{y}(x), \qquad (a \leq x \leq b, \quad r = 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

genügt.

Um diesen Nachweis indirekt zu führen, wird angenommen, für irgendein (im folgenden festes) r gäbe es im Inneren von $\langle a, b\rangle$ eine Abszisse x^*, bei der entgegen der Behauptung $y_r(x^*) - \bar{y}(x^*) > 0$ wäre. Dann müßte die Ungleichung

$$y_r(x) - \bar{y}(x) > 0 \tag{21}$$

auch in einer Umgebung des Wertes x^* gelten, und es sei (a', b') das größte x^* enthaltende offene Teilintervall von $\langle a, b\rangle$, in dem das überall zutrifft. In den Fällen der Probleme I und II folgt aus dieser Definition in Verbindung mit den Randbedingungen und der Voraussetzung a) sofort:

$$a' > a, \quad y_r(a') - \bar{y}(a') = 0, \tag{21a}$$

und entsprechend ergibt sich für die Fälle der Probleme I und III:

$$b' < b, \quad y_r(b') - \bar{y}(b') = 0. \tag{21b}$$

Ferner gelten stets die Beziehungen

$$y_r'(a') - \bar{y}'(a') \geq 0, \tag{21c}$$

$$y_r'(b') - \bar{y}'(b') \leq 0; \tag{21d}$$

sie folgen entweder aus (21), (21a) und (21b) oder, falls $a' = a$ bzw. $b' = b$ sein sollte, aus den Zusatzvoraussetzungen d_{III}) bzw. d_{II}) in Verbindung mit den Randbedingungen (3) bzw. (2).

Das Intervall (a', b') wird nun in drei zueinander fremde Teilmengen $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ zerlegt, so daß

$$y_r'(x) - \bar{y}'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{R}_1 \\ = 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{R}_0 \\ < 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{R}_2 \end{cases} \tag{22}$$

ist. In den Fällen der Probleme I und II ist $\mathfrak{R}_1$ nicht leer, und es besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen zueinander punktfremden, offenen Intervallen

$\mathfrak{k}_1$: $$\alpha < x < \gamma,$$

wobei stets

$$y_r'(\gamma) - \bar{y}'(\gamma) = 0 \tag{22a}$$

gilt. Ist nämlich $\gamma < b'$, so folgt das unmittelbar aus der Erklärung der Intervalle $\mathfrak{k}_1$; ist aber $\gamma = b'$, so ist (22a) eine Folge von (21d). — Entsprechend ist

in den Fällen der Probleme I und III die Menge $\mathfrak{N}_2$ nicht leer, und sie besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen offenen Intervallen

$\mathfrak{k}_2$: $$\delta < x < \beta,$$

wobei stets

(22b) $$y_r'(\delta) - \bar{y}'(\delta) = 0$$

ist.

Nun wird eines der Intervalle $\mathfrak{k}_1$ betrachtet und für irgendein x aus ihm folgendes berechnet:

$$\begin{aligned} y_r'(x) - \bar{y}'(x) &= y_r'(\gamma) + \int_\gamma^x \tilde{f}_r\big(u, y_r(u), y_r'(u)\big)\,du - \bar{y}'(x) \\ &= \bar{y}'(\gamma) + \int_\gamma^x \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\,du + \\ &\quad + \int_\gamma^x \{\tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), y_r'(u)\big) - \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\}\,du + \\ &\quad + \int_\gamma^x \{\tilde{f}_r\big(u, y_r(u), y_r'(u)\big) - \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), y_r'(u)\big)\}\,du - \bar{y}'(x). \end{aligned}$$

Beachtet man, daß auf Grund der gegebenen Definitionen

$$\tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big) = f_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big) = f\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)$$

ist, und berücksichtigt man (18), so entsteht:

$$\begin{aligned} y_r'(x) - \bar{y}'(x) = \underbrace{\int_a^x f\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\,du - \bar{y}'(x) - \Big\{\int_a^\gamma f\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\,du - \bar{y}'(\gamma)\Big\}}_{\sigma_1} + \\ + \underbrace{\int_\gamma^x \{\tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), y_r'(u)\big) - \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\}\,du}_{\sigma_2} + \\ + \underbrace{\int_\gamma^x \lambda_r(u)\,\mathrm{tgh}\,\big(y_r(u) - \bar{y}(u)\big)\,du}_{\sigma_3}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung b) ist wegen $x < \gamma$ sicher

$$\sigma_1 \leqq 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitungen kann man auf Grund von (22a) x so nahe an γ heranrücken lassen, daß für $x \leqq u \leqq \gamma$ beständig

$$|y_r'(u) - \bar{y}'(u)| \leqq \delta_r$$

ausfällt. Dann ist zunächst sicher $|y_r'(u)| \leqq h < H$, und in dem Ausdruck für σ_2 kann daher die Funktion $\tilde{f}_r$ auf Grund ihrer Definition durch f_r ersetzt werden.

Dann ergibt sich mit Hilfe der Abschätzung (15):

$$|\sigma_2| \leq -\int_{\gamma}^{x} \lambda_r(u) \cdot |y_r'(u) - \bar{y}'(u)|\, du.$$

Dann folgt

$$\sigma_2 + \sigma_3 \leq \int_{\gamma}^{x} \lambda_r(u) \cdot \{\operatorname{tgh}(y_r(u) - \bar{y}(u)) - |y_r'(u) - \bar{y}'(u)|\}\, du.$$

Nun werde

$$\operatorname{tgh}(y_r(\gamma) - \bar{y}(\gamma)) = \tau > 0$$

gesetzt und x dem Werte γ so weit genähert, daß für $x \leq u \leq \gamma$ die Ungleichungen

$$\operatorname{tgh}(y_r(u) - \bar{y}(u)) > \frac{\tau}{2}$$

$$|y_r'(u) - \bar{y}'(u)| < \frac{\tau}{2}$$

zugleich erfüllt sind. Wegen $x < \gamma$ und $\lambda_r(u) \geq 1$ wird danach $\sigma_2 + \sigma_3 < 0$, und es ergibt sich:

$$y_r'(x) - \bar{y}'(x) < 0.$$

Dieses Ergebnis steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß x der Menge $\mathfrak{R}_1$ angehört.

Ein ebensolcher Widerspruch läßt sich auch für gewisse $x \in \mathfrak{R}_2$ konstruieren. Die Annahme, es gäbe in $\langle a, b\rangle$ eine Abszisse x^*, für die $y_r(x^*) - \bar{y}(x^*) > 0$ ausfällt, ist also falsch, es gilt für $a \leq x \leq b$ beständig:

$$y_r(x) \leq \bar{y}(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

In völlig entsprechender Weise kann man auch zeigen, daß für $a \leq x \leq b$ beständig

$$y_r(x) \geq \underline{y}(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

sein muß, und man hat dann die Behauptung (20) für alle drei untersuchten Probleme bewiesen.

γ) Jedes Linienelement $\{x, y_r(x), y_r'(x)\}$, das einer der Lösungskurven $y = y_r(x)$ angehört, liegt hiernach im Bereich $\mathfrak{Z}$. Aus (19) und (17) wird ersichtlich, daß die $y_r(x)$ der Funktionenmenge $\mathfrak{Y}$ angehören, auf die sich der Hilfssatz 1 bezieht. Aus ihm folgt dann:

$$|y_r'(x)| \leq H, \qquad (a \leq x \leq b, \quad r = 1, 2, \ldots); \tag{23}$$

die Linienelemente liegen also sogar in dem beschränkten Teilbereich $\mathfrak{Z}_H$, in dem nach Definition $\tilde{f}_r = f_r$ ist. Demnach genügen die $y_r(x)$ den [dann mit (19) gleichbedeutenden] Beziehungen

$$y_r'(x) - y_r'(a) = \int_{a}^{x} f_r(u, y_r(u), y_r'(u))\, du, \qquad (a \leq x \leq b, \quad r = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Die Ableitungen $y_r'(x)$ sind nach (23) gleichmäßig beschränkt. Aus (24) folgt auf Grund von (20) und (23) wegen (16):

$$|y_r'(x_2) - y_r'(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \mu_H(u)\, du, \quad . \quad (a \leq x_1 < x_2 \leq b, \quad r = 1, 2, \ldots),$$

eine Beziehung, die die gleichgradige Stetigkeit der $y_r'(x)$ zum Ausdruck bringt. Die gleichmäßige Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit der $y_r(x)$ sind aus (20) und (23) unmittelbar ersichtlich. Aus der Folge der $y_r(x)$ läßt sich demnach eine Teilfolge $y_{r_1}(x), y_{r_2}(x), \ldots$ aussondern, die samt ihrer Ableitungsfolge für jedes x aus $\langle a, b\rangle$ konvergent ist und eine stetige Grenzfunktion $y(x)$ mit stetiger Ableitung $y'(x)$ definiert. Für sie gilt wegen (20) sicher die Eingrenzung (13).

Nun wird die Gültigkeit der folgenden Gleichung nachgewiesen:

$$\lim_{\nu \to \infty} f_{r_\nu}(x, y_{r_\nu}(x), y_{r_\nu}'(x)) = f(x, y(x), y'(x)). \tag{25}$$

Um das einzusehen, erteile man x einen festen Wert $\tilde{x}$ und schließe zunächst die Sonderfälle $y(\tilde{x}) = \underline{y}(\tilde{x})$ und $y(\tilde{x}) = \bar{y}(\tilde{x})$ aus. Dann läßt sich eine natürliche Zahl ν^* so angeben, daß das Linienelement $\{\tilde{x}, y(\tilde{x}), y'(\tilde{x})\}$ samt einer gewissen Umgebung in den Teilbereich $\mathfrak{B}_{(r_{\nu^*})}$ [vgl. α)] und damit auch in alle Teilbereiche $\mathfrak{B}_{(r_\nu)}$ mit $\nu \geq \nu^*$ fällt. Da die Folge der Zahlenpaare $\{y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\}$ gegen das Zahlenpaar $\{y(\tilde{x}), y'(\tilde{x})\}$ konvergiert, gibt es eine weitere natürliche Zahl $\nu^{**} \geq \nu^*$, so daß für $\nu \geq \nu^{**}$ stets

$$\{\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\} \in \mathfrak{B}_{(r_\nu)}$$

ist. Nach der in α) gegebenen Erklärung der f_{r_ν} ist dann weiter

$$f_{r_\nu}(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})) = f(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})) \quad \text{für} \quad \nu \geq \nu^{**}$$

Hiernach ist dann (25) eine Folge der Voraussetzung A.

Es bleiben noch die erwähnten Ausnahmefälle zu behandeln. Für den betrachteten Abszissenwert $\tilde{x}$ sei etwa $y(\tilde{x}) = \bar{y}(\tilde{x})$; dann muß auch $y'(\tilde{x}) = \bar{y}'(\tilde{x})$ sein, da sonst ein Widerspruch zu (13) unvermeidlich wäre. In diesem Falle kann es auch für beliebig große ν noch Zahlenpaare $\{y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\}$ geben, für die $f_{r_\nu} \neq f$ ist. Auf Grund der in α) gegebenen Erklärungen liegt dann aber $f_{r_\nu}(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x}))$ zwischen der größten und der kleinsten der drei Zahlen

$$f(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), \bar{y}'(\tilde{x})), \quad f[\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), \bar{y}'(\tilde{x}) \pm (y_{r_\nu}(\tilde{x}) + \delta_{r_\nu} - \bar{y}(\tilde{x}))].$$

Da jede dieser drei Zahlen mit $\nu \to \infty$ gegen $f(\tilde{x}, \bar{y}(\tilde{x}), \bar{y}'(\tilde{x}))$ konvergiert, gilt (25) auch im vorliegenden Falle. Da sich der Fall $y(\tilde{x}) = \underline{y}(\tilde{x})$ in entsprechender Weise erledigt, ist (25) hiermit allgemein bewiesen.

Läßt man nun in (24) den Index r die Folge $r_1, r_2, \ldots$ durchlaufen, so folgt aus (25) nach einem bekannten Satz über Lebesguesche Integrale, daß die Grenzfunktion $y(x)$ der Gl. (4) genügt. Sie ist dann samt ihrer ersten Ableitung totalstetig, weil die rechte Seite von (4) eine totalstetige Funktion

von x ist, und sie genügt schließlich den Randbedingungen (1), (2) oder (3), weil die Funktionen $y_r(x)$ bereits diesen Bedingungen genügten. Die Funktion $y(x)$ ist somit eine Lösung der jeweils vorliegenden Randwertaufgabe, und der Satz 3 ist vollständig bewiesen.

§ 5. Weitere Existenzsätze.

Der nunmehr bewiesene Satz 3 dient im folgenden als Grundlage zur Gewinnung weiterer Sätze, die als die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zu betrachten sind. Dabei werden gewisse lineare Differentialgleichungen zum Vergleich herangezogen.

Unter $p(x), q(x), r(x)$ werden nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktionen verstanden. Ist c eine beliebige Zahl aus dem Intervall $\langle a, b\rangle$, so soll mit $w_1(x; c)$ die Lösung[11]) der durch die homogene lineare Differentialgleichung

$$w_1'' + p(x)\, w_1' + q(x)\, w_1 = 0 \tag{26a}$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_1(c) = 1, \quad w_1'(c) = 0 \tag{27a}$$

gekennzeichneten Anfangswertaufgabe bezeichnet werden. Entsprechend werde $w_2(x; c)$ durch die Differentialgleichung

$$w_2'' - p(x)\, w_2' + q(x)\, w_2 = 0 \tag{26b}$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_2(c) = 1, \quad w_2'(c) = 0 \tag{27b}$$

bestimmt. — Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz 4. *$f(x, y, y')$ genüge in der Schicht*

$$\mathfrak{S}: \qquad a \leqq x \leqq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

den Voraussetzungen A und B aus § 1 und der Beschränkung

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{p(x)\,|y'| + q(x)\,|y| + r(x)\}, \tag{28}$$

in der unter $p(x), q(x)$ und $r(x)$ nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktionen zu verstehen sind.

α) Sind $p(x)$ und $q(x)$ so beschaffen, daß die [durch (26a) *und* (27a) *mit $c = b$ definierte] Funktion $w_1(x; b)$ überall in $\langle a, b\rangle$ positive Werte annimmt, so besitzen die Probleme I und II je mindestens eine Lösung.*

β) Ebenso sind die Probleme I und III stets lösbar, wenn die [durch (26b) *und* (27b) *mit $c = a$ definierte] Funktion $w_2(x; a)$ überall in $\langle a, b\rangle$ positiv ausfällt.*

---

[11]) Die hier genannten (linearen) Anfangswertaufgaben besitzen unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig bestimmte Lösungen, die im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ existieren. Bei diesen „Lösungen" handelt es sich wieder um Funktionen, die samt ihren ersten Ableitungen totalstetig sind und die der jeweiligen Differentialgleichung in einem maßgleichen Kern des genannten Intervalls genügen.

γ) Schließlich ist Problem I auch dann noch stets lösbar, wenn sich die Zahl c im Inneren von $\langle a, b\rangle$ so angeben läßt, daß

$$w_1(x;c) > 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq c, \tag{29a}$$

$$w_2(x;c) > 0 \quad \text{für} \quad c \leq x \leq b \tag{29b}$$

gilt.

Zum Beweise dieses Satzes sind einige Tatsachen über die Lösungen gewisser inhomogener linearer Differentialgleichungen heranzuziehen, die mit den in (26a) und (26b) auftretenden Differentialausdrücken gebildet sind. Diese Tatsachen werden zunächst in dem folgenden Hilfssatz zusammengestellt, dessen elementare Herleitung übergangen werden kann.

Hilfssatz 2. *Die Funktionen $\overline{W}_1(x;c)$, $\overline{W}_2(x;c)$, $\underline{W}_1(x;c)$, $\underline{W}_2(x;c)$ seien durch die folgenden Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen festgelegt*[12]:

$$\begin{cases} \overline{W}_i'' - (-1)^i p(x)\,\overline{W}_i' + q(x)\,\overline{W}_i = -r(x) \\ \underline{W}_i'' - (-1)^i p(x)\,\underline{W}_i' + q(x)\,\underline{W}_i = r(x) \\ \overline{W}_i(c;c) = \overline{C} > 0, \quad \overline{W}_i'(c;c) = 0 \\ \underline{W}_i(c;c) = \underline{C} < 0, \quad \underline{W}_i'(c;c) = 0, \quad (i = 1, 2). \end{cases} \tag{30}$$

Dann folgt aus (29a) *bei hinreichend großem $\overline{C}$ auch*

$$\overline{W}_1(x;c) > 0, \quad \overline{W}_1'(x;c) \geq 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq c \tag{31a}$$

und bei hinreichend großem $|\underline{C}|$ entsprechend

$$\underline{W}_1(x;c) < 0, \quad \underline{W}_1'(x;c) \leq 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq c; \tag{32a}$$

ebenso folgt aus (29b) *bei hinreichend großem $\overline{C}$*

$$\overline{W}_2(x;c) > 0, \quad \overline{W}_2'(x;c) \leq 0 \quad \text{für} \quad c \leq x \leq b \tag{31b}$$

und bei hinreichend großem $|\underline{C}|$

$$\underline{W}_2(x;c) < 0, \quad \underline{W}_2'(x;c) \geq 0 \quad \text{für} \quad c \leq x \leq b. \tag{32b}$$

Nun wird Satz 4 durch Zurückführung auf Satz 3 bewiesen. Nach Voraussetzung gibt es immer ein c, für das die Bedingungen (29a) und (29b) erfüllt sind; denn die unter β) und α) genannten Fälle ordnen sich dieser allgemeinen Aussage als Sonderfälle für $c = a$ und $c = b$ unter. Man wählt nun $\overline{C}$ so groß, daß (31a) und (31b) erfüllt sind, und setzt:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \overline{W}_1(x;c) & \text{für} \quad a \leq x \leq c \\ \overline{W}_2(x;c) & \text{für} \quad c \leq x \leq b. \end{cases} \tag{33}$$

Weiter nimmt man $|\underline{C}|$ so groß an, daß (32a) und (32b) erfüllt sind, und setzt:

$$\underline{y}(x) = \begin{cases} \underline{W}_1(x;c) & \text{für} \quad a \leq x \leq c \\ \underline{W}_2(x;c) & \text{für} \quad c \leq x \leq b. \end{cases} \tag{34}$$

[12]) Auch hier gilt die Bemerkung der Fußnote [11]).

Mit diesen beiden Funktionen wird darauf der Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$ des Satzes 3 konstruiert. In ihm sind, da er ein Teilbereich von $\mathfrak{S}$ ist, für die Funktion f die Voraussetzungen A und B erfüllt. Das Zutreffen der Voraussetzung a) des Satzes 3 ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion.

Aus (33) und (34) folgt nun nach (30), (31a, b) und (32a, b) in Verbindung mit (28):

$$\bar{y}''(x) = -\{p(x)\cdot|\bar{y}'(x)| + q(x)\,|\bar{y}(x)| + r(x)\} \leq f\big(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\big)$$

$$\underline{y}''(x) = p(x)\cdot|\underline{y}'(x)| + q(x)\cdot|\underline{y}(x)| + r(x) \geq f\big(x,\underline{y}(x),\underline{y}'(x)\big)$$

(beides gültig fast überall in $\langle a, b\rangle$), und hieraus folgt durch Integration, daß die Funktionen $\underline{y}(x)$ und $\bar{y}(x)$ auch die in Voraussetzung b) des Satzes 3 geforderten Eigenschaften haben.

Ist nun $Y \geq 1$ eine Konstante, die für $a \leq x \leq b$ weder von $\bar{y}(x)$ noch von $|\underline{y}(x)|$ übertroffen wird, so folgt aus (28) sofort:

$$f(x, y, y')\cdot \operatorname{sgn} y \geq -\{p(x)\cdot|y'| + q(x)\,Y + r(x)\}$$

für $(x, y, y') \in \mathfrak{Z}$, und diese Abschätzung läßt sich weiter vergröbern zu

$$f(x, y, y')\cdot \operatorname{sgn} y \geq -\{p(x) + q(x) + r(x)\}\,(|y'| + Y).$$

Man erkennt, daß dies ein Spezialfall von (12) ist, wenn man beispielsweise setzt:

$$\psi(y) \equiv 0, \quad \varphi(y') = 1 + y'^2,$$

$$\chi(x) = p(x) + q(x) + r(x), \quad \omega(y') = |y'| + Y.$$

Es bleibt dann noch zu zeigen, daß diese Funktionen die in Voraussetzung d) des Hilfssatzes 1 (§ 2) genannten Eigenschaften haben. Für $\psi(y)$ und $\chi(x)$ ist das unmittelbar klar. $\varphi(y')$ ist positiv und stetig und genügt den Forderungen (7); $\omega(y')$ ist ebenfalls positiv und stetig, und φ und ω zusammen erfüllen die Bedingung (8) mit

$$\varkappa = \frac{1 + \sqrt{1 + Y^2}}{2}.$$

Somit ist auch die Voraussetzung c) des Satzes 3 erfüllt.

Schließlich folgt für die Fälle $c = b$ bzw. $c = a$ aus (30), (33) und (34) sofort, daß die Zusatzvoraussetzung d_{II}) bzw. d_{III}) zutrifft.

Damit ist Satz 4 durch Zurückführung auf Satz 3 vollständig bewiesen.

Ist die in (28) auftretende Funktion $q(x) \equiv 0$ für $a \leq x \leq b$, so sind die unter α), β) und γ) genannten Bedingungen von selbst erfüllt. In diesem Falle liefert aber Satz 4 auch kein neues Existenzkriterium, sondern seine Aussagen sind in Satz 2 enthalten.

Die unter α), β) und γ) genannten Bedingungen schränken bei vorgegebenem Intervall $\langle a, b\rangle$ die Funktionenpaare $\{p(x), q(x)\}$ ein, die in (28) auftreten

dürfen. Der Sachverhalt läßt sich aber auch wie folgt deuten: Erfüllt $f(x, y, y')$ für $a' < x < b'$ und beliebige y und y' die Voraussetzungen A und B sowie die Bedingung (28) mit bestimmten nichtnegativen und integrablen Funktionen $p(x)$ und $q(x) \not\equiv 0$, so werden durch $\alpha)$, $\beta)$ und $\gamma)$ solche abgeschlossenen Teilintervalle $\langle a, b\rangle \subset (a', b')$ festgelegt, für die die vorliegenden Probleme lösbar sind. Die genannten Bedingungen erscheinen dann als Beschränkungen für das zugrunde zu legende Intervall.

Wenn an die Stelle der Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ zwei Konstanten $P \geqq 0$ und $Q > 0$ treten, lassen sich die in $\alpha)$, $\beta)$ und $\gamma)$ ausgesprochenen Bedingungen in die Gestalt von Ungleichungen bringen, durch die die Intervallänge $b - a$ mit den Werten P und Q verknüpft wird.

Für die Herleitung dieser Beziehungen werde mit $w(x)$ diejenige Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$w'' - P w' + Q w = 0$$

bezeichnet, die den Anfangsbedingungen

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 0$$

genügt. Dann hat man zu setzen:

$$w_1(x; c) = w(c - x), \quad w_2(x; c) = w(x - c).$$

Die Bedingungen in $\alpha)$ und $\beta)$ besagen dann, daß $w(x) > 0$ sein muß für $0 \leqq x \leqq b - a$, und die Bedingung von $\gamma)$ nimmt mit $c = \frac{a+b}{2}$ die Form $w(x) > 0$ für $0 \leqq x \leqq \frac{b-a}{2}$ an. Von entscheidender Bedeutung ist danach die erste positive Nullstelle von $w(x)$. Sie werde mit $D(P, Q)$ bezeichnet und läßt sich wie folgt explizit angeben:

$$D(P, Q) = \frac{2}{\sqrt{Q}} \cdot \Phi\left(\frac{P}{2\sqrt{Q}}\right), \tag{35}$$

mit

$$\begin{cases} \Phi(0) = \dfrac{\pi}{2} \\ \Phi(\lambda) = \dfrac{\arccos \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad \text{für} \quad 0 < \lambda < 1 \\ \Phi(1) = 1 \\ \Phi(\lambda) = \dfrac{\operatorname{arch} \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad \text{für} \quad \lambda > 1. \end{cases} \tag{36}$$

Damit ist folgendes gezeigt:

Satz 5. *$f(x, y, y')$ genüge für $a \leqq x \leqq b$ und beliebige (reelle) y und y' den Voraussetzungen A und B aus § 1 und der Beschränkung*

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{P|y'| + Q|y| + r(x)\}, \tag{37}$$

in der $P \geqq 0$ und $Q > 0$ Konstanten sind und $r(x)$ eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion bedeutet. Gilt darüber hinaus die Ungleichung

$$b - a < 2D(P, Q), \tag{38}$$

unter $D(P, Q)$ die durch (35) und (36) definierte Größe verstanden, so besitzt Problem I mindestens eine Lösung. Die Probleme II und III sind stets lösbar, wenn

$$b - a < D(P, Q) \tag{39}$$

ist.

Die Sätze 4 und 5 sind mit denjenigen bekannten Existenzsätzen vergleichbar, deren Hauptbedingung eine Beschränkung der allgemeinen Gestalt

$$|f(x, y, y')| \leq p(x)\,|y'| + q(x)\,|y| + r(x)$$

oder

$$|f(x, y, y')| \leq P|y'| + Q|y| + r(x)$$

ist, die durch zusätzliche Vorschriften über die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ oder die Konstanten P und Q ergänzt wird[13]). Die Sätze 4 und 5 sind allgemeiner als alle bisherigen Ergebnisse dieser Art; denn erstens tritt hier an die Stelle der genannten absoluten Beschränkung die einseitige Beschränkung (28) bzw. (37), und zweitens gilt die folgende

Bemerkung. Die Aussagen der Sätze 4 und 5 lassen sich nicht mehr dadurch verallgemeinern, daß man die unter α), β), γ) genannten Bedingungen des Satzes 4 oder die Bedingungen (38) und (39) des Satzes 5 durch schwächere Forderungen ersetzt.

Das liegt an der Tatsache, daß die zum Vergleich herangezogenen linearen Differentialgleichungen selbst unter die Beschränkung (28) bzw. (37) fallen. Es genügt, dies für Satz 4 und Problem I näher auszuführen, also zu zeigen:

Haben die nichtnegativen, über $\langle a, b\rangle$ integrablen Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ die Eigenschaft, daß Problem I für jedes $f(x, y, y')$ lösbar ist, das in $\mathfrak{S}$ die Voraussetzungen A und B erfüllt und der Beschränkung (28) mit irgendeinem nichtnegativen, über $\langle a, b\rangle$ integrablen $r(x)$ genügt, so erfüllen diese beiden Funktionen auf jeden Fall die in Satz 4 unter γ) genannte Bedingung.

Beweis. Nach Voraussetzung muß eine Funktion $\eta(x)$ existieren, die fast überall in $\langle a, b\rangle$ die Differentialgleichung

$$\eta'' = -\{p(x) \cdot |\eta'| + q(x) \cdot (|\eta| + 1)\}$$

erfüllt und den Randbedingungen $\eta(a) = \eta(b) = 0$ genügt. Die erste Ableitung $\eta'(x)$ dieser Funktion ist sicher eine im ganzen Intervall nichtzunehmende Funktion von x, und es gibt (mindestens) eine Abszisse c im Inneren von

---

[13]) Beispielsweise A. HAMMERSTEIN [6], S. CINQUINI [2], [4]. In diesem Zusammenhang sind auch die Sätze von E. PICARD [10] und F. LETTENMEYER [7] zu erwähnen, soweit sie die Existenz der Lösungen betreffen.

(a, b), für die $\eta'(c) = 0$ wird. Dann ist:

$$\eta'(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq c,$$

$$\eta'(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad c \leq x \leq b$$

und

$$\eta(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b.$$

Die obige Differentialgleichung kann danach auch durch die folgende ersetzt werden:

$$\eta'' = -\{p(x) \cdot |\eta'| + q(x)(\eta + 1)\},$$

die für $a \leq x \leq c$ bzw. $c \leq x \leq b$ in die für die Funktion $\eta(x) + 1$ hingeschriebene Differentialgleichung (26a) bzw. (26b) übergeht. Daher wird:

$$\frac{\eta(x) + 1}{\eta(c) + 1} = \begin{cases} w_1(x; c) & \text{für} \quad a \leq x \leq c \\ w_2(x; c) & \text{für} \quad c \leq x \leq b, \end{cases}$$

und man sieht, daß (29a) und (29b) erfüllt sind. Die aufgestellte Behauptung ist damit bewiesen.

Es läßt sich entsprechend auch für alle übrigen Fälle beweisen, daß die obige Bemerkung richtig ist.

Abschließend sei schon hier bemerkt, daß die eingeführten Hilfsfunktionen $w_1(x; c)$ und $w_2(x; c)$ in den Kriterien der Eindeutigkeit eine ähnliche Rolle spielen wie in denen der Existenz. Durch Vereinigung der Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen entstehen dann Sätze über das Vorhandensein genau einer Lösung, die sehr einfach gebaut sind und über alle bisher bekannten derartigen Sätze hinausgehen.

Literatur.

[1] Carathéodory, C.: Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig 1918. — [2] Cinquini, S.: Problemi di valori al contorno ... Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, Sc. fis. e mat. (2) **8**, 1—22 (1939). — [3] Cinquini, S.: Sopra i problemi di valori al contorno ... Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, Sc. fis. e mat. (2), **8**, 271—283 (1939). — [4] Cinquini, S.: Problemi di valori al contorno ... Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa. Sc. fis. e mat. (2) **9**, 61—77 (1940). — [5] Cinquini, S.: Un'osservazione sopra i problemi ... Bolletino Un. Mat. Ital. (2) **2**, 322—325 (1940). — [6] Hammerstein, A.: Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. **30**, 3—10 (1932). — [7] Lettenmeyer, F.: Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Deutsche Mathematik **7**, 56—74 (1943). — [8] Magenes, E.: Sopra un problema di T. Satô ... Atti Accad. Naz. Linc., Rend. cl. sc. fis., mat. e nat. (8) **2**, 130—136 (1947). — [9] Nagumo, M.: Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) **19**, 861—866 (1937). — [10] Picard, E.: Lecons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, S. 2—7. Paris 1930. — [11] Satô, T.: Sur l'équation différentielle $y'' = f(x, y, y')$. Proc. Imp. Acad. Japan **13**, 348—350 (1937). — [12] Scorza-Dragoni, G.: Il problema dei valori ai limiti studiato in grande ... Giorn. di Mat. di Battaglini (3) **69**, 77—112 (1931). — [13] Scorza-Dragoni, G.: Il problema

dei valori ai limiti studiato in grande ... Math. Ann. **105**, 133—148 (1931). — [*14*] SCORZA-DRAGONI, G.: A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti ... Atti. R. Accad. Naz. Linc., Rend. cl. sc. fis., mat. e nat. (6) **22**, 44—48 (1935). — [*15*] SCORZA-DRAGONI, G.: Su un problema di valori ai limiti ... Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) **2**, 177—215 (1938). — [*16*] SCORZA-DRAGONI, G.: Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) **2**, 255—275 (1938). — [*17*] SCORZA-DRAGONI, G.: Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti. Atti R. Accad. Naz. Linc., Rend. cl. sc. fis., mat. e nat. (6) **28**, 317—325 (1938). — [*18*] SCORZA-DRAGONI, G.: A proposito di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Padova **10**, 90—100 (1939). — [*19*] TONELLI, L.: Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Ann. R. Scuola Norm Sup. Pisa, sc. fis. e mat. (2) **8**, 75—88 (1939). — [*20*] ZWIRNER, G.: Su un problema di valori al contorno ... Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) **3**, 57—70 (1939). — [*21*] ZWIRNER, G.: Un' osservazione su un problema ai limiti ... Bolletino Un. Mat. Ital. (2) **1**, 334—336 (1939). — [*22*] ZWIRNER, G.: Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno ... Rend. Sem. Mat. R. Univ. Padova **10**, 55—64 (1939). — [*23*] ZWIRNER, G.: Sopra un teorema sulle equazioni differenziali del secondo ordine. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Padova **10**, 65—68 (1939).

Hannover, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 23. August 1954.)

KOECHER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 455—466 (1955)

Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. II.

Von

MAX KOECHER.

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.

1. Die vorliegende Note ist als Fortsetzung einer gleichnamigen Arbeit des Verfassers[1]) anzusehen. Während in der zitierten Arbeit im wesentlichen gezeigt wurde, daß eine Abschwächung der definierenden Eigenschaften der Modulformen n-ten Grades keine echte Verallgemeinerung zur Folge hat, und diese Überlegungen für allgemeine Kongruenzuntergruppen der symplektischen Gruppe Σ_n ausgeführt wurden, soll jetzt eine Übertragung der durch MAASS [*1*][2]) verallgemeinerten PETERSSONschen Metrisierung auf diese Kongruenzgruppen vorgenommen werden. Dazu ist es im besonderen notwendig, eine handlichere Definition einer Spitzenform als die bei SIEGEL und MAASS auftretenden zu entwickeln.

Im Hinblick auf eine demnächst erscheinende Verallgemeinerung der HECKEschen Operatorentheorie war es zweckmäßig, eine systematische Theorie der Metrisierung der zu Kongruenzuntergruppen gehörigen Modulformen n-ten Grades zu geben. Da verschiedene von MAASS aufgestellte Behauptungen in allgemeinerer Form neu bewiesen werden, darf vielleicht die vorliegende Note auch an sich Interesse beanspruchen.

In der Bezeichnungsweise wird sich streng an MF I — insbesondere § 2 — gehalten. Es wird stets die Gültigkeit der Voraussetzung (V) von MF I, S. 403, angenommen und $-k>0$ vorausgesetzt[3]).

2. Wie schon erwähnt, ist über die in MF I gegebenen Bezeichnungen hinaus der Begriff einer *Spitzenform* wichtig. Im Anschluß an die Untersuchungen von SIEGEL [*2*] und MAASS [*1*] benutzt man zur Definition zweckmäßig einen Operator Φ, der zuerst erklärt werden soll. Ist $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}'=\mathfrak{X}+i\mathfrak{Y}$ eine Matrix aus dem Halbraum H_n, dann sei $\mathfrak{Z}_1$ diejenige $(n-1)$-reihige Matrix, die aus $\mathfrak{Z}$ durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht, also

$$\mathfrak{Z}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Z}_1 & * \\ * & *\end{pmatrix},$$

---

[1]) Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I, Math. Z. **59**, 399—416 (1954), im folgenden abgekürzt mit MF I.

[2]) Die in eckigen Klammern angebrachten Literaturhinweise beziehen sich auf das Verzeichnis in MF I.

[3]) Vgl. MF I, Satz 3b, 3c.

wobei dann notwendig $\operatorname{Im} \mathfrak{Z}_1 > 0$ gilt. Für jede stetige Funktion $f(\mathfrak{Z})$ auf H_n wird jetzt Φ durch

$$f(\mathfrak{Z})/\Phi = \lim_{y \to \infty} f\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & 0 \\ 0 & iy \end{pmatrix}$$

definiert, sofern dieser Limes existiert. f/Φ ist dann eine Funktion auf H_{n-1}.

Man kann sich unter Verwendung von Satz 2a aus MF I ohne Schwierigkeiten überlegen, daß für Formen $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ der Operator Φ allgemeiner definiert werden kann. Sei nämlich $\mathfrak{Z}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine im Fundamentalbereich der Modulgruppe n-ten Grades nach Unendlich strebende Folge[4]), bei der aber alle durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entstehenden Matrizen identisch sind, dann gilt stets

$$\lim_{\nu \to \infty} f(\mathfrak{Z}_\nu) = f/\Phi.$$

Man wird nun zuerst untersuchen, welche Wirkung der Operator Φ auf eine Form aus $\{K, k, v\}$ ausübt. Es gilt:

Satz 1. *Ist $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ und $\mathfrak{R}$ rational aus Σ_n gegeben, dann gilt:*

a) In der Reihenentwicklung von $f/\mathfrak{R}$ nach Satz 2a von MF I darf Φ gliedweise ausgeführt werden.

b) Es gibt eine eindeutig bestimmte Kongruenzgruppe $K_{\mathfrak{R}}$ in Σ_{n-1} und ein Multiplikatorsystem $v_{\mathfrak{R}}$ mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi \in \{K_{\mathfrak{R}}, k, v_{\mathfrak{R}}\}.$$
$$(k)$$

Ist K von der Stufe q, dann ist $K_{\mathfrak{R}}$ von der Stufe $q \cdot g^2(\mathfrak{R})$.

Ist K eine Kongruenzuntergruppe von Σ_n von endlicher Stufe, dann heißt eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ eine *Spitzenform*, wenn für *alle* rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi = 0$$
$$(k)$$

erfüllt ist[5]). Diese Definition unterscheidet sich — wenigstens formal — von der bisher üblichen Definition einer Spitzenform. Man wird aber sehen, daß beide Definitionen im Falle der Modulgruppe n-ten Grades M_n gleichbedeutend sind. Die hier eingeführte Formulierung ist wegen ihrer „invarianten" — nicht von der zugehörigen Gruppe K abhängigen — Schreibweise vorzuziehen. Außerdem wird der Begriff der „Spitze eines Fundamentalbereiches", der ja für $n > 1$ bei Gruppen, die nicht Untergruppen der Modulgruppe sind, noch wenig geklärt ist, umgangen.

Die Definition der Spitzenform enthält unendlich viele Bedingungen, die sich jedoch auf nur endlich viele reduzieren lassen.

---

[4]) Das heißt wenigstens ein Element strebt nach Unendlich.

[5]) Man kann sich leicht überlegen, daß für $n = 1$ diese Definition inhaltlich mit der dort üblichen Definition übereinstimmt.

Satz 2. *Eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ ist unter der Voraussetzung (V) genau dann Spitzenform, wenn*

$$f|_{(k)}\mathfrak{M}|\Phi = 0$$

für alle $\mathfrak{M}$ aus M_n erfüllt ist[6]).

Da K und M_n kommensurabel sind, ist jetzt sichergestellt, daß an eine Spitzenform nur endlich viele Bedingungen gestellt sind. Außerdem ersieht man aus diesem Satz die behauptete Äquivalenz der beiden Definitionen von Spitzenformen im Falle $K = M_n$, $v = 1$.

3. In Satz 2a von MF I war gezeigt worden, daß für jedes f aus $\{K, k, v\}$ und jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n die Funktion $f|\mathfrak{R}$ eine Fourierentwicklung nach

$$e^{\frac{2\pi i}{Q}\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}, \quad Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R}), \quad q \text{ Stufe von } K,$$

besitzt, bei der nur Glieder mit $\mathfrak{T} \geq 0$ auftreten. Eine Verschärfung dieses Satzes kann man für Spitzenformen beweisen:

Satz 3. *Eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ ist unter der Voraussetzung (V) genau dann Spitzenform, wenn für jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n*

$$f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T}>0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e^{\frac{2\pi i}{Q}\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}, \qquad Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R}),$$

erfüllt ist. Die Summation ist nur über die symmetrischen halbganzen positiven Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu erstrecken.

Eine relativ einfache Folgerung aus Satz 3 ist

Satz 4. *Eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ ist unter der Voraussetzung (V) genau dann Spitzenform, wenn für jedes rationales $\mathfrak{R}$ aus Σ_n*

$$|f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{R}| \leq c_1 e^{-c_2\sigma(\mathfrak{Y})}$$

für reduziertes $\mathfrak{Y} = \operatorname{Im}\mathfrak{Z} \geq c\mathfrak{E}$ $(c > 0)$ mit von $\mathfrak{Z}$ unabhängigen positiven Konstanten c_1, c_2 gilt.

Während man bei der Definition der Spitzenform ein Verschwinden der Funktion bei gewissen speziellen Annäherungen an den Rand von H_n fordert,

---

[6]) Es ist bemerkenswert, daß man diesen Satz an Stelle von M_n für jede Gruppe $N \subseteq \Sigma_n$ beweisen kann, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) N ist in H_n diskontinuierlich und besteht nur aus rationalen Matrizen von beschränktem Nenner.

b) Es existiert ein Fundamentalbereich $F(N)$ von N derart, daß aus $\mathfrak{Z} \in F(N)$ stets

$$\operatorname{Im}\mathfrak{Z} \geq c\mathfrak{E} \qquad (c = c(N) > 0)$$

folgt.

c) Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}' & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n,$$

liegen in N.

Der Beweis des Satzes wird für Gruppen dieser Art ausgeführt.

erkennt man jetzt durch Satz 4, daß dann schon die Funktion $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}$ gegen Null geht, wenn $\mathfrak{Z}$ irgendwie unter der Nebenbedingung $\mathfrak{Y} \geq c\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Y}$ reduziert, gegen Unendlich strebt.

4. Wird für eine reelle symmetrische Matrix $\mathfrak{X} = (x_{kl})$ das euklidische Volumenelement durch

$$d\mathfrak{X} = \prod_{k \geq l} dx_{kl}$$

definiert, dann ist

$$dv = \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}}$$

nach [4], III das bei den Abbildungen

$$\mathfrak{Z} \to \mathfrak{M}\langle \mathfrak{Z} \rangle, \quad \mathfrak{M} \in \Sigma_n, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y},$$

invariante Volumenelement.

Für jede diskontinuierliche Untergruppe K von Σ_n wird ein Fundamentalbereich stets mit $F(K)$ abgekürzt. Ist K_0 eine Untergruppe von K mit endlichem Index, dann hat man nach bekannten Schlußweisen

$$F(K_0) = \bigcup_{\mathfrak{M} \in K,\, \mathfrak{M} \bmod K_0} \mathfrak{M}\langle F(K) \rangle, \tag{1.1}$$

wobei für jede Punktmenge A von H_n das Bild bei der Abbildung

$$\mathfrak{Z} \to \mathfrak{M}\langle \mathfrak{Z} \rangle, \quad \mathfrak{M} \text{ aus } \Sigma_n$$

mit $\mathfrak{M}\langle A \rangle$ bezeichnet wird. Kürzt man außerdem mit $V(K)$ das symplektische Volumen des Fundamentalbereiches $F(K)$ ab, d.h.

$$V(K) = \int_{F(K)} dv = \int_{F(K)} \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}},$$

dann ist $V(K)$ von der Auswahl des Fundamentalbereiches unabhängig und hat für Kongruenzgruppen K einen endlichen Wert, da $V(M_n)$ nach [4], III endlich ist. Ohne Schwierigkeit überlegt man sich, daß

$$V(K_0) = [K : K_0]\, V(K) \tag{1.2}$$

und für symplektisches $\mathfrak{R}$ außerdem

$$V(\mathfrak{R} \cdot K \cdot \mathfrak{R}^{-1}) = V(K) \tag{1.3}$$

richtig ist.

5. Analog der Definition von MAASS [1] werde für zwei Formen $f(\mathfrak{Z})$ und $g(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$, von denen wenigstens eine Spitzenform ist, ein *Skalarprodukt* (f, g) durch

$$(f, g) = \frac{1}{V(K)} \int_{F(K)} f(\mathfrak{Z})\, \overline{g(\mathfrak{Z})}\, |\mathfrak{Y}|^{-k} \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \tag{1.4}$$

definiert. Wie in 4. überlegt man sich auch hier, daß (f, g) nicht von der Auswahl des Fundamentalbereiches $F(K)$ abhängt. Die hier im Gegensatz zu PETERSSON und MAASS gewählte Normierung des Skalarproduktes gestattet bei späteren Anwendungen verschiedene formale Vereinfachungen, denn (1.4) hängt, wie man sehen wird, nicht mehr von der Gruppe K ab.

Satz 5. *Unter der Voraussetzung* (V) *gilt:*

a) (f, g) *konvergiert absolut, sobald* f *und* g *in* $\{K, k, v\}$ *liegen und* f *oder* g *Spitzenform ist.*

b) (f, g) *ist durch* f *und* g *eindeutig bestimmt, d.h. das Skalarprodukt hängt nicht von* K *ab.*

c) $(f, g) = \overline{(g, f)}$, $(f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0$ *genau wenn* $f = 0$.

d) $(f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}) = (f, g)$ *für jedes rationale* $\mathfrak{R}$ *aus* Σ_n.

Für $K = M_n$ stammt dieser Satz von MAASS [1]. Der Beweis wird hier mit Hilfe von Satz 4 geführt.

Satz 5 zeigt, daß durch die Erklärung des Skalarproduktes (f, g) die Teilschar der Spitzenformen aus $\{K, k, v\}$ zu einem *metrischen Raum* mit positiv definiter hermitescher Metrik wird. Die Theorie der metrischen Räume liefert sofort:

Satz 6. *Unter der Voraussetzung* (V) *gibt es in der Teilschar der Spitzenformen von* $\{K, k, v\}$ *eine Basis* $f_1, f_2, \ldots, f_\varrho$ *mit* $(f_k, f_l) = \delta_{kl}$.

Bei diesem Satz muß natürlich vorausgesetzt werden, daß es überhaupt eine nicht identisch verschwindende Spitzenform der betrachteten Schar gibt. Da aber jede Spitzenform f aus $\{M_n, k, 1\}$ gleichzeitig Spitzenform in $\{M_n[q], k, 1\}$ ist, stellt für beliebige Kongruenzgruppe K der Stufe q die durch

$$g = \prod_{\substack{\mathfrak{M} \in K \\ \mathfrak{M} \backslash M_n[q]}} f/\mathfrak{M}^{(k)}$$

definierte Funktion eine nicht verschwindende Spitzenform aus $\{K, mk, 1\}$ dar, wobei der Index von $M_n[q]$ in K mit m abgekürzt ist.

§ 2. Beweis der Sätze 1 bis 5.

Wie in MF I wird wieder

$$e_q(\mathfrak{W}) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma(\mathfrak{W})}$$

für jedes natürliche q abgekürzt.

1. *Beweis von Satz 1.* a) Es genügt zu beweisen, daß die Fourierreihe für $f/\mathfrak{R}$ bei

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & 0 \\ 0 & iy \end{pmatrix}$$

für alle $\mathfrak{Z}_1$ aus einem kompakten, ganz in $H_{n\ 1}$ liegenden Gebiet G und alle $y \geq y_1$ gleichmäßig in $\mathfrak{Z}_1$ und y konvergiert. Es gibt dazu $c > 0$ derart, daß für alle $\mathfrak{Z}_1$ aus G

$$\operatorname{Im} \mathfrak{Z}_1 \geq 2c\mathfrak{E}$$

erfüllt ist. Bei $y \geq 2c$ ist dann $\operatorname{Im} \mathfrak{Z} \geq 2c\mathfrak{E}$ und man hat für den Betrag des allgemeinen Gliedes von $f/\mathfrak{R}$

$$|a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z})| = |a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}(\mathfrak{Z} - c\mathfrak{E}))| \cdot |e_Q(c\,\mathfrak{T})| \leq |a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(c\,\mathfrak{T})|,$$

so daß die Betragsreihe von $f(i\,c\mathfrak{E})/\mathfrak{R}$ eine von y und $\mathfrak{Z}_1$ unabhängige Majorante von $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}$ ist. $f/\mathfrak{R}/\Phi$ existiert also und darf gliedweise ausgeführt werden

b) In dem Beweis zu Satz 1a war schon mitbewiesen worden, daß $f/\mathfrak{R}/\Phi$ eine reguläre analytische Funktion auf H_{n-1} ist. Es muß also nur noch die Transformationsformel für $g = f/\mathfrak{R}$ nachgewiesen werden. Dazu liegt zuerst g in $\{\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R},\ k,\ \bar{v}\}$, wobei für $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R}$ der Multiplikator $\bar{v}$ durch

$$\bar{v}(\mathfrak{M}) = v(\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}^{-1})$$

definiert ist. Jetzt sei $K_{\mathfrak{R}}$ die Gruppe der Matrizen

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{D}_1 \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad \Sigma_{n-1},$$

für die

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & 0 & \mathfrak{B}_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{C}_1 & 0 & \mathfrak{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R}$ liegt. Für $\mathfrak{M}_1$ aus $K_{\mathfrak{R}}$ ist

$$v_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}_1) = \bar{v}(\mathfrak{M})$$

ein Multiplikatorsystem von $K_{\mathfrak{R}}$ und es folgt

$$\begin{aligned} g/\Phi/\mathfrak{M}_1 &= \lim_{y \to \infty} g \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1\langle \mathfrak{Z}_1 \rangle & 0 \\ 0 & i\,y \end{pmatrix} |\mathfrak{M}_1\{\mathfrak{Z}_1\}|^k \\ &= \lim_{y \to \infty} g(\mathfrak{M}\langle \mathfrak{Z} \rangle)\, |\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\}|^k = g/\mathfrak{M}/\Phi, \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & 0 \\ 0 & i\,y \end{pmatrix}, \\ &= v_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}_1)\, g/\Phi, \end{aligned}$$

so daß Satz 1 vollständig bewiesen ist, denn $\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R}$ und $K_{\mathfrak{R}}$ sind von gleicher Stufe.

2. *Beweis von Satz 2.* Da der Beweis in der allgemeinen Form für die Gruppen N, die [6]) genügen, geführt werden soll, muß zuerst ein Hilfssatz bewiesen werden, der auch für sich allein interessant ist.

Hilfssatz 1. *Ist N eine Gruppe, die den Forderungen a) und b) von* [6]) *genügt, dann gibt es zu jedem rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n ein $\mathfrak{M}$ aus N mit*

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{S}\,\mathfrak{A}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}'.$$

Beweis. Sei die natürliche Zahl ϱ so beschaffen, daß für alle $\mathfrak{M}$ aus N die Matrix $\varrho \cdot \mathfrak{M}$ ganz ist und

$$\mathfrak{Z} = i\,y\,\mathfrak{E}, \qquad y > \frac{\varrho^2 g^2(\mathfrak{R})}{c(N)},$$

dann gibt es nach Forderung b) ein $\mathfrak{M}$ aus N mit

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}\langle\mathfrak{Z}\rangle \in F(N), \quad \text{d.h.} \quad \operatorname{Im}\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}\langle\mathfrak{Z}\rangle \geq c(N)\,\mathfrak{E}.$$

Bei

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

folgt nach MF I (2.2)

$$y\,\mathfrak{E} \geq c(N)\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})'\,(\mathfrak{C}\,\bar{\mathfrak{Z}} + \mathfrak{D}). \tag{2.1}$$

Sei jetzt $r = r(\mathfrak{C})$ der Rang von $\mathfrak{C}$ und $r > 0$, dann gibt es nach dem Elementarteilersatz Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ aus Ω_n mit

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{V}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \mathfrak{D}_3 & \mathfrak{D}_4 \end{pmatrix}\mathfrak{V}'^{-1}, \quad |\mathfrak{C}_1^{(r)}| \neq 0,$$

denn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind rational. Aus $\mathfrak{M}\,\mathfrak{R} \in \Sigma_n$ folgt $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\,\mathfrak{C}'$, was selbst wiederum $\mathfrak{D}_3 = 0$ nach sich zieht. Setzt man noch

$$\mathfrak{V}' = (\mathfrak{Q}^{(n,r)}\,*), \qquad \mathfrak{U} = (\mathfrak{P}^{(n,r)}\,*),$$

dann folgt aus (2.1)

$$y\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}' \geq c(N)\begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{D}_1 & * \\ 0 & \mathfrak{D}_4 \end{pmatrix}' \mathfrak{U}'\,\mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 \cdot \bar{\mathfrak{Z}}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{D}_1 & * \\ 0 & \mathfrak{D}_4 \end{pmatrix}.$$

Da diese Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten die letzten $n-r$ Zeilen und Spalten streicht, wird

$$y\,\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q} \geq c(N)\,(\mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{D}_1)'\,\mathfrak{C}_1'\,\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{C}_1(\bar{\mathfrak{Z}}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{D}_1)$$

und Übergang zu den Determinanten liefert

$$\begin{aligned} y^r|\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}| &\geq (c(N))^r\,|\mathfrak{C}_1|^2 \cdot |\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}| \cdot ||\mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{D}_1||^2 \\ &\geq (c(N))^r\,|\mathfrak{C}_1|^2 \cdot |\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}|^2\,y^{2r} \\ &\geq (c(N)\cdot y^2)^r\,|\mathfrak{C}_1|^2 \cdot |\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}| \\ &> y^r|\varrho\,g(\mathfrak{R})\,\mathfrak{C}_1|^2\,|\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}|. \end{aligned}$$

Das ist aber für $r > 0$ ein Widerspruch, denn $\varrho \cdot g(\mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{C}_1$ ist ganz und hat daher als Determinante mindestens 1. Es muß also $r(\mathfrak{C}) = 0$, d.h. $\mathfrak{C} = 0$ gelten und der Hilfssatz ist bewiesen.

Der Hilfssatz gilt insbesondere für $N=M_n$, jedoch kann er in diesem Falle aus einem arithmetischen Hilfssatz von SIEGEL gefolgert werden.

Zum Beweis von Satz 2 bestimmt man nun zu gegebenem rationalem $\mathfrak{R}$ aus Σ_n die Matrix $\mathfrak{M}$ aus N nach Hilfssatz 1. Wegen Forderung c) von [6]) kann man noch

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1 & \mathfrak{a}\\ 0 & a\end{pmatrix}, \qquad a\cdot|\mathfrak{A}_1|\neq 0,$$

annehmen. Man setzt jetzt

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_0, \qquad g(\mathfrak{Z})=f(\mathfrak{Z})\underset{(k)}{/}\mathfrak{M}^{-1}.$$

Wenn nun

$$g/\mathfrak{R}_0/\Phi=\gamma\cdot g/\Phi/\mathfrak{R}_1 \tag{2.2}$$

mit geeignetem $\mathfrak{R}_1$ aus Σ_{n-1} und konstantem, von Null verschiedenen γ bewiesen werden kann, dann ist $f/\mathfrak{R}/\Phi=0$ schon erfüllt, wenn $f/\mathfrak{M}^{-1}/\Phi=0$ richtig ist. Zum Beweis des Satzes muß also nur noch (2.2) gezeigt werden. Man hat dazu bei

$$\mathfrak{Z}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Z}_1 & 0\\ 0 & iy\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S}=\begin{pmatrix}\mathfrak{S}_1 & \mathfrak{f}\\ \mathfrak{f}' & s\end{pmatrix},$$

sofort

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}_0=|\mathfrak{A}|^{-k}\,g(\mathfrak{R}_0\langle\mathfrak{Z}\rangle),$$

$$\mathfrak{R}_0\langle\mathfrak{Z}\rangle=\mathfrak{A}'\,\mathfrak{Z}\,\mathfrak{A}+\mathfrak{S}=\begin{pmatrix}\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle & \mathfrak{x}\\ \mathfrak{x}' & iya^2+x\end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle=\mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{A}_1+\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{x}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}_1\mathfrak{a}+\mathfrak{f}$, $x=\mathfrak{a}'\mathfrak{Z}_1\mathfrak{a}+s$. Mit Satz 1a hat man sodann

$$\begin{aligned}g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}_0/\Phi&=\lim_{y\to\infty}|\mathfrak{A}|^{-k}\,g(\mathfrak{R}_0\langle\mathfrak{Z}\rangle)\\&=\lim_{y\to\infty}|\mathfrak{A}|^{-k}\sum_{\mathfrak{T}\geq 0}a(\mathfrak{T},\mathfrak{M}^{-1})\,e_Q(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle+2\mathfrak{t}'\mathfrak{x})\,e^{-\frac{2\pi ya^2t}{Q}}\end{aligned}$$

mit $Q=q\cdot g^2(\mathfrak{M}^{-1})$, wobei noch in jedem Reihenglied

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}\mathfrak{T}_1 & \mathfrak{t}\\ \mathfrak{t}' & t\end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Man hat also

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}_0/\Phi=|\mathfrak{A}|^{-k}\sum_{\substack{\mathfrak{T}\geq 0\\ t=0}}a(\mathfrak{T},\mathfrak{M}^{-1})\,e_Q(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle)=a^{-k}\,g(\mathfrak{Z})/\Phi/\mathfrak{R}_1,$$

und (2.2) ist bewiesen.

3. *Beweis von Satz 3.* Es wird zuerst bewiesen werden, daß aus $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi=0$ für alle rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n die spezielle Entwicklung nach Satz 3 folgt. Nach Satz 2a in MF I hat man sicher

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}=\sum_{\mathfrak{T}\geq 0}a(\mathfrak{T},\mathfrak{R})\,e_Q(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z}), \qquad Q=q\cdot g^2(\mathfrak{R}).$$

Aus der Definition der Spitzenform folgt nun, daß bei festem $\mathfrak{R}$ auch die Funktion $f|\mathfrak{R}$ selbst Spitzenform ist, d.h. daß

$$(f|\mathfrak{R})|\mathfrak{K}|\Phi = f|\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}|\Phi = 0$$

für jedes rationale $\mathfrak{K}$ aus Σ_n gilt. Wählt man

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U} & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}'^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n,$$

so wird

$$f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}\,\mathfrak{K} = |\mathfrak{U}|^{-k} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{Z})$$

und bei

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1^{(n-1)} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U}'\mathfrak{T}\,\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' & t \end{pmatrix}$$

folgt

$$f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}|\Phi = \lim_{y \to \infty} |\mathfrak{U}|^{-k} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{Z}_1)\, e^{-\frac{2\pi y t}{Q}}$$

Dieser Grenzwert darf nach Satz 1a gliedweise ausgeführt werden. Man erhält

$$f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}|\Phi = |\mathfrak{U}|^{-k} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{Z}_1),$$

wobei die Summe nur über diejenigen $\mathfrak{T}$ erstreckt werden darf, für die $t = 0$, d.h.

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

erfüllt ist, denn aus $t = 0$, $\mathfrak{T} \geq 0$ folgt $\mathfrak{t} = 0$. $f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}|\Phi = 0$ hat also

$$a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{T}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zur Folge. Da $\mathfrak{U}$ beliebig aus Ω_n gewählt war, hat man

$$a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}) = 0 \quad \text{für} \quad |\mathfrak{T}| = 0,$$

denn bei $|\mathfrak{T}| = 0$ gibt es immer $\mathfrak{U}$ aus Ω_n mit (2.3). Damit ist die eine Richtung der Behauptung bewiesen.

Zum Beweis der Umkehrung habe $f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}$ für jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n eine Entwicklung nach Satz 3. Bei

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' & t \end{pmatrix}$$

hat man wieder

$$f(\mathfrak{Z})|\mathfrak{R}|\Phi = \lim_{y \to \infty} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{Z}_1)\, e^{-\frac{2\pi y t}{Q}}$$

Da aus $\mathfrak{T} > 0$ notwendig $t > 0$ folgt gehen rechts alle Reihenglieder gegen Null, der Satz ist also vollständig bewiesen.

4. *Beweis von Satz 4.* Da der Beweis des Satzes allein auf der Reihenentwicklung nach Satz 3 beruht, kann er auf zwei allgemeine Hilfssätze zurückgeführt werden. Dazu werde für $\mathfrak{Z}$ aus H_n und natürliches q

$$L_q(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T}>0} e_q(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z}) \tag{2.4}$$

gesetzt. Die Summe ist über alle symmetrischen positiven halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu erstrecken, ihre Konvergenz entnimmt man Hilfssatz 2 von MF I.

Hilfssatz 2. *Für alle* $\mathfrak{Z}$ *aus* H_n, *für die* $\mathfrak{Y} = \operatorname{Im}\mathfrak{Z}$ *reduziert und* $\mathfrak{Y} \geq 2c\mathfrak{E}$ $(c>0)$ *ist, gilt*

$$|L_q(\mathfrak{Z})| \leq c_3\, e^{-c_4 \cdot \sigma(\mathfrak{Y})}.$$

Dabei sind c_3 und c_4 (später $c_5, \ldots, c_{11}$) geeignete positive Konstanten.

Beweis. Nach MF I (2.1) hat man zuerst für $\mathfrak{T} = (t_{kl}) > 0$,

$$\frac{\pi}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Y}) \geq c_4 \sum_k t_k\, y_k \geq c_4\,\sigma(\mathfrak{Y}), \qquad \mathfrak{Y} = (y_{kl}),$$

und außerdem

$$\frac{\pi}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Y}) \geq \frac{2\pi c}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}),$$

da $\mathfrak{Y} \geq 2c\mathfrak{E}$. Addition dieser beiden Ungleichungen liefert

$$\frac{2\pi}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Y}) \geq c_4\,\sigma(\mathfrak{Y}) + \frac{2\pi c}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}),$$

so daß mit

$$|L_q(\mathfrak{Z})| \leq L_q(i\,\mathfrak{Y}) \leq e^{-c_4\sigma(\mathfrak{Y})} \cdot L_q(i\,c\,\mathfrak{E})$$

der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Ist*

$$h(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T}>0} a(\mathfrak{T})\, e_q(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen positiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ *gleichmäßig in jedem kompakten, ganz in* H_n *liegenden Gebiet konvergent, dann gilt für alle* $\mathfrak{Z}$ *aus* H_n, *für die* $\mathfrak{Y} = \operatorname{Im}\mathfrak{Z}$ *reduziert und* $\mathfrak{Y} \geq 2c\mathfrak{E}$ $(c>0)$ *ist,*

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq c_5\, e^{-c_6\,\sigma(\mathfrak{Y})}.$$

Beweis. Analog MF I (4.6) hat man sofort bei $\operatorname{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0) > 0$

$$h(\mathfrak{Z}) = q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_{W_n(q)} L_q(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0)\, h(\mathfrak{Z}_0)\, d\mathfrak{X}_0, \quad \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + i\,\mathfrak{Y}_0.$$

Man setzt $\mathfrak{Y}_0 = c\mathfrak{E}$, so daß $\operatorname{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0) \geq c\mathfrak{E}$ folgt. Eine triviale Abschätzung unter Verwendung von Hilfssatz 2 liefert

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq c_5\, e^{-c_4\sigma(\mathfrak{Y} - c\mathfrak{E})}$$

und

$$\sigma(\mathfrak{Y} - c\mathfrak{E}) = \tfrac{1}{2}\sigma(\mathfrak{Y}) + \tfrac{1}{2}\sigma(\mathfrak{Y} - 2c\mathfrak{E}) \geq \tfrac{1}{2}\sigma(\mathfrak{Y})$$

vollendet den Beweis.

Ist $f(\mathfrak{Z})$ Spitzenform, dann hat $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}$ nach Satz 3 die in Hilfssatz 3 geforderte spezielle Reihenentwicklung, und die Behauptung des Hilfssatzes liefert die Behauptung des Satzes. Die Umkehrung ist trivial.

5. *Beweis von Satz 5.* Zuerst wird Teil a) als bereits bewiesen angenommen. Zum Beweis von b) wird das durch (1.4) definierte Skalarprodukt von f mit g zur Gruppe K mit $(f, g; K)$ bezeichnet. K_1 und K_2 seien nun zwei Kongruenzgruppen mit Multiplikatorsystemen v_1 und v_2 und f und g zwei Funktionen, die sowohl in $\{K_1, k, v_1\}$ als auch in $\{K_2, k, v_2\}$ liegen. Setzt man dann $K_0 = K_1 \cap K_2$, dann ist K_0 Kongruenzgruppe und wegen $K_1 \geqq K_0$ hat man nach (1.1)

$$\begin{aligned} V(K_0)\,(f, g; K_0) &= \int_{F(K_0)} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\frac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ &= \sum_{\mathfrak{M} \in K_1,\ \mathfrak{M} \backslash K_0} \int_{\mathfrak{M}\langle F(K_1)\rangle} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\frac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ &= [K_1 : K_0] \int_{F(K_1)} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\frac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ &= [K_1 : K_0]\, V(K_1)\,(f, g; K_1), \end{aligned}$$

also mit (1.2) $(f, g; K_0) = (f, g; K_1)$. Aus Symmetriegründen folgt dann auch $(f, g; K_1) = (f, g; K_2)$, womit b) bewiesen ist.

Die Behauptungen unter c) folgen sofort aus der Definition. Für d) sei q die Stufe von K, d.h. f und g liegen in $\{M_n[q], k, 1\}$. Bei $Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R})$ hat man gleichzeitig

$$f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R} \in \{\mathfrak{R}^{-1} \cdot M_n[q] \cdot \mathfrak{R}, k, 1\} \subseteqq \{M_n[Q], k, 1\}.$$

Nacheinander ist nun

$$(f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}) = (f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}; M_n[Q]) = (f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{-1} \cdot M_n[q] \cdot \mathfrak{R}).$$

Die Substitution $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{R}^{-1}\langle\mathfrak{Z}\rangle$ im Integral der rechten Seite liefert sofort für diesen Ausdruck

$$(f, g; M_n[q]) = (f, g),$$

so daß auch d) bewiesen ist.

Zum Beweis von a) kann man ohne Einschränkung $K = M_n[q]$, $v = 1$, annehmen. Man hat unter Verwendung von (1.1)

$$\text{(2.5)} \quad \begin{cases} (f, g) = \dfrac{1}{V(M_n[q])} \displaystyle\int_{F(M_n[q])} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\dfrac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ \quad = \dfrac{1}{V(M_n)}\,\dfrac{1}{\mu_n(q)} \displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{M} \in M_n \\ \mathfrak{M} \backslash M_n[q]}} \int_{F(M_n)} f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} \cdot \overline{g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}} \cdot |\mathfrak{Y}|^{-k}\,\dfrac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \end{cases}$$

Zur Abschätzung der Integrale auf der rechten Seite gilt bekanntlich ([2] oder [4]) für alle $\mathfrak{Z}$ aus $F(M_n)$

$$\mathfrak{Y} \geqq c_7\,\mathfrak{E} \quad (c_7 > 0).$$

Ist jetzt z. B. f die Spitzenform, dann kann man Satz 4 mit $c = c_7$ anwenden und hat

$$|f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}| \leq c_8 e^{-c_9 \sigma(\mathfrak{Y})} \leq c_{\cdot} |\mathfrak{Y}|^k \qquad (-k > 0!)$$

und außerdem nach MF I Satz 2b

$$|g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}| \leq c_{10}$$

für alle $\mathfrak{Z}$ aus $F(M_n)$. c_9 und c_{10} dürfen dabei durchaus von $\mathfrak{M}$ abhängen. Jedes Integral der rechten Seite von (2.5) hat daher

$$c_{11} \int\limits_{F(M_n)} \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} = c_{11} V(M_n)$$

als Majorante, so daß $|(f, g)| \leq c_{11}$ folgt und die absolute Konvergenz des Skalarproduktes sichergestellt ist.

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1954.)

STOLL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 467—488 (1955)

Über meromorphe Modifikationen.

II. Allgemeine Eigenschaften meromorpher Modifikationen[1]).

Von

WILHELM STOLL.

In dieser Arbeit wird ein Begriff „*meromorphe Abbildung*" eingeführt und in Verbindung mit Modifikationen untersucht. Eine rationale Abbildung einer algebraischen Mannigfaltigkeit führt bekanntlich meromorphe Funktionen in meromorphe Funktionen über und ist selbst durch meromorphe Funktionen gegeben. Man könnte daher daran denken, eine Abbildung meromorph zu nennen, wenn sie meromorphe Funktionen in ebensolche überführt. Vernünftigerweise muß dann die Existenz nichtkonstanter meromorpher Funktionen auf der Bildmannigfaltigkeit vorausgesetzt werden. Oder man könnte eine Abbildung meromorph nennen, wenn sie bezüglich geeigneter Koordinatensysteme der Bildmannigfaltigkeit durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Das würde die Existenz „unbeschränkter" Koordinatensysteme ($\alpha \in \mathfrak{P}$ mit U'_α unbeschränkt) in der Bildmannigfaltigkeit voraussetzen und wiederum eine unsachgemäße Forderung an die Bildmannigfaltigkeit stellen. Die hier gegebene Definition (4.1) vermeidet diese Schwierigkeiten. Sie ist rein lokaler Natur und permanent, d. h., eine Abbildung in einen komplex-projektiven Raum ist dann und nur dann meromorph, wenn sie durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Eine analytische Abbildung ist meromorph. Eine Modifikation $\mathfrak{M}$ heißt meromorph, wenn die Modifikationsabbildung[1]) τ meromorph ist. Im Falle der Dimension $2n=4$ führt eine meromorphe Modifikation analytische Mengen und meromorphe Funktionen in ebensolche über. Der σ-Prozeß[1]) und seine Umkehrung sind meromorphe Modifikationen. Daher lassen sich höchstens meromorphe Modifikationen durch σ-Prozesse erzeugen. Es wird sich später zeigen, daß eine beiderseits offene Modifikation dann und nur dann meromorph ist, wenn sie sich durch σ-Prozesse oder deren Umkehrungen gewinnen läßt.

In dieser Arbeit (Teil II) werden einfachere Eigenschaften meromorpher Abbildungen, sowie meromorpher und analytischer Modifikationen bewiesen. In der nächsten Arbeit wird gezeigt werden, daß im Falle $2n=4$ die Singularitäten meromorpher beiderseits offener Modifikationen isoliert liegen.

---

[1]) Unter dem gemeinsamen Titel „Über meromorphe Modifikationen" erscheinen eine Reihe von Arbeiten, und zwar Teil I (§§ 1 bis 3), Teil II (§§ 4 bis 6) und Teil III (§§ 7 bis 9) in der Mathematischen Zeitschrift, Teil IV (§§ 10 bis 12) und Teil V (§§ 13 bis 16) in den Mathematischen Annalen. Zur Einleitung, Begriffsbildung und Literatur sei auf Teil I, Math. Z. **61**, 206—234 (1954), hingewiesen.

§ 4. Meromorphe Modifikationen.

Eine Funktion f heißt bekanntlich in einem Gebiet G meromorph, falls sie lokal Quotient analytischer Funktionen ist; diese Definition läßt sich nicht auf Abbildungen übertragen. Aber eine Funktion f ist bekanntlich in einem Gebiet G dann und nur dann meromorph, wenn sie abgesehen von einer analytischen Menge M mit $\dim M \leqq 2n-2$ analytisch ist, und falls sie längs jeder komplexen Kurve L aus G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$, eine meromorphe Funktion induziert, d.h., falls sich f als Abbildung in die Zahlenkugel längs L in P_0 bestimmt verhält, oder, was dasselbe ist, als Abbildung in die Zahlenebenen längs L in P_0 nicht streut. Diese Definition läßt sich auf Abbildungen verallgemeinern:

Definition 4.1. Meromorphe Abbildungen.

Die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G enthalte die offene Menge A die durch die Abbildung τ analytisch in die $2m$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H abgebildet werde. Es gebe eine offene Umgebung U von $M = G - A$ und eine in U analytische Menge, die M umfaßt und deren Dimension höchstens $2n-2$ ist. Die Abbildung τ heiße in $P_0 \in G$ meromorph, wenn entweder $P_0 \in A$ ist, oder wenn $P_0 \in M$ ist und es eine offene Umgebung W von P_0 gibt, so daß die Abbildung τ längs jeder komplexen Kurve $L \subset W$, für die $\overline{L} \cap M = L \cap M = \{P_1\}$ gilt, in P_1 nicht streut. Die Abbildung τ heiße in $B \subseteqq G$ meromorph, wenn sie es in jedem Punkt von B ist.

Die Abbildung τ heiße in $P_0 \in M$ hebbar singulär, wenn sie in P_0 regulär ist. Wenn die Abbildung τ in $P_0 \in M$ meromorph und aber nicht regulär ist, so heiße sie dort außerwesentlich singulär, und zwar heiße P_0 ein Pol oder eine Unbestimmtheitsstelle, je nach dem τ (längs G) in P_0 eine Lücke hat oder streut.

Eine gewisse Berechtigung erhält diese Bezeichnungsweise durch den folgenden Satz:

Satz 4.1. Meromorphe Abbildungen in den projektiven Raum.

Voraussetzung. *Die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G enthalte die offene Menge A, die durch die Abbildung τ analytisch in den $2m$-dimensionalen komplex-projektiven Raum H, der durch die Koordinatenverhältnisse $(z_0 : z_1 : \ldots : z_m)$ gegeben wird, abgebildet werde. Es gebe eine offene Umgebung U von $M = G - A$ und eine in U analytische Menge, die M umfaßt und deren Dimension höchstens $2n-2$ ist.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist die Abbildung τ in G meromorph, wenn jeder Punkt $P_0 \in M$ die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllt: $\mathfrak{B}$: Es gibt eine offene Umgebung W von P_0 und in W analytische Funktionen $g_0(P), \ldots, g_m(P)$, die in jedem Punkt von W den größten gemeinsamen Teiler 1 haben und für die*

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \tag{4.1}$$

auf $W \cap A$ gilt[2]).

[2]) Die Abbildung τ ist also eine „meromorphe Fläche" im Sinne von STOLL [17], § 3, Definition 3.1, deren Unbestimmtheitsstellen in M liegen.

Anmerkung. *Die Bedingung* $\mathfrak{B}$ *ist gleichwertig mit* $\mathfrak{B}^*$: *Es gibt eine offene Umgebung* W *von* P_0, *eine Nummer* ν, *in* W *meromorphe Funktionen* $f_0(P), \ldots, f_{\nu-1}(P), f_{\nu+1}(P), \ldots, f_m(P)$ *und eine in* W *analytische Menge* S, *die leer ist oder die Dimension* $2n-2$ *hat, so daß*

$$\tau(P) = \big(f_0(P) : \ldots : f_{\nu-1}(P) : 1 : f_{\nu+1}(P) : \ldots : f_m(P)\big) \tag{4.2}$$

für $P \in A_\nu = A \cap (W - S)$ *gilt.*

Beweis. a) *Aus* $\mathfrak{B}$ *folgt* $\mathfrak{B}^*$: Indem man gegebenenfalls W verkleinert, kann man W als Gebiet annehmen. Dann ist $g_\nu(P) \not\equiv 0$ für eine Nummer ν. Die Menge $S = \{P \mid g_\nu(P) = 0\}$ ist analytisch in W. Sie ist leer oder hat die Dimension $2n-2$. Mit $f_\mu(P) = \frac{g_\mu(P)}{g_\nu(P)}$ für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$ gilt $\mathfrak{B}^*$.

b) *Aus* $\mathfrak{B}^*$ *folgt* $\mathfrak{B}$: Indem man gegebenenfalls W verkleinert, kann man $m+1$ in W analytische Funktionen $g_0, \ldots, g_m$ finden, die in jedem Punkt von W den größten gemeinsamen Teiler 1 haben und für die $f_\mu = \frac{g_\mu}{g_\nu}$ in W gilt. Ist $P_1 \in A$, so gibt es eine Umgebung $W_1 < W \cap A$ und in W_1 analytische Funktionen $h_0, \ldots, h_m$, die in P_1 den größten gemeinsamen Teiler 1 haben und für die

$$\tau(P) = \big(h_0(P) : \ldots : h_m(P)\big) \tag{4.3}$$

auf W_1 gilt. Also erhält man $\frac{h_\mu}{h_\nu} = f_\mu = \frac{g_\mu}{g_\nu}$ auf W_1, woraus $h_\mu(P) = \lambda(P)\, g_\mu(P)$ für $\mu = 0, \ldots, m$ folgt. Die Funktion $\lambda(P)$ ist in P_1 analytisch und von Null verschieden. Daher gilt

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \quad \text{für} \quad P \in W \cap A; \tag{4.4}$$

die Bedingung $\mathfrak{B}$ ist erfüllt.

c) Zu jedem Punkt $P_0 \in A$ gibt es eine Umgebung $V(P_0) \subseteqq A$ und darin analytische Funktionen $g_0(P, P_0), \ldots, g_m(P, P_0)$, so daß

$$\tau(P) = \big(g_0(P, P_0) : \ldots : g_m(P, P_0)\big) \tag{4.5}$$

für $P \in V(P_0)$ gilt. Ist $V(P_0) \cap V(P_1) \neq \emptyset$, so ist $\frac{g_\mu(P, P_0)}{g_\mu(P, P_1)} = \lambda(P) \neq 0$ und analytisch in $V(P_0) \cap V(P_1)$. In jedem Cousin-Gebiet $V < A$ gibt es also analytische Funktionen $g_0(P), \ldots, g_m(P)$ mit

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \quad \text{für} \quad P \in V. \tag{4.6}$$

d) Die Abbildung τ sei im Punkt $P_0 \in M$ meromorph und die komplexe Kurve L schneide M in P_0 mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Da τ in P_0 längs L nicht streut und H kompakt ist, verhält sich die Abbildung τ längs L in P_0 bestimmt. Es ist $\tau(P, L)$ auf L stetig, also analytisch.

e) *Die Abbildung* τ *sei im Gebiet* $W \subseteqq G$ *meromorph.* Es sei $E = \Big\{(z_0 : \ldots : z_m) \;\Big|\; \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_\nu = 0\Big\}$ eine Ebene aus H. In $A \cap W$ ist $S^* = \tau^{-1}(E) \cap W$ analytisch.

Angenommen S^* ist in einem Punkt von $M \cap W$ singulär. Dann ist dim $S^* < 2n$. Da S^* die Nullstellenmenge der Cousin-Verteilung $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu g_\nu(P, P_0)$ ist, hat S^* die reine Dimension $2n-2$. Da S^* in einem Punkt von M singulär wird, und M in einer analytischen Menge, deren Dimension kleiner als $2n$ ist, liegt, gibt es eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$, so daß gilt

1. Durch α wird

$$U'_\alpha = \{\mathfrak{w} \,|\, |w_\mu| < 1 \quad \mu = 1, \ldots, n\} \tag{4.7}$$

pseudokonform auf $U_\alpha \subset W$ abgebildet.

2. Es ist

$$\alpha^{-1}(M \cap U_\alpha) = \{\mathfrak{w} \,|\, w_n = 0\} \cap U'_\alpha. \tag{4.8}$$

3. In $M \cap U_\alpha$ ist $S^* \cap U_\alpha$ singulär (THULLEN [19]).

4. Im Cousin-Gebiet $U_\alpha \cap A$ gibt es analytische Funktionen $g_0(P), \ldots, g_m(P)$, so daß

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \tag{4.9}$$

für $P \in U_\alpha \cap A$ gemäß c) gilt.

5. Es ist

$$S^* \cap U_\alpha = \left\{P \,\middle|\, \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu g_\nu(P) = 0\right\} \cap U_\alpha \cap A. \tag{4.10}$$

Da S^* in $M \cap U_\alpha$ singulär ist, gibt es im Polyzylinder $B = \{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \,|\, |a_\mu| < 1$ für $\mu = 1, \ldots, n-1\}$ eine Nullmenge N, so daß jede komplexe Kurve $E_{a_1, \ldots, a_{n-1}} = \{P \,|\, P = \alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n)$ mit $|w_n| < 1\}$, für die $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in B - N$ ist, in S^* wenigstens eine Punktfolge $P^\mu = \alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n^\mu) \in S^* \cap E_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ enthält, die gegen $\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ strebt[3]). Da $\tau(P)$ längs $E_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ analytisch ist, strebt $\tau(P) \to Q_{a_1, \ldots, a_{n-1}} = (b_0 : \ldots : b_m)$ für $P \to \alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ und $P \in E_{a_1, \ldots, a_{n-1}} \cap A$. Für eine Nummer $\varrho \neq \nu$ ist $b_\varrho \neq 0$. Daher ist $g_\varrho\big(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n)\big) \neq 0$ für $0 < |w_n| < \varepsilon$ bei geeigneter Wahl eines $\varepsilon > 0$. Es strebt also

$$h_\mu(w_n) = \frac{g_\mu(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n))}{g_\varrho(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n))} \to \frac{b_\mu}{b_\varrho} \quad \text{für} \quad w_n \to 0. \tag{4.11}$$

Die Funktionen $h_\mu(w_n)$ sind in $|w_n| < \varepsilon$ analytisch. Es ist $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(w_n^\mu) = 0$ und $\lim_{\mu \to \infty} w_n^\mu = 0$. Daher ist $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(w_n) \equiv 0$, also auch $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu g_\nu\big(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n)\big) \equiv 0$. Es ist $E_{a_1, \ldots, a_{n-1}} \subset S^* \cap U_\alpha$ für $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in B - N$. Daher enthält S^* eine Menge positiven Maßes, was falsch ist. Die Menge $\overline{S^*} \cap W$ ist also in W analytisch und rein $(2n-2)$-dimensional.

Es sei $E_\nu = \{\mathfrak{z} \,|\, z_\nu = 0\}$. Da $\bigcap_{\nu=0}^{m} \tau^{-1}(E_\nu) \cap W$ leer ist, gibt es eine Nummer ν, so daß $\tau^{-1}(E_\nu) \cap W$ nicht die Dimension $2n$ hat. Also ist $S = \overline{\tau^{-1}(E_\nu)} \cap W$

[3]) Man vgl. STOLL [18] Satz 2.

eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus W oder leer. Auf $W \cap A - S$ gibt es analytische Funktionen $f_\mu(P)$, so daß

$$\tau(P) = \big(f_0(P) : \ldots : f_{\nu-1}(P) : 1 : f_{\nu+1}(P) : \ldots : f_m(P)\big) \tag{4.12}$$

für $P \in W \cap A - S$ gilt. Für jeden Punkt $P_0 \in W \cap A$ ist $f_\mu(P) = \frac{g_\mu(P, P_0)}{g_\nu(P, P_0)}$ in $V(P, P_0) \cap W$, wie aus c) folgt. Also sind die Funktionen $f_\mu(P)$ in jedem Punkt von $A \cap W$ meromorph. Ist die Funktion $f_\mu(P)$ in einem Punkt von $M \cap W$ wesentlich singulär, so ist eine ihrer Niveauflächen $f_\mu(P) = a$ mit $a \neq \infty$ in einem Punkt von $M \cap W$ wesentlich singulär. Setzt man $E = \{(z_0 : \ldots : z_m) \mid z_\mu - a\, z_\nu = 0\}$, so ist die analytische Menge $S^* = \tau^{-1}(E) \cap W = \{(P \mid f_\mu(P) = a\} \cap W$ in einem Punkt von $M \cap W$ wesentlich singulär, was nach dem Vorhergehenden falsch ist. Die Funktionen $f_0(P), \ldots, f_{\nu-1}(P), f_{\nu+1}(P), \ldots, f_m(P)$ sind in W meromorph. Die Bedingung $\mathfrak{B}^*$, also auch $\mathfrak{B}$, ist erfüllt.

f) *Die Bedingung $\mathfrak{B}$ sei erfüllt.* Eine komplexe Kurve L aus G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ sei gegeben. Zu P_0 werden die Umgebung W und die Funktionen $g_0, \ldots, g_m$ der Bedingung $\mathfrak{B}$ bestimmt. Dabei werde W so klein gewählt, daß es eine Parameterdarstellung $\beta(u)$ von $L \cap W$ gibt, die ein den Nullpunkt enthaltendes Gebiet B der u-Ebene konform auf $L \cap W$ abbildet, wobei $\beta(0) = P_0$ sei. Die Funktionen $g_\mu\big(\beta(u)\big)$ sind in B analytisch und nicht alle identisch Null. Daher gibt es eine Zahl $s \geqq 0$ und eine Nummer ν, so daß die Funktionen $u^{-s} g_\mu\big(\beta(u)\big) = h_\mu(u)$ in B analytisch sind und $h_\nu(0) \neq 0$ ist. Es strebt $\tau\,\beta(u) = \big(h_0(u) : \ldots : h_m(u)\big) \to \big(h_0(0) : \ldots : h_m(0)\big)$ aus H für $u \to 0$. Die Abbildung τ ist in P_0 meromorph, w. z. b. w.

Eine meromorphe Abbildung in die Zahlenebene ist auch eine meromorphe Abbildung in die Zahlenkugel und daher gemäß Satz 4.1 eine meromorphe Funktion. Umgekehrt gibt eine meromorphe Funktion eine meromorphe Abbildung in die Zahlenebene. Ein Pol der Abbildung ist auch ein Pol der Funktion. Eine Unbestimmtheitsstelle der Abbildung ist eine Unbestimmtheitsstelle der Funktion.

Ein analoger Satz gilt nicht mehr bei Abbildungen in einen Koordinatenraum H, wie das Gegenbeispiel

$$G = \{(x : y : z) \mid |x| + |y| + |z| > 0\}, \tag{4.13}$$

$$A = \{(x : y : z) \mid y \neq 0\}, \tag{4.14}$$

$$M = G - A, \tag{4.15}$$

$$H = \{(\xi, \eta) \mid |\xi| < \infty, \quad |\eta| < \infty\}, \tag{4.16}$$

$$\tau(x : y : z) = \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} e^{\frac{z}{y}}, \frac{z}{y}\right) \tag{4.17}$$

zeigt. Die Abbildung τ von A auf H ist sogar pseudokonform. Es scheint daher in Definition 4.1 zweckmäßiger zu sein von der Abbildung τ bestimmtes Verhalten längs jeder komplexen Kurve L zu verlangen. Dies würde den Geltungsbereich der aufzustellenden Sätze nicht einschränken, aber begrifflich ungünstiger sein. Daher möge es bei der Definition 4.1 bleiben.

Definition 4.2. Meromorphe Modifikationen.

Die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *heiße meromorph, wenn die Abbildung* τ *in* G *meromorph ist. Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *heiße beiderseits meromorph, wenn* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}^{-1}$ *meromorph sind.*

Satz 4.2. Meromorphe Modifikationen der Dimension 4.

Eine meromorphe Modifikation $\underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *ist beiderseits meromorph.*

Beweis. In H sei eine komplexe Kurve L gegeben, die N nur in einem Punkt Q_0 trifft und für die $L \cap M = \overline{L} \cap M$ gilt. Dann ist zu beweisen, daß die Streumenge $\Sigma(Q_0, L)$ höchstens aus einem Punkt besteht.

Dazu werde zunächst $\overline{L}$ kompakt vorausgesetzt. Da $\overline{L} - L = R$ kompakt ist, ist auch $v(\overline{L} - L) = \tilde{R}$ kompakt. Durch $W = H - R$ wird eine offene Umgebung von N und durch $\widetilde{W} = G - \tilde{R}$ eine von M gegeben, wobei $v(W \cap B) = \widetilde{W} \cap A$ ist. Da $L \cap B$ in W analytisch ist, erhält man in $\widetilde{W} \cap A$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge $L^* = v(L \cap B)$, die zugleich eine komplexe Kurve ist.

Angenommen L^* ist in einem Punkt von M singulär, dann ist L^* auch in einem gewöhnlichen Punkt P_0 einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge singulär, in der M liegt. Man kann also eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ so wählen, daß gilt:

1. Der Polyzylinder $U'_\alpha = \{\mathfrak{z} \,|\, |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ wird durch α pseudokonform auf $U_\alpha \subseteq G$ abgebildet.

2. Es ist $P_0 = \alpha(0) \in U_\alpha \subseteq \widetilde{W}$.

3. Es ist $M' = \alpha^{-1}(M \cap U_\alpha) \subseteq \{\mathfrak{z} \,|\, z_2 = 0, |z_1| < 1\} = M'_1$.

4. Die in $U'_\alpha - M'$ analytische Menge $L' = \alpha^{-1}(L^* \cap U_\alpha)$ ist im Nullpunkt singulär.

Nach einem Satz von THULLEN [19] ist L' in M'_1 singulär. Da L^* innerhalb $\widetilde{W}$ nur in M singulär wird, gilt:

5. Es ist $M'_1 = M'$ und L' in M' singulär.

Die Menge der Punkte a_1 des Kreises $|a_1| < 1$, für die $L' \cap \{(a_1, z_2) \,|\, |z_2| \leq \frac{1}{2}\}$ aus endlich vielen Punkten besteht, hat das harmonische Maß Null[4]). Außerdem enthält L' höchstens abzählbar viele Kreise $\{(a_1, z_2) \,|\, |z_2| < 1\}$. Daher gibt es einen Kreis $E' = \{(a_1, z_2) \,|\, |z_2| < \frac{1}{2}\} \not\subset L'$ mit $|a_1| < 1$, so daß $E' \cap L'$ aus abzählbar vielen Punkten besteht, die sich nur in $(a_1, 0)$ häufen. In G ist $E = \alpha(E')$ eine komplexe Kurve, die M nur im Punkt $P_1 = \alpha(a_1, 0)$ trifft, und für die $M \cap E = M \cap \overline{E}$ gilt. Es ist $\overline{E}$ kompakt. In W liegt $\overline{E}$, aber $E \cap A$ ist nicht in L^* enthalten. Eine Punktfolge $P^\nu \in L^* \cap E$ strebt gegen $P_1 \in M$ für $\nu \to \infty$. Es ist $P^\nu \in A$ und $\tau(P^\nu) = Q^\nu \in L \cap B$. Da $\overline{L}$ kompakt ist, gibt es eine gleichbezeichnete konvergente Teilfolge $Q^\nu \to Q_1$ für $\nu \to \infty$. Es ist $Q_1 \in \Sigma(P_1, E) \subseteq N$ und $Q_1 \in \overline{L}$. Daher ist $Q_1 = Q_0$ und die Abbildung τ ver-

[4]) Man vgl. ROTHSTEIN [15] Satz 7, S. 226.

hält sich längs E in P_0 bestimmt. Nach dem Zusatz zu Satz 3.6 ist $E^* = \tau(E \cap A) \cup \{Q_0\} = \tau(E, E)$ eine komplexe Kurve aus H. Es besteht $E^* \cap L \cap B$ aus abzählbar vielen Punkten, die sich in Q_0 häufen. Das ist aber für zwei komplexe Kurven L, E^* mit $Q_0 \in L \cap E^*$ unmöglich. Die analytische Menge $L^* = v(L \cap B)$ ist in allen Punkten von M, also auch von $\widetilde{W}$ regulär. Daher ist $\overline{L}^* \cap \widetilde{W} = \widetilde{L}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\widetilde{W}$, und zwar die Fortsetzung von L^* in $\widetilde{W}$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Streumenge $\Sigma_v(Q_0, L)$ ist leer. Dann streut v längs L in Q_0 nicht.

2. Fall: Die Streumenge $\Sigma_v(Q_0, L)$ enthält einen Punkt R. Dann wird behauptet, daß R der einzige Punkt von $\Sigma_v(Q_0, L)$ ist. Man kann nämlich eine gegen $Q_0 \in N$ konvergierende Folge Q^ν aus $L \cap B$ finden, so daß $P^\nu = v(Q^\nu) \to R$ für $\nu \to \infty$ strebt. Wegen $P^\nu \in v(L \cap B) = L^*$ gehört R zu $\overline{L}^* \cap M = \widetilde{L} \cap M$. Da $\widetilde{L}$ in $\widetilde{W}$ analytisch und rein 2-dimensional ist, gibt es durch $R \in M$ eine komplexe Kurve C mit $C \cap M = \overline{C} \cap M$, für die $\overline{C}$ kompakt und in $\widetilde{L}$ enthalten ist. Es gilt

$$\tau(C \cap A) \subsetneqq \tau(\widetilde{L} \cap A) = \tau(L^* \cap A) = \tau\, v(L \cap B) = L \cap B \subsetneqq \overline{L}. \tag{4.18}$$

Weil $\overline{L}$ kompakt ist, enthält $\Sigma_\tau(R, C)$ wenigstens ein Element, und weil die Modifikation $\mathfrak{M}$ meromorph ist, auch nur eines. Es ist

$$\Sigma_\tau(R, C) \subsetneqq N \cap \overline{\tau(C \cap A)} \subsetneqq N \cap \overline{L} = \{Q_0\}. \tag{4.19}$$

Also besteht $\Sigma_\tau(R, C)$ aus dem einzigen Punkt Q_0. Nach dem Zusatz zu Satz 3.6 wird C durch $\tau(P, C)$ konform auf eine komplexe Kurve

$$C^* = \tau(C, C) = \tau(C \cap A) \cup \{Q_0\} \subsetneqq \overline{L} \tag{4.20}$$

abgebildet, wobei $Q_0 = \tau(R, C)$ ist. Auf der komplexen Kurve L bildet C^* eine Umgebung von Q_0. Ist also $R_1 \in \Sigma_v(Q_0, L)$, so konvergiert eine Folge $\widetilde{Q}^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$ mit $\widetilde{Q}^\nu \in L \cap B$, wobei $v(\widetilde{Q}^\nu) \to R_1$ für $\nu \to \infty$ strebt. Es ist $\widetilde{Q}^\nu \in C^*$ für $\nu \geq \nu_0$, also gilt

$$R_1 = \lim_{\nu \to \infty} v(\widetilde{Q}^\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \tau^{-1}(\widetilde{Q}^\nu, C) = \tau^{-1}(Q_0, C) = R. \tag{4.21}$$

Die Streumenge $\Sigma_v(Q_0, L)$ besteht aus einem einzigen Punkt.

Ist nun die bei Beginn des Beweises gegebene komplexe Kurve L nicht kompakt, so gibt es eine offene Umgebung V von Q_0, für die $\overline{V}$ kompakt und $V \cap L = V \cap \overline{L}$ ist. Die komplexe Kurve $V \cap L$ streut nach dem bisherigen Beweis in Q_0 nicht, es ist $M \cap \overline{V \cap L} = M \cap V \cap L$ und $\Sigma_v(Q_0, V \cap L) = \Sigma_v(Q_0, L)$; daher streut auch L in Q_0 nicht, w. z. b. w.

Beim Beweis des Satzes wurde wesentlich benutzt, daß $n = 2$ ist. Vermutlich dürfte der Satz auch für $n > 2$ richtig sein.

Satz 4.2 wird ungültig, wenn man in Definition 4.1 von τ bestimmtes Verhalten längs L in P_1 fordern würde; die Gültigkeit von Satz 4.2 ist einer

der Gründe, weshalb nur verlangt wurde, daß τ längs L nicht in P_1 streut und nicht sogar sich bestimmt verhalten müsse.

Die meromorphen und offenen Modifikationen sind im Falle $n=2$ gerade die offenen Modifikationen, bei denen analytische Mengen in analytische Mengen übergehen.

Satz 4.3. Analytische Mengen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei offen.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *meromorph, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Wenn U *eine offene Umgebung von* M *und* $L\subsetneqq U$ *eine in* U *analytische Menge mit* $\dim L\leq 2$ *ist, so verhält sich die in* $\tau(U\cap A)$ *analytische Menge* $\tilde{L}=\tau(L\cap U)$ *in jedem Punkt von* N *regulär.*

Beweis. a) Die offene Modifikation $\mathfrak{M}$ sei meromorph. In der offenen Umgebung U von M sei eine analytische Menge L mit $\dim L\leq 2$ gegeben. Dann ist $V=\tau(A\cap U)\cup N$ offen und $\tilde{L}=\tau(L\cap U)$ in $V\cap B$ analytisch mit $\dim\tilde{L}\leq 2$. Falls vorhanden sei $\tilde{L}_2$ der rein 2-dimensionale Bestandteil von $\tilde{L}$. Angenommen $\tilde{L}_2$ ist in einem Punkt $Q_0\in N$ singulär. Dann gibt es eine offene Umgebung $V_1\subsetneqq V$ von Q_0 und eine in V_1 analytische Menge $N^*\supseteqq V_1\cap N$ mit $\dim N^*\leq 2$. Da $\tilde{L}_2$ in $Q_0\in N^*$ singulär ist, gibt es einen gewöhnlichen Punkt $Q_1\in N^*$, in dem $\tilde{L}_2$ singulär ist. Dann ist $\dim_{Q_1}N^*=2$. Man kann einen Polyzylinder $Z=\{\mathfrak{z}\,|\,|z_\nu|<1\}$ bestimmen, der durch eine pseudokonforme Abbildung $\alpha(\mathfrak{z})$ so auf eine Umgebung $V_2\subsetneqq V_1$ abgebildet wird, daß $\alpha(0)=Q_1$ und

$$N^*\cap V_2=\{Q\,|\,(z_1,0)=\alpha^{-1}(Q)\quad mit\quad |z_1|<1\} \tag{4.22}$$

ist. Da $\tilde{L}_2$ in jedem Punkt von $N^*\cap V_2$ singulär wird, ist $N^*\cap V_2=N\cap V_2$ und es gibt eine Zahl a_1 mit $|a_1|<1$, so daß

$$C=\{Q\,|\,\alpha^{-1}(Q)=(a_1,z_2)\quad mit\quad |z_2|<\tfrac{1}{2}\} \tag{4.23}$$

mit $\tilde{L}_2$ eine Punktfolge $Q^\nu\in\tilde{L}_2\cap C\subsetneqq B$ gemeinsam hat, die gegen $Q_2=\alpha(a_1,0)\in N$ strebt, daß aber $C\cap B$ nicht in $\tilde{L}_2$ enthalten ist[4]). Weil $\mathfrak{M}$ offen ist, strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $\tau(Q^\nu)=P^\nu\to P_2\in M$. Da mit $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph ist, da P_2 zu $\Sigma_v(Q_2, C)$ gehört, da $C\cap N=\overline{C}\cap N=\{Q_2\}$ ist und weil C eine komplexe Kurve aus H mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{C}$ ist, wird durch $v(Q, C)$ die komplexe Kurve C konform auf die komplexe Kurve $\tilde{C}=v(C, C)$ abgebildet, wobei $\tilde{C}\cap M=\overline{\tilde{C}}\cap M=\{P_2\}$ und $P_2=v(Q_2, C)$ ist. Wegen $C\subsetneqq V$ ist

$$\tilde{C}=v(C,C)=v(C\cap B)\cup\{P_2\}\subsetneqq v(V\cap B)\cup M=U. \tag{4.24}$$

Es ist $P^\nu\in A\cap\tilde{C}\cap L_2$, wenn L_2 der 2-dimensionale Bestandteil von L ist. Es strebt $P^\nu\to P_2\in L_2\cap M\cap\tilde{C}$ für $\nu\to\infty$. Also ist die zusammenhängende

komplexe Teilmannigfaltigkeit $\tilde{C}$ von U in L_2 enthalten; denn L_2 ist in P_2 regulär. Man erhält

$$C \cap B = \tau(\tilde{C} \cap A) \subsetneqq \tau(L_2 \cap A) = \tilde{L}_2 \tag{4.25}$$

entgegen der Konstruktion von C. In jedem Punkt von N ist $\tilde{L}_2$ regulär.

Falls vorhanden sei $\tilde{L}_0$ der 0-dimensionale Bestandteil von $\tilde{L}$. Angenommen $\tilde{L}_0$ ist in einem Punkt $Q_0 \in N$ singulär. Dann gibt es eine Folge $Q^\nu \in \tilde{L}_0 \subsetneqq B$, die gegen Q_0 strebt. Da die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen ist, strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $P^\nu = v(Q^\nu) \to P_0 \in M$ für $\nu \to \infty$, wobei $0 = \dim_{Q^\nu} \tilde{L}_0 = \dim_{P^\nu} L$ ist. Also ist L in P_0 singulär, was falsch ist.

Da $\tilde{L}_0$ und $\tilde{L}_2$, falls vorhanden, in N regulär sind, ist auch $\tilde{L}$ in N regulär.

b) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei offen und die in der Behauptung genannte Bedingung sei erfüllt.

Eine komplexe Kurve $L \subset G$ mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ sei gegeben. Ist $\Sigma_\tau(P_0, L)$ leer, so streut τ längs L in P_0 nicht. Nun sei $\Sigma_\tau(P_0, L) \neq \emptyset$. Weil es zu jedem Punkt von L eine Umgebung W mit $W \cap L = W \cap \overline{L}$ gibt, ist $U = G - (\overline{L} - L) = (G - \overline{L}) \cup L$ offen und L eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus U. Es ist

$$M \cap U = M \cap [G - (\overline{L} - L)] = M - (M \cap \overline{L} - M \cap L) = M. \tag{4.26}$$

Also ist M in U enthalten. Weil die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen ist, wird durch $V = \tau(U \cap A) \cup N$ eine offene Umgebung von N gegeben. Nach Voraussetzung ist die in $\tau(U \cap A)$ analytische Menge $\tau(L \cap A)$ in V regulär. Also ist $V \cap \overline{\tau(L \cap A)}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V, die $\tau(L \cap A)$ umfaßt. Nach Satz 3.5 verhält sich die Abbildung τ längs L in P_0 bestimmt. Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist meromorph, w. z. b. w.

Eine meromorphe, nichtoffene Modifikation braucht eine analytische Menge nicht in eine analytische Menge überführen. Beispielsweise seien

$$G = \{(z_1, z_2) \,|\, |z_1| < \infty, \quad 0 < |z_2| < \infty\},$$

$$A = G, \quad M = G - A = \emptyset,$$

$$H = \{(w_1, w_2) \,|\, |w_1| < \infty, \quad |w_2| < \infty\},$$

$$B = \{(w_1, w_2) \,|\, |w_1| < \infty, \quad 0 < |w_2| < \infty\},$$

$$N = H - B,$$

$$\tau(z_1, z_2) = (z_1 + e^{1/z_2}, z_2),$$

$$v(w_1, w_2) = (w_1 - e^{1/w_2}, w_2),$$

$$L = \{(z_1, z_2) \,|\, z_1 = 0\} \cap G,$$

$$\tilde{L} = \{(w_1, w_2) \,|\, w_1 = e^{1/w_2}\} \cap B = \tau(L \cap A).$$

Die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ ist meromorph aber nicht offen. In G ist L analytisch und rein 2-dimensional, aber $\tilde{L} = \tau(L \cap A)$ ist in jedem Punkt von N singulär.

Ob Satz 4.3 bei höheren Dimensionen ($n > 2$) gilt, bleibt ungeklärt.

Satz 4.4. Meromorphe Funktionen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die inverse Modifikation* $\mathfrak{M}^{-1}$ *sei meromorph. In einer offenen Umgebung* U *von* M *sei die Funktion* f *meromorph.*

Behauptung. *Die in* $\tau(U \cap A)$ *meromorphe Funktion* $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ *läßt sich eindeutig und meromorph in die offene Umgebung* $V = \tau(U \cap A) \cup N$ *von* N *fortsetzen.*

Beweis. Für jede komplexe Zahl a und für $a = \infty$ sind die Niveauflächen $L_a = \{P \mid f(P) = a\} \cap U$ in U und $\tilde{L}_a = \tau(L_a \cap A)$ in $V \cap B = \tau(A \cap U)$ analytisch Angenommen $\tilde{L}_a$ ist in einem Punkt von N singulär. Dann gibt es eine Umgebung $V_0 \subsetneqq V$ dieses Punktes, darin eine analytische Menge $N^* \supsetneqq V_0 \cap N$ und in N^* einen gewöhnlichen Punkt Q_0 in dem $\tilde{L}_a$ singulär wird. Man kann eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$ so wählen, daß gilt:

1. Der Polyzylinder $U'_\alpha = \{\mathfrak{z} \mid |z_\nu| < 1\}$ wird durch α pseudokonform auf $U_\alpha \subsetneqq V$ abgebildet, wobei $\alpha(0) = Q_0 \in U_\alpha$ ist.

2. Es ist

$$N' = \alpha^{-1}(N \cap U_\alpha) \subsetneqq \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\} \cap U'_\alpha = \alpha^{-1}(N^* \cap U_\alpha).$$

3. Die in $U'_\alpha - N'$ analytische Menge $\tilde{L}'_a = \alpha^{-1}(\tilde{L}_a \cap U_\alpha)$ ist im Nullpunkt singulär und hat die Dimension $2n - 2$.

Nach THULLEN [19] ist L' in $\alpha^{-1}(N^* \cap U_\alpha)$ singulär, weshalb $N' = \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\} \cap U'_\alpha$ ist. Die Menge der Punkte $\mathfrak{b}$ des Polyzylinders $\{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ mit $|b_\nu| < 1\}$, für die der Durchschnitt von $\tilde{L}'_a$ mit $E'_\mathfrak{b} = \{(\mathfrak{b}, z_n) \mid |z_n| < \frac{1}{2}\}$ höchstens aus endlich vielen Punkten besteht, hat das Maß Null[3]). Ebenso ist die Menge der $\mathfrak{b}$ mit $\tilde{L}'_a \supset E'_\mathfrak{b}$ eine Nullmenge. Daher gibt es einen Punkt $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ mit $|b_\nu| < 1$, so daß $\tilde{L}'_a \cap E'_\mathfrak{b}$ aus abzählbar vielen Punkten $\mathfrak{z}_\nu$ besteht: Es strebt $\mathfrak{z}_\nu \to (\mathfrak{b}, 0) = \mathfrak{c}$ für $\nu \to \infty$. Die komplexe Kurve $E_\mathfrak{b} = \alpha(E'_\mathfrak{b})$ trifft N in dem einzigen Punkt $Q_1 = \alpha(\mathfrak{c})$, es ist $E_\mathfrak{b} \cap N = \bar{E}_\mathfrak{b} \cap N$ und $\bar{E}_\mathfrak{b}$ kompakt. Da $\mathfrak{M}$ offen und $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph ist, verhält sich die Abbildung v längs $E_\mathfrak{b}$ in Q_1 bestimmt. Durch $v(Q, E_\mathfrak{b})$ wird $E_\mathfrak{b}$ nach dem Zusatz von Satz 3.6 konform auf die komplexe Kurve $E^*_\mathfrak{b} = v(E_\mathfrak{b}, E_\mathfrak{b})$ abgebildet, wobei Q_1 in $P_1 = v(Q_1, E_\mathfrak{b})$ übergeht. Die Punkte $v\alpha(\mathfrak{z}_\nu) = P_\nu$ häufen sich in P_1 und nur in P_1. Es ist $\{P \mid P = P_\nu\} = L_a \cap A \cap E_\mathfrak{b}$. Da $E_\mathfrak{b}$ eine komplexe Kurve aus U, die P_1 enthält, und L_a in U analytisch ist, ergibt sich ein Widerspruch. Also ist $\tilde{L}_a$ in keinem Punkt von N singulär. Nach THULLEN [19] ist die in $\tau(U \cap A) = V \cap B$ meromorphe Funktion $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ deren Niveauflächen gerade die

analytischen Mengen $\tilde{L}_a$ sind, in jedem Punkt von U nicht wesentlich singulär, läßt sich also meromorph und eindeutig in $V=\tau(U\cap A)\cup N$ fortsetzen, w. z. b. w.

Im Falle $n=2$ ist eine meromorphe Modifikation beiderseits meromorph. Also ergibt sich:

Satz 4.5. Meromorphe Funktionen.

Voraussetzung. *Die offene Modifikation* $\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ *sei meromorph. In einer offenen Umgebung* U *von* M *sei die Funktion* f *meromorph.*

Behauptung. *Die in* $\tau(U\cap A)$ *meromorphe Funktion* $g(Q)=f\big(v(Q)\big)$ *läßt sich eindeutig und meromorph in die offene Umgebung* $V=\tau(U\cap A)\cup N$ *von* N *fortsetzen.*

§ 5. Analytische Modifikationen.

Ein wichtiger Spezialfall der meromorphen Modifikationen sind die analytischen Modifikationen:

Definition 5.1. Analytische Modifikationen.

Die Modifikation $\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ *heiße analytisch, wenn sich* v *in jedem Punkt von* N *regulär verhält, oder, was dasselbe ist, wenn sich* v *aus* B *in* H *analytisch fortsetzen läßt.*

Die Abbildung v verhält sich bei einer analytischen Modifikation bestimmt. Die Fortsetzung von v in H ist eindeutig bestimmt und wird durch $v(Q,H)$ gegeben.

Satz 5.1. *Eine analytische Modifikation ist offen.*

Beweis. Die Modifikation $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ sei analytisch. Ist $Q_\nu\in B$ und strebt $Q_\nu\to Q\in N$ für $\nu\to\infty$, so strebt $v(Q_\nu)\to v(Q,H)\in M$ für $\nu\to\infty$. Nach Satz 2.3 ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen, w. z. b. w.

Aus Satz 2.9 folgt unmittelbar:

Satz 5.2. *Die offene Modifikation* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ *ist dann und nur dann analytisch, wenn die Abbildung* v *(längs* H*) in* N *nicht streut.*

Satz 5.3. *Eine analytische Modifikation ist beiderseits meromorph.*

Beweis. Die Modifikation $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ sei analytisch. Da die Abbildung v sich in N längs H bestimmt verhält, verhält sie sich auch längs jeder komplexen Kurve L aus H bestimmt. Die inverse Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ ist meromorph.

Eine komplexe Kurve L aus G mit $L\cap M=\overline{L}\cap M=\{P_0\}$ sei gegeben. Wie im Beweis von Satz 3.5 bestimmt man eine offene Menge $U\supset M$, so daß $U\cap L$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus U ist. Die offene Menge $V=\tau(U\cap A)\cup N$ wird durch $v(Q,H)$ analytisch in U abgebildet. Daher ist

$L^* = v^{-1}(L \cap U, H)$ analytisch. Es ist $L^* \cap B = \tau(L \cap A \cap U)$ und $\dim_Q L^* = 2$ für $Q \in B \cap L^*$. Die Vereinigung der 2-dimensionalen irreduzilen Teile von L^* ist in V analytisch und rein 2-dimensional. Sie umfaßt $\tau(A \cap U \cap L)$. Nach Satz 3.5 besteht $\Sigma_\tau(P_0, L)$ aus höchstens einem Punkt. Neben $\mathfrak{M}^{-1}$ ist auch $\mathfrak{M}$ meromorph, also ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ beiderseits meromorph, w. z. b. w.

Dieser Satz wird ungültig, wenn man in Definition 4.1 verlangt, daß sich die Abbildung τ längs L (in P_0) bestimmt verhält. Das spricht wiederum für die dort gegebene Definition. Unmittelbar leuchtet ein:

Satz 5.4. Analytische Mengen bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei analytisch. In* G *liege die analytische Menge* L.

Behauptung. *In* H *ist* $\tilde{L} = v^{-1}(L, H)$ *analytisch.*

Satz 5.5. Lücken bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei analytisch.*

Behauptung. *Der Punkt* $P_0 \in M$ *ist dann und nur dann eine Lücke, d.h. ein Pol von* τ, *wenn* $P_0 \notin v(N, H) = M \cap v(H, H)$ *ist.*

Beweis. Nach Definition 1.2 ist $v(H, H) \cap M = v(N, H)$. Ist $P_0 \in v(N, H)$, so gibt es einen Punkt $Q_0 \in N$ mit $P_0 = v(Q_0, H)$ und eine Folge $Q^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$ mit $Q^\nu \in B$. Es strebt $P_\nu = v(Q^\nu) \to v(Q_0, H) = P_0$ für $\nu \to \infty$. Daher gehört der Punkt Q_0 zur Streumenge $\Sigma_\tau(P_0)$. Es ist P_0 kein Pol von τ.

Ist $\Sigma_\tau(P_0)$ nicht leer, so gibt es nach (1.16) einen Punkt $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$ mit $P_0 \in \Sigma_v(Q_0, H)$. Daher ist $P_0 = v(Q_0, H) \in v(H, H) = M$, w. z. b. w.

Aus Satz 5.4 folgt:

Satz 5.6. Verhalten komplexer Kurven.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei offen. In* G *liege die komplexe Kurve* L, *für die* $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ *gelte. In einem Punkt* $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L)$ *streue die Abbildung* v *nicht.*

Behauptung. *Die Abbildung* τ *verhält sich längs* L *in* P_0 *bestimmt.*

Beweis. Nach Satz 2.9 ist v in einer offenen Umgebung V von Q_0 regulär. Es wird $V \cup B$ durch $v(Q, H)$ analytisch in G abgebildet. Daher ist die Modifikation $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{V \cup B, B, N \cap V, v}$ analytisch. Die Abbildung τ ist als Abbildung in $V \cap B$ meromorph und werde als solche mit τ_1 bezeichnet. Da $Q_0 \in \Sigma(P_0, L) \cap V$ ist, verhält sich die Abbildung τ_1 längs L in P_0 bestimmt. Nach Satz 3.6 ist $\tilde{L} = \tau_1(L, L)$ eine komplexe Kurve aus $V \cup B$, wobei $\overline{\tilde{L}} \cap V \cap N = \tilde{L} \cap V \cap N = \{Q_0\}$ mit $Q_0 = \tau_1(P_0, L)$ gilt. Ist $Q_1 \in \Sigma(P_0, L)$, so gibt es eine Folge $Q^\nu = \tau(P^\nu)$ mit $P^\nu \in L$, so daß $Q^\nu \to Q_1$ und $P^\nu \to P_0$ für $\nu \to \infty$ streben. Es ist $Q_1 = \lim_{\nu \to \infty} Q^\nu = \lim_{\nu \to \infty} \tau_1(P^\nu, L) = \tau_1(P_0, L) = Q_0$. Es verhält sich τ längs L in P_0 bestimmt, w. z. b. w.

Bei einer Modifikation $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}_n$ kann man vielleicht τ in einen Teil von M analytisch und in einen vielleicht etwas kleineren Teil pseudokonform fortsetzen. Entsprechendes ist vielleicht für die Abbildung v möglich. Vom gegenseitigen Verhältnis dieser Fortsetzungen handelt

Satz 5.7. Analytische und pseudokonforme Fortsetzung.

Voraussetzung. 1. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}_n$ *sei gegeben.*

2. *Der Punkt* $P \in G$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* A_0, *wenn die Abbildung* τ *in* P *regulär ist.*

3. *Der Punkt* $Q \in H$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* B_0, *wenn die Abbildung* v *in* Q *regulär ist.*

4. *Der Punkt* $P \in G$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* E, *wenn die Abbildung* τ *sich aus* A *in eine Umgebung von* P *pseudokonform fortsetzen läßt.*

5. *Der Punkt* $Q \in H$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* $\underline{E}$, *wenn sich die Abbildung* v *aus* B *in eine Umgebung von* Q *pseudokonform fortsetzen läßt.*

Behauptung. 1. *Die Mengen* $A_0, B_0, E, \underline{E}$ *sind offen. Es gilt*

$$A \subseteqq E \subseteqq A_0 \subseteqq G, \qquad B \subseteqq \underline{E} \subseteqq B_0 \subseteqq H. \tag{5.1}$$

2. *Die Abbildung* τ *läßt sich aus* A *analytisch in* A_0 *zur Abbildung* τ_0 *fortsetzen, und zwar auf nur eine Weise. In jedem Punkt von* $M_0 = G - A_0 = M - A_0$ *ist* τ_0 *singulär. Für* $P \in A_0$ *ist* $\tau_0(P) = \tau(P, G)$.

3. *Die Abbildung* v *läßt sich aus* B *analytisch in* B_0 *zur Abbildung* v_0 *fortsetzen, und zwar auf nur eine Weise. In jedem Punkt von* $N_0 = H - B_0 = N - B_0$ *ist* v_0 *singulär. Für* $Q \in B_0$ *ist* $v_0(Q) = v(Q, H)$.

4. *Die auf* E *beschränkte Abbildung* $\tau^* = \tau_0 | E$ *bildet* E *pseudokonform auf* $\underline{E}$ *ab und läßt sich in keinen Punkt von* $M^* = G - E = M - E$ *pseudokonform fortsetzen. Es ist* $\tau_0(A_0 - E) \cap B_0 = \emptyset$.

5. *Die auf* $\underline{E}$ *beschränkte Abbildung* $v^* = v_0 | \underline{E}$ *bildet* $\underline{E}$ *pseudokonform auf* E *ab und läßt sich in keinen Punkt von* $N^* = H - \underline{E} = N - \underline{E}$ *pseudokonform fortsetzen. Es ist* $v_0(B_0 - \underline{E}) \cap A_0 = \emptyset$.

6. *Es ist* $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}\binom{G, E, M^*, \tau^*}{H, \underline{E}, N^*, v^*}_n$ *eine Modifikation. Ist* $\mathfrak{M}$ *meromorph oder analytisch, so ist auch* $\mathfrak{M}^*$ *meromorph bzw. analytisch. Ist* $\mathfrak{M}$ *offen und hat* G *eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so ist auch* $\mathfrak{M}^*$ *offen.*

Beweis. Da sich in geeigneten Umgebungen M und N als Teilmengen analytischer Mengen mit Dimensionen kleiner als $2n$ auffassen lassen, sind die Behauptungen 1 bis 3 trivial, sind die lokal-pseudokonformen Abbildungen τ^* und v^* auf E bzw. $\underline{E}$ pseudokonform und lassen sich nicht über E bzw. $\underline{E}$ hinaus pseudokonform fortsetzen.

Auf $E^* = \tau^*(E)$ ist $\tau^{*-1}(Q)$ pseudokonform und setzt $v(Q)$ analytisch fort; also ist $v^*(Q) = \tau^{*-1}(Q)$ für $Q \in E^*$ und $E^* \subseteqq \underline{E}$. Ebenso gilt $v^{*-1}(P) = \tau^*(P)$

für $P \in \underline{E}^* = v^*(\underline{E})$ und $\underline{E}^* \subsetneqq E$. Es ist

$$E^* = \tau^*(E) \supseteq \tau^*(\underline{E}^*) = v^{*-1}(\underline{E}^*) = \underline{E} \supseteq E^* \tag{5.2}$$

also $E^* = \underline{E}$; ebenso folgt $\underline{E}^* = E$.

Da τ_0 auf A_0 analytisch ist, da v_0 auf B_0 analytisch ist, da $v_0\tau_0(P) = v\,\tau(P) = P$ für $P \in A$ gilt, und da $M = G - A$ keinen inneren Punkt enthält, ist $v_0\tau_0(P) = P$ für $P \in A_0 \cap \tau_0^{-1}(B_0)$. Auf $A_0 \cap \tau_0^{-1}(B_0)$ hat daher $v_0\tau_0$ also auch τ_0 den Rang n; also ist $A_0 \cap \tau_0^{-1}(B_0) \subsetneqq E$. Es gilt

$$v_0\big(\tau_0(A_0 - E) \cap B_0\big) = (A_0 - E) \cap \tau_0^{-1}(B_0) = \emptyset\,. \tag{5.3}$$

Also ist $\tau_0(A_0 - E) \cap B_0$ leer. Ebenso zeigt man, daß $v_0(B_0 - \underline{E}) \cap A_0$ leer ist. Die Behauptungen 4 und 5 sind bewiesen.

Ist v auf M regulär, so ist auch v^* auf M^* regulär. Streut die Abbildung τ längs der Kurve L, für die $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ gilt, in P_0 nicht, und ist $P_0 \in M^*$, so streut auch die Abbildung τ^* längs L in P_0 nicht. Mit $\mathfrak{M}$ ist also auch $\mathfrak{M}^*$ analytisch bzw. meromorph.

Ist nun $\mathfrak{M}$ offen und hat G eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so trägt G eine Metrik $\varrho(P, Q)$. Ein Punkt $Q \in N^*$ und eine gegen Q strebende Folge $Q^\nu \in \underline{E}$ seien gegeben. Zu Q bestimmt man eine Umgebung V, die eine Metrik $\tilde{\varrho}(P, R)$ trägt. Für $\nu \geq \nu_0$ ist $Q^\nu \in V$. Man wählt zu jeder Nummer $\nu \geq \nu_0$ eine Folge $Q_\mu^\nu \in V \cap B$, die gegen Q^ν strebt. Es sei $P^\nu = v^*(Q^\nu)$ und $P_\mu^\nu = v(Q_\mu^\nu)$. Es strebt $P_\mu^\nu \to P^\nu$ für $\mu \to \infty$. Zu jeder Nummer ν kann man eine Nummer μ_ν bestimmen, so daß $\tilde{\varrho}(Q^\nu, Q_{\mu_\nu}^\nu) < \frac{1}{\nu}$ und $\varrho(P^\nu, P_{\mu_\nu}^\nu) < \frac{1}{\nu}$ ist. Es sei $Q_{\mu_\nu}^\nu = \tilde{Q}^\nu$ und $P_{\mu_\nu}^\nu = \tilde{P}^\nu$. Wegen

$$\tilde{\varrho}(Q_0, \tilde{Q}^\nu) \leq \tilde{\varrho}(Q_0, Q^\nu) + \tilde{\varrho}(\tilde{Q}^\nu, Q^\nu) \leq \tilde{\varrho}(Q_0, Q^\nu) + \frac{1}{\nu} \tag{5.4}$$

strebt $\tilde{Q}^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$. Da $\mathfrak{M}$ offen und $\tilde{Q}^\nu \in B$ ist, gibt es eine Teilfolge $\tilde{Q}^{\nu_\lambda}$, so daß $\tilde{P}^{\nu_\lambda} = v(\tilde{Q}^{\nu_\lambda}) \to P \in M$ für $\lambda \to \infty$ strebt. Wegen

$$\varrho(P, P^{\nu_\lambda}) \leq \varrho(P, \tilde{P}^{\nu_\lambda}) + \varrho(\tilde{P}^{\nu_\lambda}, P^{\nu_\lambda}) < \varrho(P, \tilde{P}^{\nu_\lambda}) + \frac{1}{\nu_\lambda} \tag{5.5}$$

strebt $P^{\nu_\lambda} \to P$ für $\lambda \to \infty$. Die Modifikation $\mathfrak{M}^*$ ist offen, w. z. b. w.

Dieser Satz gibt die Berechtigung zur folgenden Erklärung:

Definition 5.2. Änderungen durch eine Modifikation.

Bei der Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *mögen dieselben Bezeichnungen wie in Satz* 5.7 *verwandt werden. Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *ändere die komplexe Mannigfaltigkeit* G *im Punkt* $P_0 \in G$, *falls* P_0 *zu* M^* *gehört, bzw. ändere* G *in* P_0 *nicht, falls* $P_0 \in E$ *ist.*

Für die Erzeugung der Modifikationen durch σ-Prozesse sind natürlich nur die Stellen von Bedeutung, in denen die Modifikation etwas ändert. Im nächsten Paragraphen werden einige Kriterien dafür aufgestellt, daß sich in einem Punkt bei analytischen Modifikationen nichts ändert. Zuvor sollen jedoch noch einige andere Sätze bewiesen werden.

Satz 5.8. Die Menge N^* bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G, A, M, \tau\\ H, B, N, v\end{pmatrix}$ *sei offen. Im Punkt* Q_0 *sei die Abbildung* v *regulär und ändere die inverse Modifikation* $\mathfrak{M}^{-1}$ *die komplexe Mannigfaltigkeit* H. *Es sei* N^* *die Menge der Punkte aus* H, *in denen* $\mathfrak{M}^{-1}$ *die Mannigfaltigkeit* H *ändert.*

Behauptung. *In einer offenen Umgebung* V *von* Q_0 *ist* $N^*\cap V$ *eine rein* $(2n-2)$*-dimensionale analytische Menge und* v *regulär. Es ist*

$$Rg_{Q_1} v(Q,H)\begin{cases}=n & \text{für} \quad Q_1\in V-N^*,\\ <n & \text{für} \quad Q_1\in V\cap N^*.\end{cases} \tag{5.6}$$

Beweis. In einer offenen Umgebung V von Q_0 ist v auf $V\cap N$ regulär, also $v(Q,H)$ in V analytisch. Dann und nur dann gehört $Q_1\in V$ zu N^*, wenn $v(Q,H)$ in Q_1 nicht pseudokonform ist, d.h., wenn $Rg_{Q_1} v(Q,H)<n$ ist. Man kann V außerdem so klein wählen, daß $v(V,H)$ in einer Karte U_α von G liegt mit $\alpha\in\mathfrak{P}(G)$. Die Funktionen, die durch $\alpha^{-1}v(Q)=(f_1(Q),\dots,f_n(Q))$ mit $Q\in V$ definiert werden, sind in V analytisch. Es ist[5])

$$N^*\cap V=\{Q\,|\,\partial f_1(Q)\dots\partial f_n(Q)=0\} \tag{5.7}$$

eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge, w. z. b. w.

Bei analytischen Modifikationen ist N^* eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus H oder leer.

Satz 5.9. Zusammengesetzte Modifikationen.

Voraussetzung. 1. *Zwei Modifikationen*

$$\mathfrak{M}_\nu=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G_\nu, A_\nu, M_\nu, \tau_\nu\\ H_\nu, B_\nu, N_\nu, v_\nu\end{pmatrix}\qquad(\nu=1,2) \tag{5.8}$$

seien gegeben. Eine pseudokonforme Abbildung γ *bilde* H_1 *so auf* G_2 *ab, daß gilt*

$$\gamma(H_1)=G_2,\qquad \gamma(B_1)\subseteqq A_2,\qquad \gamma(N_1)\supseteqq M_2. \tag{5.9}$$

2. *Setzt man* $B_3=\tau_2\gamma(B_1)$ *und* $N_3=H_2-B_1$, *so gebe es eine offene Umgebung von* N_3 *und in ihr eine* N_3 *umfassende analytische Menge, deren Dimension höchstens* $2n-2$ *betrage.*

Behauptung. 1. *Es ist*

$$\mathfrak{M}_3=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G_1, A_1, M_1, & \tau_2\ \gamma & \tau_1\\ H_2, B_3, N_3, & v_1\ \gamma^{-1} & v_2\end{pmatrix} \tag{5.10}$$

eine Modifikation.

2. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *offen.*

3. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *beiderseits offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *beiderseits offen.*

4. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *meromorph und offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *offen und meromorph.*

5. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *meromorph und ist* $\mathfrak{M}_1$ *beiderseits offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *meromorph.*

6. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *analytisch, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *analytisch.*

[5]) $\partial f_1\dots\partial f_n$ ist ein alternierendes Differential.

Anmerkung. *Die Voraussetzung* 2 *ist unnötig, d.h. von selbst erfüllt, wenn eine der folgenden Aussagen gilt*:

1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_2$ *ist analytisch.*

2. *Es ist* $\gamma(N_1) = M_2$.

3. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_2$ *ist offen. Eine offene Umgebung* U *von* N_1 *und eine in* U *analytische Funktion* f, *die in keinem Teilgebiet von* U *identisch Null ist, existieren, so daß* $f(P) = 0$ *für* $P \in N_1$ *ist.*

4. *Es ist* $n = 2$. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}_2$ *ist meromorph und offen. In* H_2 *gibt es eine* N_2 *umfassende analytische Menge* N_2^*, *deren Dimension höchstens* 2 *ist.*

Beweis. 1. Durch $\tau_2 \gamma \tau_1$ wird A_1 pseudokonform auf die offene Menge $\tau_2 \gamma \tau_1(A) = \tau_2 \gamma(B_1) = B_3$ abgebildet. Nach Definition 1.1 ist $\mathfrak{M}_3$ eine Modifikation. Dabei ist

$$\begin{cases} N_3 = H_2 - B_3 = (B_2 - B_3) \cup (N_2 - B_3) \\ \qquad = \tau_2\big(A_2 - \gamma(B_1)\big) \cup N_2 \\ \qquad = \tau_2\big(A_2 \cap \gamma(N_1)\big) \cup N_2. \end{cases} \tag{5.11}$$

2. *Die Modifikationen* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *seien offen.* Ist U eine offene Umgebung von M_1, so ist $V_1 = \tau_1(U \cap A_1) \cup N_1$ offen. Wegen $M_2 \subseteqq \gamma(N_1)$ ist $V_2 = \gamma(V_1)$ eine offene Umgebung von M_2, also ist $V_3 = \tau_2(V_2 \cap A_2) \cup N_2$ offen, wobei

$$\begin{cases} V_3 = \tau_2\big(\gamma(\tau_1(U \cap A_1) \cup N_1) \cap A_2\big) \cup N_2 \\ \quad = \tau_2 \gamma \tau_1(U \cap A_1) \cup \tau_2\big(A_2 \cap \gamma(N_1)\big) \cup N_2 \\ \quad = \tau_2 \gamma \tau_1(U \cap A_1) \cup N_3 \end{cases} \tag{5.12}$$

ist. Also ist die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ offen.

3. *Die Modifikationen* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *seien beiderseits offen.* Gemäß 2 ist $\mathfrak{M}_3$ offen. Ist eine Folge $P^\nu \in A_1$ gegeben, die gegen einen Punkt $P_0 \in M_1$ strebt, so gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge, so daß $\tau_1(P^\nu) \to Q_0 \in N_1$ für $\nu \to \infty$ strebt, da $\mathfrak{M}_1^{-1}$ offen ist. Es strebt $\gamma \tau_1(P^\nu) \to R_0 = \gamma(Q_0)$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in A_2$, so strebt $\tau_2 \gamma \tau_1(P^\nu) \to \tau_2(R_0)$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in N_2$, so gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge, so daß $\tau_2 \gamma \tau_1(P^\nu) \to S_0 \in N_2$ für $\nu \to \infty$ strebt, da $\mathfrak{M}_2^{-1}$ offen ist. Die Modifikation $\mathfrak{M}_3^{-1}$ ist offen; also ist $\mathfrak{M}_3$ beiderseits offen.

4. *Die Modifikationen* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *seien offen und meromorph.* Dann ist $\mathfrak{M}_3$ offen. Eine komplexe Kurve $L \subsetneqq G_1$ mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ sei gegeben. Ist $\Sigma_{\tau_1 \gamma \tau_1}(P_0, L)$ leer, so streut die Abbildung $\tau_2 \gamma \tau_1$ längs L in P_0 nicht. Ist $Q_0 \in \Sigma_{\tau_1 \gamma \tau_1}(P_0, L)$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in L \cap A_1$, so daß $Q^\nu = \tau_2 \gamma \tau_1(P^\nu) \to Q_0$ und $P^\nu \to P_0$ für $\nu \to \infty$ streben. Da $\mathfrak{M}_2$ offen ist, strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge

$$\gamma \tau_1(P^\nu) \to R_0 \in \big(\gamma(N_1) \cap A_2\big) \cup M_2 = \gamma(N_1) \tag{5.13}$$

also

$$\tau_1(P^\nu) \to S_0 = \gamma^{-1}(R_0) \in N_1 \tag{5.14}$$

für $\nu \to \infty$. Also ist $S_0 \in \Sigma_{\tau_1}(P_0, L)$. Da die Modifikation $\mathfrak{M}_1$ meromorph ist, verhält sich die Abbildung τ_1 längs L in P_0 bestimmt. Gemäß Satz 3.6 wird

L durch $\tau_1(P, L)$ konform auf die komplexe Kurve $L_1 = \tau(L, L)$ abgebildet, für die $\overline{L}_1 \cap N_1 = L_1 \cap N_1 = \{S_0\}$ ist. In G_2 ist $\gamma(L_1) = L_2$ eine komplexe Kurve. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist $R_0 \in A_2$. Dann strebt $\tau_2 \gamma \tau_1(P) \to \tau_2(R_0) = Q_0$ für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A_1$. Die Abbildung $\tau_2 \gamma \tau_1$ verhält sich längs L in P_0 bestimmt.

b) Es ist $R_0 \in M_2$. Dann ist

$$R_0 \in L_2 \cap M_2 \subseteqq \gamma_2(L_1 \cap N_1) = \{\gamma(S_0)\} = \{R_0\}, \tag{5.15}$$

$$R_0 \in \overline{L}_2 \cap M_2 \subseteqq \gamma_2(\overline{L}_1 \cap N_1) = \{\gamma(S_0)\} = \{R_0\}. \tag{5.16}$$

Also ist $M_2 \cap \overline{L}_2 = M_2 \cap L_2 = \{R_0\}$. Da die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ meromorph ist, streut die Abbildung τ_2 längs $L_2 = \gamma \tau_1(L, L)$ in R_0 nicht. Daher streut auch die Abbildung $\tau_2 \gamma \tau_1$ längs L in P_0 nicht.

Insgesamt folgt, daß die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ meromorph ist.

5. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien meromorph und die Modifikation $\mathfrak{M}_1$ sei beiderseits offen.* Eine komplexe Kurve $L \subseteqq G_1$ mit $\overline{L} \cap M_1 = L \cap M_1 = \{P_0\}$ sei gegeben. Da $\mathfrak{M}_1^{-1}$ offen ist und die Abbildung τ_1 in P_0 längs L nicht streut, verhält sich τ_1 längs L in P_0 bestimmt. Wie in 4. folgt, daß die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ meromorph ist.

6. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien analytisch.* Durch $\vartheta_\nu(Q) = v_\nu(Q, H_\nu)$ wird v_ν auf H_ν analytisch fortgesetzt ($\nu = 1, 2$). Durch $\vartheta_1 \gamma \vartheta_2$ wird $v_1 \gamma v_2$ analytisch auf H_2 fortgesetzt, also ist die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ analytisch.

Beweis zu Anmerkung 1. *Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ sei analytisch.* Durch $\vartheta_2(Q) = v_2(Q, H_2)$ wird v_2 analytisch auf H_2 fortgesetzt. Es gibt eine offene Umgebung V_1 von N_1 in H_1, die eine in V_1 analytische Menge $N_1^* \supseteqq N_1$ enthält, deren Dimension höchstens $2n-2$ ist. In der offenen Umgebung $U_2 = \gamma(V_1)$ von $\gamma(N_1) \supseteqq M_2$ ist $M_2^* = \gamma(N_1^*)$ analytisch mit $\dim M_2^* \leq 2n-2$. In M_2^* ist M_2 enthalten. In $V_2 = \vartheta_2^{-1}(U_2)$ ist $N_2^* = \vartheta_2^{-1}(M_2^*)$ analytisch. Für $Q \in V_2 \cap B_2$ ist $\dim_Q N_2^* \leq 2n-2$, also enthält N_2^* keinen inneren Punkt. Es ist $\dim N_2^* \leq 2n-2$. Es gilt

$$\begin{cases} V_2 \supseteqq N_2^* = \vartheta_2^{-1}(M_2^*) = \tau_2(M_2^* \cap A_2) \cup \vartheta_2^{-1}(M_2) \\ \qquad\qquad = \tau_2\big(\gamma(N_1^*) \cap A_2\big) \cup N_2 \\ \qquad\qquad \supseteqq \tau_2\big(\gamma(N_1) \cap A_2\big) \cup N_2 = N_3. \end{cases} \tag{5.17}$$

Daher ist die Voraussetzung 2 von Satz 5.8 erfüllt, w. z. b. w.

Beweis zu Anmerkung 2. Ist $\gamma(N_1) = M_2$, so gilt

$$N_3 = \tau_2\big(\gamma(N_1) \cap A_2\big) \cup N_2 = \tau(M_2 \cap A_2) \cup N_2 = N_2. \tag{5.18}$$

Weil $\mathfrak{M}_2$ eine Modifikation ist, so ist Voraussetzung 2 von Satz 5.9 erfüllt, w. z. b. w.

Beweis zu Anmerkung 3. Unter den Voraussetzungen von Anmerkung 3 ist die Funktion $g(P) = f\big(\gamma^{-1}(P)\big)$ auf der offenen Umgebung $V = \gamma(U)$ von $\gamma(N_1) \supseteqq M_2$ analytisch, in keinem Teilgebiet von V identisch Null und

verschwindet auf $\gamma(N_1)$. Nach Satz 2.10 ist die Funktion $g(v_2(Q))$, die in der offenen Menge $\tau_2(V \cap A_2)$ analytisch ist, zu einer Funktion h in die offene Umgebung $W = \tau_2(V \cap A_2) \cup N_2$ von N_2 analytisch fortsetzbar. Für $Q \in \tau_2(A_2 \cap \gamma(N_1))$ ist $v_2(Q) \in \gamma(N_1)$ und $h(Q) = g(v_2(Q)) = 0$. Zu $Q \in N_2$ gibt es eine gegen Q konvergierende Folge $Q^\nu \in B_2 \cap W = \tau_2(V \cap A_2)$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $v_2(Q^\nu) \to P \in M_2 \subseteq \gamma(N_1)$ für $\nu \to \infty$, wobei $v_2(Q^\nu) \in V \cap A_2$ ist. Also gilt

$$h(Q) = \lim_{\nu \to \infty} h(Q^\nu) = \lim_{\nu \to \infty} g(v_2(Q^\nu)) = g(P) = 0. \tag{5.19}$$

Die in W analytische Menge $N_3^* = \{Q \mid h(Q) = 0\}$ enthält $N_2 \cup \tau_2(A \cap \gamma(N_1)) = N_3$, wobei $\dim N_3^* \leq 2n-2$ ist, w. z. b. w.

Beweis zu Anmerkung 4. *Es sei $n=2$. Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ sei offen und meromorph. In H_2 gebe es eine N_2 umfassende analytische Menge N_2^*, deren Dimension höchstens 2 ist.*

In einer offenen Umgebung V_1 von N_1 gibt es eine analytische Menge $N_1^* \supseteq N_1$ mit $\dim N_1^* \leq 2$. Es ist $M_2^* = \gamma(N_1^*)$ eine $\gamma(N_1)$ umfassende analytische Menge in der offenen Umgebung $U_2 = \gamma(V_1)$ von M_2, wobei $\dim M_2^* \leq 2$ ist. In $\tau_2(U_2 \cap A_2)$ ist $\tau_2(M_2^* \cap A_2)$ analytisch, hat höchstens die Dimension 2 und verhält sich nach Satz 4.3 in der offenen Menge $V_2 = \tau_2(U_2 \cap A_2) \cup N_2$ regulär. Also ist $L_2 = \overline{\tau_2(M_2^* \cap A_2)} \cup V_2$ eine analytische Menge aus V_2, deren Dimension höchstens 2 ist. In V_2 ist $L_2 \cup (N_2^* \cap V_2) = N_3^*$ analytisch mit $\dim N_3^* \leq 2$. Es ist

$$N_3^* = L_2 \cup (N_2^* \cap V_2) \supseteq \tau_2(M_2^* \cap A_2) \cup N_2 \supseteq \tau_2(\gamma(N_1) \cap A_2) \cup N_2 = N_3. \tag{5.20}$$

Die Voraussetzung 2 von Satz 5.9 ist erfüllt, w. z. b. w.

Satz 5.10. Identische Modifikationen.

Dann und nur dann ändern die Modifikationen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ die Mannigfaltigkeiten G und H nicht, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ analytisch sind.

Beweis. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ analytisch, so werden die Bezeichnungen von Satz 5.7 eingeführt. Es ist $B_0 = H$ und $G = A_0$. Es gilt

$$\tau_0(G - E) = \tau(A_0 - E) \cap B_0 = \emptyset. \tag{5.21}$$

Daher ist $G = E$ und ebenso $H = \underline{E}$. Die Umkehrung ist trivial, w. z. b. w.

§ 6. Identitätssätze.

In diesem Paragraphen sollen einige Kriterien dafür aufgestellt werden, daß die betrachtete Modifikation in einem gegebenen Punkt nichts ändert; solche Kriterien mögen Identitätssätze heißen.

Satz 6.1. Identitätssatz I.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei offen. Im Punkt $Q_0 \in N$ sei v regulär.*

2. *Durch den Punkt $P_0 \in M$ gehen n komplexe Kurven L_ν, für die $M \cap \overline{L}_\nu = M \cap L_\nu = \{P_0\}$ gelte.*

3. *Der Punkt P_0 sei ein gewöhnlicher Punkt von L_ν und die Tangentialvektoren an L_ν im Punkt P_0 seien linear unabhängig.*

4. *Es sei* $Q_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{n} \Sigma(P_0, L_\nu)$.

Behauptung. *Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ändert in P_0 die Mannigfaltigkeit G nicht.*

Beweis[6]). Gemäß Satz 5.6 und Satz 3.6 verhält sich τ in P_0 längs L_ν bestimmt und bildet $\tau(P, L_\nu)$ die Kurve L_ν konform auf die Kurve $\tilde{L}_\nu = \tau(L_\nu, L_\nu)$ ab, wobei $Q_0 = \tau(P, L_\nu)$ ein gewöhnlicher Punkt von $\tilde{L}_\nu$ ist. Es ist $\tilde{L}_\nu \cap N = \tilde{L}_\nu \cap N = \{Q_0\}$.

Es wird eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}(G)$ mit $P_0 \in U_\alpha$ gewählt. Außerdem gibt es eine ortsuniformisierende Abbildung $\beta(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}(H)$ mit $Q_0 \in V_\beta$ und $U'_\beta = \{\mathfrak{w} \,|\, |w_\nu| < 1\}$, wobei $\beta(0) = Q_0$ sei. Man kann β so wählen, daß V_β durch $v(Q, H)$ analytisch in U_α abgebildet wird und $\beta^{-1}(L_\nu \cap V_\beta)$ eine Parameterdarstellung $\mathfrak{w}_\nu(x)$ hat, wobei x ein Gebiet durchläuft, das den Nullpunkt enthält, und wobei $\mathfrak{w}_\nu(0) = 0$ ist. Durch $\mathfrak{z}(\mathfrak{w}) = \alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}), H)$ wird U'_β analytisch in U'_α abgebildet, durch $\mathfrak{z}(\mathfrak{w}_\nu(x))$ wird eine Umgebung des Nullpunktes der x-Ebene konform in die komplexe Kurve $\alpha^{-1}(L_\nu \cap U_\alpha)$ abgebildet, wobei $\mathfrak{z}(\mathfrak{w}_\nu(0)) = \alpha^{-1}(P_0)$ ist. Daher ist

$$\mathfrak{t}_\nu = \frac{d}{dx}\mathfrak{z}(\mathfrak{w}_\nu(x))\Big|_{x=0} = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}_{w_\mu}(0)\, w'_{\mu\nu}(0) \neq 0 \tag{6.1}$$

ein Tangentialvektor an $\alpha^{-1}(L_\nu \cap U_\alpha)$ in $\alpha^{-1}(P_0)$. Die Vektoren $\mathfrak{t}_\nu$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Also ist $\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(w_1, \ldots, w_n)}\Big|^{\mathfrak{w}=0} \neq 0$. Die Abbildung v hat in Q_0 den Rang n. In der Bezeichnungsweise von Satz 5.7 ist $Q_0 \in \underline{E}$, also $P_0 = v(Q_0, H) \in E$, w. z. b. w.

Zur Vorbereitung auf einen anderen Identitätssatz dient

Satz 6.2. Rang der Abbildung v.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die Abbildung v sei in allen Punkten einer offenen Umgebung V von $Q_0 \in N$ regulär. Es gebe eine offene Umgebung U von $P_0 = v(Q_0, H)$, die eine analytische Menge S der Dimension $2p$ enthält, wobei $S \supseteq v(V \cap N, H)$ ist. Es sei $0 \leq p < n$.*

3. *Mit $r(Q_1)$ werde der Rang der Abbildung $v(Q, H)$ in $Q_1 \in V$ bezeichnet.*

Behauptung. *Für jeden Punkt $Q_1 \in V$ ist entweder $r(Q_1) = n$ oder $0 \leq r(Q_1) \leq p + 1$, wobei „oder" von Q_1 abhängen kann.*

Beweis. Es sei $Q_1 \in N \cap V$ und $r(Q_1) < n$. In V liegt ein Gebiet V_1, das Q_1 enthält und für das $N_0 = \{Q \,|\, r(Q) < n\}$ eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus V_1 ist. Es liegt $N'_0 = v(N_0, H)$ in einer analytischen Menge S_1 aus U mit $\dim S_1 \leq 2p_1$, wobei $p_1 \leq p$ minimal gewählt sei. Die

[6]) Die Beweismethode stammt von H. Hopf. Man vgl. den Beweis des Lemmas in H. Hopf [9a] § 3, Nr. 1.

Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von S_1 ist analytisch und hat eine Dimension kleiner als $2p_1$, also ist N_0' nicht in ihr enthalten. Es gibt einen gewöhnlichen Punkt $P_2 \in N_0' \cap S_1$ von S_1 mit $\dim_{P_2} S_1 = p_1$ und einen Punkt $Q_2 \in N_0$ mit $P_2 = v(Q_2, H)$.

Es werde $n - p_1 = q$ gesetzt. Eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ kann so gewählt werden, daß gilt:

1. Durch α wird $U_\alpha' = \{\mathfrak{z} \,|\, |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\alpha \subseteqq U$ abgebildet. Dabei ist $\alpha(0) = P_2$.

2. Es ist $\alpha^{-1}(S_1 \cap U_\alpha) = \{\mathfrak{z} \,|\, z_1 = z_2 = \cdots = z_q = 0\} \cap U_\alpha'$. Eine ortsuniformisierende Abbildung $\beta \in \mathfrak{P}(H)$ kann so gewählt werden, daß gilt:

3. Durch β wird $U_\beta' = \{\mathfrak{w} \,|\, |w_1| < 1, \ldots, |w_n| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\beta \subseteqq V_1$ abgebildet. Dabei ist $\beta(0) = Q_2$.

4. Es ist $v(U_\beta, H) \subseteqq U_\alpha$ und $v(U_\beta \cap N_0, H) \subseteqq S_1 \cap U_\alpha$.

Die Abbildung $\alpha^{-1} v(Q, H)$ ist analytisch auf U_β also werden durch $\alpha^{-1} v(Q, H) = (f_1(Q), \ldots, f_n(Q))$ analytische Funktionen f_ν auf U_β definiert. Es ist

$$N_0 \cap U_\beta = \{Q \,|\, \partial f_1(Q)\, \partial f_2(Q) \ldots \partial f_n(Q) = 0\}. \tag{6.2}$$

Die Funktionen $h_\nu(\mathfrak{w}) = f_\nu(\beta(\mathfrak{w}))$ sind in U_β' analytisch. Ihre Funktionalmatrix hat in Q_2 den Rang $r = r(Q_2) < n$. Also kann man die Gleichungen $h_\nu(\mathfrak{w}) = z_\nu$ nach r der Veränderlichen z_ν auflösen. (Für $r = 0$ ist die Behauptung $r < p + 1$ trivial).

Es gibt also ein Gebiet W' im $\mathfrak{x}$-Raum, eine pseudokonforme Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ von W' auf $W \subseteqq U_\beta$, wobei $\mathfrak{w}(0) = 0$ mit $0 \in W'$ gilt, und Nummern $\nu_1, \ldots, \nu_r$ mit

$$h_{\nu_\varrho}(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})) \equiv x_\varrho \quad \text{für} \quad \varrho = 1, \ldots, r \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} \in W'. \tag{6.3}$$

Es ist $N_0^* = \beta^{-1}(N_0 \cap U_\beta)$ eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus U_β', die den Nullpunkt enthält. Daher ist $\tilde{N}_0 = \mathfrak{w}^{-1}(N_0^* \cap W)$ eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus W', die den Nullpunkt enthält. Ist $\mathfrak{x} \in \tilde{N}_0$, so ist $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) \in N_0^* \cap W$, so ist $v(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})), H) \in S_1 \cap U_\alpha$, so ist

$$\alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})), H) = (f_1(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x}))), \ldots, f_n(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})))) \in \alpha^{-1}(S_1 \cap U_\alpha) \tag{6.4}$$

also

$$h_\nu(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})) = f_\nu(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x}))) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, q \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} \in \tilde{N}_0. \tag{6.5}$$

Angenommen es gibt zwei verschiedene Zahlen λ und ϱ mit $\nu_\lambda \leqq q$ und $\nu_\varrho \leqq q$, so wäre

$$\begin{aligned} &\tilde{N}_0 \subseteqq \bigcap_{\nu=1}^{q} \{\mathfrak{x} \,|\, h_1(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})) = \cdots = h_q(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})) = 0\} \subseteqq \\ &\subseteqq \{\mathfrak{x} \,|\, h_{\nu_\varrho}(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})) = h_{\nu_\lambda}(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})) = 0\} = \{\mathfrak{x} \,|\, x_\lambda = x_\varrho = 0\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Da aber $\tilde{N}_0$ die reine Dimension $2n-2$ hat, ist das falsch. Zwischen den Zahlen $q+1$ und n je einschließlich liegen also mindestens $r-1$ verschiedene Zahlen (von $\nu_1, \ldots, \nu_r$); es ist $n - q \geqq r - 1$, was $p \geqq p_1 \geqq r(Q_2) - 1$ oder $p + 1 \geqq r(Q_2)$ besagt.

Die Umgebung V_1 konnte beliebig klein gewählt werden. Daher ist $\lim_{Q \to Q_1} r(Q) \leq p+1$. Da der Rang $r(Q)$ in einer Umgebung von Q_1 mit dem Rang einer Funktionalmatrix übereinstimmt, ist $r(Q_1) \leq \lim_{Q \to Q_1} r(Q) \leq p+1$; w. z. b. w.

Besteht insbesondere M nur aus einem Punkt oder aus isolierten Punkten, so kann der Rang der Abbildung $v(Q, H)$ bei einer analytischen Modifikation nur die Werte 0, 1 und n annehmen, was erst für $n > 2$ etwas Neues aussagt. Nun erhält man:

Satz 6.3. Identitätssatz II.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die Abbildung v sei in allen Punkten einer offenen Umgebung V von $Q_0 \in N$ regulär. Es gebe eine offene Umgebung U von $P_0 = v(Q_0, H)$, die eine analytische Menge S der Dimension $2p$ enthält, wobei $S \supseteq v(V \cap N, H)$ gelte. Es sei $0 \leq p < n-1$.*

3. *Durch den Punkt $P_0 \in M$ gehen k komplexe Kurven L_ν, für die $M \cap L_\nu = M \cap \bar{L}_\nu = \{P_0\}$ gelte. Es sei $p+2 \leq k \leq n$.*

4. *Der Punkt P_0 sei ein gewöhnlicher Punkt von L_ν und die Tangentialvektoren an L_ν in P_0 seien linear unabhängig.*

5. *Es sei* $Q_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{n} \Sigma(P_0, L_\nu)$.

Behauptung. *Die Modifikation ändert in P_0 die Mannigfaltigkeit G nicht.*

Der Beweis beginnt genau so wie in Satz 6.1, nur durchläuft der Index ν jetzt die Werte $\nu = 1, \ldots, k$ statt $\nu = 1, \ldots, n$. Außerdem kann man $V_\beta \subseteq V$ und $U_\alpha \subseteq U$ wählen. Für $\nu = 1, \ldots, k$ erhält man wieder die Gl. (6.1). Die Vektoren $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_k$ sind linear unabhängig, also hat die Funktionalmatrix $\left(\mathfrak{z}_{w_\mu}(0)\right)$ einen Rang nicht kleiner als k. Ihr Rang ist aber der Rang $r(Q_0)$ von $v(Q, H)$ im Punkt Q_0. Daher ist $r(Q_0) \geq k > p+1$, woraus mit Satz 6.2 sich $r(Q_0) = n$ ergibt. In der Bezeichnungsweise von Satz 5.7 ist $Q_0 \in \underline{E}$, also $P_0 = v(Q_0, H) \in E$, w. z. b. w.

Der II. Identitätssatz enthält nicht den ersten, da er für $p = n-1$ nicht anwendbar ist. Der II. Identitätssatz sagt erst etwas Neues für $0 \leq p < n-2$, also $n > 2$, aus. Als Spezialfall ergibt sich für Modifikationen in einem Punkt:

Satz 6.4. Identitätssatz von HOPF[7]).

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die Menge M bestehe aus dem Punkt P_0.*

3. *Durch P_0 gehen die komplexen Kurven L_1 und L_2, die beide P_0 als gewöhnliche Punkte enthalten.*

4. *Die Tangentialvektoren an L_1 und L_2 in P_0 seien verschieden (gerichtet).*

5. *Es sei* $Q_0 \in \Sigma(P_0, L_1) \cap \Sigma(P_0, L_2)$.

[7]) Im Falle $n = 2$ ist Satz 6.4 eine Folge des ersten Identitätssatzes. Er wurde von H. HOPF allgemeiner für „schlichte" Abbildungen (im Falle $n = 2$) bewiesen. Man vgl. H. HOPF [9a] § 3, Nr. 1.

Behauptung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *ist analytisch und* N *besteht aus dem Punkt* Q_0 *allein.*

2. *Durch*

$$\tau(P,G)=\begin{cases}\tau(P) & \text{für} \quad P\neq P_0, \quad P\in G,\\ Q_0 & \text{für} \quad P=P_0\end{cases} \tag{6.7}$$

wird G *pseudokonform auf* H *abgebildet.*

Beweis. Da $\Sigma_v(N)$ aus dem Punkt P_0 besteht, streut die Abbildung v in keinem Punkt von N. Sie ist nach Satz 2.9 in N regulär. Die Modifikation ist analytisch. Mit $p=0$ sind die Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllt, also bildet $\tau(P,G)$ die Mannigfaltigkeit G pseudokonform in H ab. Ist $Q_1\in N$, so ist $v(Q_1,H)=P_0$, weshalb N nur aus dem Punkt Q_0 besteht, w. z. b. w.

Ändert also die Modifikation $\mathfrak{M}=\underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\ H,B,N,v\end{pmatrix}$ im Punkt P_0 die Mannigfaltigkeit G, so besagt Satz 6.3 bzw. Satz 6.1 im Falle $n=2$, daß jedem „Linienelement" L in P_0 *eineindeutig* ein oder kein Punkt aus H zugeordnet ist. Darauf baut sich im Falle $n=2$ im wesentlichen die Erzeugung analytischer Modifikationen durch σ-Prozesse auf. *Leider* gelten die Identitätssätze bereits für $n=2$ bei meromorphen Modifikationen nicht mehr, wie man leicht durch Beispiele belegt[8]). Dies erschwert die Erzeugung meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse außerordentlich. In der nächsten Arbeit werden Eigenschaften meromorpher Modifikationen bewiesen, mit denen sich diese Schwierigkeiten überwinden lassen.

[8]) Beispielsweise seien G und H komplex-projektive Räume mit den homogenen Koordinaten $z_0:z_1:z_2$ bzw. $w_0:w_1:w_2$. Es seien

$$M=\{(z_0:z_1:z_2)\,|\,z_1z_2=0\},\qquad A=G-M,$$
$$N=\{(w_0:w_1:w_2)\,|\,w_1w_2=0\},\quad B=H-N,$$
$$\tau(z_0:z_1:z_2)=(z_1z_0:z_1z_2:z_2^2),$$
$$v(w_0:w_1:w_2)=(w_2w_0:w_1^2:w_1w_2).$$

Dadurch wird eine beiderseits offene und meromorphe Modifikation gegeben. Aber jede komplexe Gerade

$$L_m=\{(z_0:z_1:z_2)\,|\,z_2=mz_1\}\quad\text{mit}\quad m\neq 0$$

durch $(1:0:0)$ geht als ganzes in dieselbe Gerade aus H über:

$$L_m^*=\{(w_0:w_1:w_2)\,|\,w_2=mw_1\}.$$

Also gilt Satz 6.4 nicht für beiderseits offene und meromorphe Modifikationen.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. November 1954.)

SALZMANN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 489—494 (1955)

Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen.

Von
HELMUT SALZMANN.

1. Definitionen. Eine projektive Ebene besteht aus einer Menge P von Punkten p und einer Menge $\mathfrak{G}$ von ausgezeichneten Punktmengen G, den Geraden, so daß je zwei Punkte $p \neq q$ in einer eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden $p \cup q$ enthalten sind und je zwei Geraden $G \neq H$ genau einen Schnittpunkt $G \cap H$ haben. Außerdem wird die Existenz von vier Punkten vorausgesetzt, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Eine solche Ebene heiße *topologisch*, wenn in der Menge der Punkte sowohl wie in der Menge der Geraden je eine Topologie gegeben ist [bestimmt durch das System der Filter $\mathfrak{V}(p)$ von Umgebungen V des Punktes p bzw. das System der Filter $\Sigma(G)$ von Umgebungen $\mathfrak{S}$ der Geraden G], bezüglich deren die Abbildung der Menge der Paare verschiedener Punkte auf ihre Verbindungsgeraden und ebenso die Abbildung der Menge der Paare verschiedener Geraden auf ihre Schnittpunkte stetige Operationen sind. Die gröbste Topologie, bei der als einzige Umgebung die Menge P aller Punkte bzw. die Menge $\mathfrak{G}$ aller Geraden auftritt, soll dabei ausgeschlossen werden[1]). Damit eine Zweideutigkeit in der Bezeichnung vermieden wird, bedeute für zwei Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von Geraden der Ausdruck $\mathfrak{A} \dot{\cap} \mathfrak{B}$ die Menge aller Schnittpunkte $A \cap B$ mit $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ und $A \neq B$; dual dazu wird $A \dot{\cup} B$ für Punktmengen A, B verwendet.

2. Grundtatsachen. Aus der Definition der topologischen Ebene folgt insbesondere die Stetigkeit jeder Perspektivität zwischen Punktreihe und Geradenbüschel (im Sinne der Zuordnung der Punkte einer Geraden, dem „Träger der Punktreihe", zu ihren Verbindungsgeraden mit einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt, dem „Träger des Geradenbüschels"). Daher ist jede Projektivität zwischen zwei Geraden, als Hintereinanderausführung von Perspektivitäten, ein Homöomorphismus der von der Topologie der Punktmenge in den Geraden induzierten Topologien, die kurz als *lineare Topologien* bezeichnet seien.

Im Raum der Punkte einer topologischen Ebene (und dual dazu auch im Raum der Geraden) *gilt das* FRECHETsche *Trennungsaxiom* T_1, welches besagt, daß jeder Punkt eine Umgebung hat, die einen beliebigen anderen Punkt nicht enthält. Später läßt sich hieraus noch eine schärfere Trennungseigenschaft

[1]) Die verwendeten topologischen Begriffe findet man in [1], [2], Filter insbesondere in [2], die T_i-Terminologie in [1].

folgern. Der Beweis für T_1 ergibt sich aus der dreifachen Transitivität der Gruppe aller Projektivitäten einer Geraden auf sich[2]) in folgender Weise: Nach Voraussetzung gibt es zu einem geeigneten Punkt p eine Umgebung, die wenigstens einen anderen Punkt q nicht enthält. Das Paar p, q läßt sich durch eine Projektivität in jedes Paar verschiedener Punkte der Geraden $p \cup q$ überführen, also gibt es zu jedem solchen Paar eine Umgebung des einen Punktes, die den anderen nicht enthält. Das ist die Eigenschaft T_1 für die lineare Topologie der Geraden $p \cup q$ und wegen der Homöomorphie aller Geraden gilt T_1 für alle linearen Topologien. Aber nur ein T_1-Raum kann in einem ihn überdeckenden System von Unterräumen (hier den Geraden) lauter T_1-Topologien induzieren.

In einer topologischen Ebene ist die Topologie im Raum der Geraden in folgender Weise durch die Topologie im Raum der Punkte bestimmt: *Sind p_1, p_2 zwei verschiedene Punkte auf der Geraden G und p ein Punkt außerhalb G, so wird der Umgebungsfilter $\Sigma(G)$ erstens erzeugt von allen $V_1 \dot\cup V_2$ mit $V_i \in \mathfrak{V}(p_i)$ und zweitens ebenso von allen $U_1 \dot\cup U_2$ mit $U_i = V_i \cap (p_i \cup p)$, $V_i \in \mathfrak{V}(p_i)$.* Einerseits ist es nämlich unmittelbarer Ausdruck der Stetigkeit der Bildung der Verbindungsgeraden, daß jedes $\mathfrak{S}$ in $\Sigma(G)$ ein $V_1 \dot\cup V_2$ und damit auch ein $U_1 \dot\cup U_2$ enthält, andererseits ergibt die Stetigkeit der Bildung des Schnittpunktes zu einem gegebenen V_i, das p nicht enthält, eine Umgebung $\mathfrak{S}_i$ von G, so daß für alle $S \in \mathfrak{S}_i$ gilt $(p_i \cup p) \cap S \in V_i$, also $U_i \cap S \neq \emptyset$. Daher ist wegen $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ jede Gerade S aus $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ in $U_1 \dot\cup U_2$ enthalten. Das heißt aber $U_1 \dot\cup U_2$ und erst recht $V_1 \dot\cup V_2 \in \Sigma(G)$. Diese Beziehung zwischen Punkt- und Geradentopologie läßt sich natürlich auch dualisieren.

Nun kann man zeigen: *Jede Gerade ist eine abgeschlossene Teilmenge des Punktraumes.* Ist nämlich p ein Punkt außerhalb der Geraden G und $q \in G$, so gibt es eine Umgebung der Geraden $p \cup q$ von der Form $V \dot\cup W$ mit $V \in \mathfrak{V}(p)$, $W \in \mathfrak{V}(q)$, $q \notin V$, die G nicht enthält; hätten jetzt V und G einen gemeinsamen Punkt r, so läge $G = r \cup q$ entgegen der Konstruktion doch in $V \dot\cup W$, daher kann V die Gerade G nicht treffen und die Komplementärmenge der Geraden ist offen.

Aus dem angegebenen Zusammenhang zwischen Punkt- und Geradentopologie zusammen mit der Homogenität der Geraden und der Homöomorphie aller Geraden untereinander läßt sich erkennen, daß die Topologie einer topologischen Ebene schon durch den Umgebungsfilter eines Punktes in der linearen Topologie einer Geraden durch ihn bestimmt ist. Es ist eine offene Frage, welchen Bedingungen dieser Umgebungsfilter genügen muß, damit er von einer Topologie der Ebene induziert werden kann.

3. Koordinaten und affine Ebene. Wählt man in einer projektiven Ebene zwei Punkte u_1 und u_2 und läßt ihre Verbindungsgerade und jeden

[2]) Diese dreifache Transitivität ergibt sich leicht durch Hintereinanderausführung von höchstens drei geeignet gewählten Perspektivitäten, sie ist bewiesen in [6], S. 59 und in [5]. Hier wird nur die zweifache Transitivität benutzt, an späterer Stelle jedoch auch die dreifache.

ihrer Punkte aus der Ebene fort, so erhält man eine affine Ebene, deren Geraden als „affine Geraden" bezeichnet werden. Affine Geraden, die zusammenfallen oder keinen Punkt gemeinsam haben, heißen *parallel*. Nach Wahl eines Punktes 0 lassen sich die Punkte p der affinen Ebene in der üblichen Weise durch

$$p = (p_1 \cup u_2) \cap (p_2 \cup u_1), \qquad p_i \in A_i = (0 \cup u_i) - \{u_i\}$$

den Paaren (p_1, p_2) von Punkten p_i auf den Achsen A_i umkehrbar eindeutig zuordnen; die affine Ebene erscheint also als mengentheoretisches Produkt zweier ihrer Geraden. Liegt nun die affine Ebene in einer topologischen projektiven Ebene, so läßt sich sogar sagen: *Die affine Ebene ist topologisches Produkt zweier ihrer Geraden*, d. h. der Umgebungsfilter eines Punktes (p_1, p_2) wird erzeugt durch die $U_1 \times U_2 = \{(x_1, x_2) | x_i \in U_i\}$, wobei die U_i Umgebungen von p_i in der linearen Topologie von A_i sind. Nach der Dualisierung der zweiten Form der Kennzeichnung des Zusammenhanges zwischen Punkt- und Geradentopologie erhält man nämlich eine Basis von $\mathfrak{B}\big((p_1, p_2)\big)$ in der Gestalt aller $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$, wobei $\mathfrak{S}_1$ die Einschränkung einer Umgebung von $p_1 \cup u_2$ auf das Geradenbüschel mit dem Träger u_2, also von der Form $U_1 \dot{\cup} \{u_2\}$ ist und das Entsprechende bei Vertauschung der Indizes für $\mathfrak{S}_2$ gilt. Auf Grund der Zuordnung der Punktepaare zu den Punkten ist aber $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = U_1 \times U_2$.

Die Darstellung der affinenen Ebene wird nach Wahl eines Punktes e, der auf keiner der beiden Achsen liegt, zu einer Koordinatendarstellung, indem man den durch (p_1, p_2) bestimmten Punkt p kennzeichnet durch das Paar (x_p, y_p) von Elementen

$$x_p = \big(((p_1 \cup u_2) \cap (0 \cup e)) \cup u_1\big) \cap A_2, \qquad y_p = p_2$$

der Menge D der Punkte der affinen Geraden A_2. Bezeichnet man y_e durch 1 und erklärt man $\tau(s, x, t)$ als dasjenige Element y von D, für das der Punkt (x, y) auf der Parallelen durch $(0, t)$ zu der Geraden $(0, 0) \cup (1, s)$ liegt, so wird D mit der dadurch erklärten ternären Verknüpfung τ zu einer als *Ternärkörper* bezeichneten algebraischen Struktur, von deren Eigenschaften hier nur gebraucht wird; daß sie mit der durch $x + y = \tau(1, x, y)$ gegebenen Addition eine Loop mit dem neutralen Element 0 bildet.

Eine additive Koordinatenloop in der linearen Topologie einer topologischen Ebene ist eine topologische Loop in dem Sinne, daß die Addition und ihre beiden Umkehrungen stetige Funktionen sind. Das ergibt sich unmittelbar daraus, daß sich in der Beziehung $x + y = z$ jede der drei Größen aus den beiden anderen und den Punkten $0, e, u_1, u_2$ durch die stetigen Operationen des Verbindens und Schneidens ausdrücken läßt; so ist etwa, wenn man noch $u = (0 \cup e) \cap (u_1 \cup u_2)$ setzt,

$$y = \big(([((x \cup u_1) \cap (0 \cup u)) \cup u_2] \cap [z \cup u_1]) \cup u\big) \cap (0 \cup u_2).$$

In einer topologischen Loop folgt aus dem Trennungsaxiom T_1 sogar die Regularität (T_3). Beweis: Zu einer Umgebung U von 0 gibt es wegen der

Stetigkeit eine Umgebung V von 0 mit $V+V \subseteq U$. Für einen Punkt x ist die Menge der w mit $v+w=x$ für ein $v \in V$ eine Umgebung von x, die also, falls x zu der abgeschlossenen Hülle $\overline{V}$ von V gehört, einen Punkt aus V enthält, woraus $x \in V+V$ und daher $\overline{V} \subseteq U$ folgt. Wegen der Homogenität der linearen Topologie enthält also jede Umgebung die abgeschlossene Hülle einer anderen, wie behauptet. Anwendung der früheren Sätze liefert daraus sofort: *In einer topologischen Ebene sind Punkt- und Geradentopologie regulär.*

4. Zusammenhang. Eine topologische Ebene heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht als Summe[3]) zweier echter abgeschlossener Teilmengen dargestellt werden kann, oder, was dasselbe heißt, wenn die leere Menge und die ganze Ebene die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Punktmengen sind. Will man etwa im Fall einer zusammenhängenden desarguesschen Ebene (wo der Ternärkörper ein Schiefkörper ist) Sätze über zusammenhängende topologische Schiefkörper anwenden, so erhebt sich die Frage, ob auch die affine Ebene zusammenhängt. Sie soll im folgenden behandelt werden.

Aus der erwähnten dreifachen Transitivität der Gruppe der Projektivitäten einer Geraden folgt die Transitivität der Gruppe $\Pi_D(x)$ der den Punkt x festlassenden Projektivitäten der affinen Geraden D auf der Menge der von x verschiedenen Punkte von D. Hieraus ergeben sich nun zunächst für das Zusammenhangsverhalten der affinen Geraden genau zwei Möglichkeiten: Sie ist entweder zusammenhängend oder *nirgends zusammenhängend*[4]), worunter verstanden wird, daß der die zusammenhängende Komponente eines Punktes x enthaltende Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Umgebungen von x, die sog. *Quasikomponente*[4]) von x, auf diesen einen Punkt zusammenschrumpft; denn dieser Durchschnitt ist invariant unter $\Pi_D(x)$ und enthält daher zugleich mit einem weiteren Punkt auch die ganze Gerade D. Die beiden Eigenschaften, zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend zu sein, kommen gleichzeitig der affinen Geraden und der zum topologischen Produkt der affinen Geraden mit sich selbst homöomorphen affinen Ebene zu.

Aus dem Zusammenhang der affinen Geraden folgt derjenige der projektiven Geraden, dieser ist gleichwertig mit dem der punktierten Ebene und aus diesem folgt derjenige der ganzen Ebene; denn einmal erzeugt eine Zerlegung der projektiven Geraden in zwei abgeschlossene Teilmengen eine ebensolche der affinen Geraden, zum anderen können in der punktierten Ebene je zwei Punkte über einen dritten durch einen zusammenhängenden Zug aus zwei Geraden verbunden werden, während umgekehrt die punktierte Ebene durch Projektion aus dem herausgenommenen Punkt auf eine nicht durch ihn gehende projektive Gerade abgebildet werden kann, die als stetige Funktion den Zusammenhang erhält; schließlich induziert auch die Zerlegung der projektiven Ebene in zwei abgeschlossene Teilmengen eine solche der punktierten Ebene.

---

[3]) Summe ist hier gemeint als Vereinigung disjunkter Teilmengen.

[4]) Diese Bezeichnungen sind gewählt in Anlehnung an [4], S. 79—96.

Der hohe Grad von Homogenität in einer topologischen Ebene läßt vermuten, daß die in allgemeinen Räumen mögliche Erscheinung, daß eine zusammenhängende Punktmenge durch Herausnahme eines einzigen Punktes in lauter einzelne Punkte zerfällt[5]), in einer Ebene nicht vorkommen kann. In der Tat hat der Zusammenhang der projektiven Geraden den der affinen Geraden zur Folge. Der Beweis hierfür ergibt sich so: Wegen der Homogenität der projektiven Geraden G kann man die affine Gerade aus dieser durch Herausnahme eines beliebigen Punktes z entstanden denken. Angenommen, die affine Gerade sei nicht zusammenhängend; da sich dann alle ihre Quasikomponenten auf einzelne Punkte reduzieren, gibt es zu zwei Punkten x, y eine offene Umgebung O von x, die y nicht enthält und in $G-\{z\}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist, deren Rand in G also höchstens aus dem Punkt z besteht. Die Betrachtung der affinen Geraden $G-\{y\}$ lehrt ebenso die Existenz einer offenen Umgebung Q von x, die z nicht enthält und deren Rand höchstens aus dem Punkt y besteht. Jetzt ist $O \cap Q$ eine von G verschiedene offene Umgebung von x, deren Rand in

$$(O+\{z\}) \cap (Q+\{y\}) - (O \cap Q)$$

enthalten und damit leer ist, so daß also auch die projektive Gerade nicht zusammenhängt.

Weiter gilt der Satz: *Alle Geraden einer zusammenhängenden projektiven Ebene sind zusammenhängend.* Der Beweis erfolgt wieder indirekt: Sei G eine nicht zusammenhängende Gerade, p ein nicht auf ihr gelegener Punkt und σ die (stetige) Projektion der punktierten Ebene $P-\{p\}$ aus p auf G. Für $x \in G$ ist $\sigma^{-1}x = (x \cup p) - \{p\}$. Der Durchschnitt K aller in $P-\{p\}$ offenen und abgeschlossenen Mengen, die $\sigma^{-1}x$ umfassen, ist, da ja σ^{-1} offene Mengen in offene und abgeschlossene in abgeschlossene überführt, enthalten im Durchschnitt der Urbilder $\sigma^{-1}S$ aller x enthaltenden in G offenen und abgeschlossenen Mengen S und dies ist nichts anderes als das Urbild des Durchschnittes aller dieser S, also der Quasikomponente von x in G, die nach Voraussetzung aus dem Punkt x allein besteht, d.h. $K \subseteq \sigma^{-1}x$. Andererseits ist die Quasikomponente von x in $P-\{p\}$ enthalten in K. Für einen Punkt $q \notin x \cup p$ findet man nun (ebenso wie beim vorigen Beweis) eine in P offene Umgebung O von x, die q nicht enthält und höchstens den Randpunkt p haben kann. Vertauschen von p und q führt zu einer entsprechenden Umgebung Q von x. Nun ist wieder $O \cap Q$ eine von P verschiedene nicht leere randlose offene Menge und damit P nicht zusammenhängend.

Schließlich ergibt sich, daß auch die projektive Gerade, die punktierte und die projektive Ebene nur zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend sein können. Für die projektive Gerade folgt das unmittelbar aus der mehrfachen Transitivität der Gruppe der Projektivitäten. Ist die projektive Ebene nicht zusammenhängend, so findet man nach dem vorangegangenen Beweis in ihr und daher auch in der punktierten Ebene zu einem

[5]) Für ein Beispiel s. [3], [4], S. 85.

Punkt x eine offene und abgeschlossene Umgebung, die einen beliebigen anderen Punkt nicht enthält. Daher besteht die Quasikomponente von x aus dem Punkt x allein.

Zusammenfassend hat man das Ergebnis, daß in einer topologischen projektiven Ebene die affinen Geraden, die projektiven Geraden, die affine Ebene, die punktierte Ebene und die ganze Ebene selbst entweder alle zusammenhängend oder alle nirgends zusammenhängend sind.

Literatur.

[1] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale I. Paris 1940. — [3] KNASTER-KURATOWSKI: Sur les ensembles connexes. Fundamenta Math. 2, 206—255 (1921). — [4] KURATOWSKI, C.: Topologie II. Warschau 1950. — [5] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Erscheint 1955. — [6] VEBLEN-YOUNG: Projective Geometry I. New York 1910.

Zusatz bei der Korrektur. Die Ergebnisse dieser Arbeit überschneiden sich teilweise mit denen von L. A. SKORNIAKOV, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 3, 347—373 (1954), die dem Verfasser während der Korrektur durch ein Referat bekannt wurden.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954.)